PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO, EQ. AURATO;

Perpetuis Commentariis illustrata, communi studio

PP. THOMÆ LE SEUR & FRANCISCI JACQUIER,

Ex Gallicanâ Minimorum Familiâ,

Matheseos Professorum.

Editio altera longè accuratior & emendatior.

TOMUS SECUNDUS.



COLONIÆ ALLOBROGUM,

Sumptibus CL. & ANT. PHILIBERT Bibliop.

MDCCLX.



ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGALI

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

SERENISSIMI REGIS

GEORGII II.

FLORENTI,

COMMENTARIUM PERPETUUM IN HUNC

CELEBERR. IS. NEWTONI TRACTATUM

D. D. D.

Thomas LE SEUR & *Franciscus* JACQUIER.

MONITUM.

ALtera tandem PRINCIPIORUM MATHEMATICORUM Pars in lucem prodit. De motibus corporum in medio resistente agitur potissimùm in hoc secundo NEWTONI Libro. Rem difficultatis plenam norunt omnes; ita tamen nostra studuimus accommodare commentaria ut iis qui in primi Libri lectione eâ quâ par est diligentiâ & attentione fuerint versati, facilia planaque omnia futura esse speremus. Nec satis nobis fuit præclara Clariss. Autoris inventa explicare, nos ipsi quoque usu didicimus nonnulla interdùm invenire quæ hùc & illùc in nostris commentariis inserere ausi sumus. Sed quod maximum est hujusce operis decus & ornamentum, nova quamplurima doctissimi EULERI problemata, quæ in egregio Mechanices Opere leguntur, addidimus. Nostros etiam abundè locupletant commentarios pretiosa monumenta quibus *Acta Eruditorum* Lipsiensia exornarunt Clariss. Viri JOANNES & DANIEL BERNOULLIUS. Silentio tandem prætermittendus non est Illustriss. doctissimusque POLENUS, cujus elegans de Logarithmicæ constructione Epistola, nonnullaque de motu aquarum experimenta nobis plurimùm profuêre. Sed longè majora sunt

quàm verbis exprimi possint, de hoc universo opere Clariss. Viri JOAN. LUDOVICI CALANDRINI merita, qui, eâdem quam primi Libri initio laudavimus, diligentiâ indefessâque curâ huic secundæ parti invigilavit.

Reprehendendum multis fortasse videbitur quod oblatam frequenter occasionem quasi è manibus dimittentes, celeberrimas Philosophorum controversias vel omninò omittamus vel leviter duntaxat perstringamus. Verùm sciant eum fuisse NEWTONI scopum à quo ne latum unguem maximè vellemus discedere, ut ingeniosa quoque Systematum commenta è physicâ eliminaret atque profligaret. Nos itaque à Philosophicis litibus maximè aversi, altercationes summo studio declinavimus. Tot insuper nova his de rebus scripta quotidiè circumferuntur ut justi operis molem excederet hic secundus Liber, si recentiora explicare aggrederemur Philosophorum placita.

Hanc secundam laboris nostri partem benignè excipiant mathematicarum disciplinarum Candidati, tertiamque tandem & ultimam anno proximè futuro expectent.

ROMÆ *in Regio Conventu SS*[æ]*. Trinitatis.*
Anno 1740.

IN-

INDEX SECTIONUM
DE MOTU CORPORUM,
TOMI II.

SECT. I. De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis. Pag. 1
SECT. II. De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatis. 46
SECT. III. De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ. 121
SECT. IV. De corporum circulari motu in mediis resistentibus. 142
SECT. V. De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. 165
SECT. VI. De motu & resistentiâ corporum funependulorum. 189
SECT. VII. De motu fluidorum & resistentiâ projectilium. 250
SECT. VIII. De motu per fluida propagato. 340
SECT. IX. De motu circulari fluidorum. 397

Index specialis Propositionum hujusce Tomi, seu Libri Secundi, ad calcem Tomi quarti reperietur.

ADMO-

ADMONITIO.

In initio ſingularum notarum quibus numerus præfixus non fuit, ejus loco aſteriſcus * depictus eſt : à pagina verò 130 alter aſteriſcus ſubinde reperietur, cujus alius non eſt uſus quàm ut diſtinguat ea quæ inſerta ſunt ab Editore (eo jure ſibi ab Autoribus Commentarii conceſſo); idem etiam deſignat ſignum (†) quibuſdam notis præfixum, ne ſcilicet turbaretur ordo litterarum ab Autoribus ipſis adhibitus.

Quid in novâ hac ſecundi, necnon prioris Tomi Editione præſtitum ſit, dicetur in limine tertii qui unà cum quarto, ſecundâ vice, Deo dante, lucem videbit anno proximo.

Datum GENEVÆ 30. *Aug.* 1759.

Le prix des 4. Volumes ſera de 36 Liv. de France, pour ceux qui payeront d'avance avant le mois de Novembre prochain, & enſuite 50 Liv.



DE MOTU CORPORUM LIBER SECUNDUS.

SECTIO I.

(*) *De motu corporum quibus resistitur in ratione velocitatis.*

(*) LEMMA

generales resistentiæ notiones exponens.

1. Non potest corpus in medio fluido moveri atque in illud agere, quin ex fluidi reactione vim seu resistentiam aliquam patiatur. Vis illa resistentiæ, proportionalis est decremento motûs, quod dato tempore generat, & illius directio directioni mobilis semper opposita est (*per mot. Leg.* 2. *&* 3.) Quapropter datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum quod dato tempore producit ; datâ enim mobilis massâ, motûs decrementum est ut decrementum velocitatis (6. *Lib.* 1.). 1.

2. Vis resistentiæ quam momento quolibet temporis experitur corpus, est ut motûs decrementum directè & temporis mo-

mentum inversè. Nam resistentia dato temporis momento est ut motûs decrementum directè (1) & dato motûs decremento est inversè ut momentum temporis quo motûs decrementum generatur. Si enim subduplo vel subtriplo temporis momento, idem motûs incrementum vel decrementum generetur, vis generans dupla aut tripla est.

2. 3. Hinc datâ corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè.

4. Quoniam directio vis resistentiæ, directioni mobilis contraria est (1), corpus solâ vi insitâ in medio resistente motum, per rectam lineam continuò fertur, quod etiam evenire debere manifestum est, si corpus vi quâlibet acceleratrice vel retardatrice, secundum vel contrà directionem motûs insiti urgeatur.

5. Resistentia considerari potest tanquam vis retardans, & cum vi gravitatis, quâ corporum ascendentium motus perpetuò minuitur, conferri. Vis enim resistentiæ sicut vis gravitatis infinitè parva est, si conferatur cum vi illâ quâ corpus motu finito cietur, seu quâ spatium finitum finito tempore describit. Nam si resistentiæ quam omni temporis momento patitur corpus, vis esset finita, sive ejusdem generis cum vi finitâ corporis motu finito acti, infinita multitudo resistentiarum momentanearum finito quovis tempore producta, totum corporis motum finito quolibet exiguo tempore extingueret, quod est contra hyp., quâ supponimus corporis motum tempore aliquo finito in medio resistente perseverare.

6. Hinc corporis in medio resistente moti velocitas finita per spatium infinitè parvum, atque etiam tempore infinitè parvo æquabilis censeri potest, neglecto nimirum infinitè parvo velocitatis decremento.

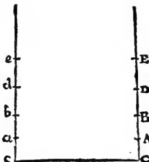
7. JAM verò resistentia corporum in fluidis, cæteris paribus, oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex reactione partium medii, tresque sunt celebriores circà hujus resistentiæ legem hypotheses, quarum Mathematicas consequentias NEWTONUS hoc libro exponit. 1a. Hypothesis resistentiam ponit velocitati corporis dati proportionalem, secunda velocitatis quadrato, & tertia partim velocitati, & partim velocitatis quadrato. Præterea cùm experimentis sit cognitum partem quamdam resistentiæ fluidorum uniformem esse, considerandæ sunt quatuor aliæ hypotheses, in quarum primâ resistentia fingatur uniformis; in secundâ partim uniformis & partim velocitati proportionalis; in tertiâ partim uniformis & partim ut quadratum velocitatis, & in quartâ denique partim uniformis, partim ut velocitas, & partim ut velocitatis quadratum. Prima ex his quatuor hypothesibus nihil habet difficultatis, cùm uniformis resistentia considerari possit tanquam gravitas constans cùm motum ascendentis corporis retardat; quâ de re satis actum est *lib. 1.* tres verò quæ sequuntur hypotheses non ægrè referri plerumque possunt ad determinationes motuum quas aliæ priores hypotheses (de quibus ab initio actum est) suppeditant, quod deinceps ostendemus.

8. Si medium in quo corpus movetur perfectè fluidum sit, hoc est, partibus constet optimè lævigatis nullâque tenacitate cohærentibus, quæ proindè vi cuicumque illatæ cedant, & cedendo facillimè moveantur inter se, sola ea consideranda est resistentia quæ ex medii reactione ortum ducit, estque illa ut densitas medii & quadratum velocitatis mobilis dati conjunctim. Hæc enim resistentia (*per motûs leg. 2. & 3. lib. 1.*) est ut quantitas motûs dato tempusculo communicati; sed datâ mobilis velocitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi tempusculo dato movenda, hoc est, ut densitas medii; datâ autem medii densitate, quantitas motûs communicati est ut quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda, & ut velocitas quâ quantitas illa fluidi movetur conjunctim, & quantitas fluidi dato tempusculo dimovenda velocitati mobilis proportionalis est, corpus enim duplo velocius altero, duplo majus spatium in fluido percurret, sicque duplo pluribus particulis occurret. Quare datâ densitate medii, resistentia est ut quadratum celeritatis mobilis, atque adeò si neque fluidi densitas, neque mobilis celeritas data sit, erit resistentia ut medii densitas & quadratum velocitatis conjunctim, atque hæc est resistentia quæ ortum ducit ab inertiâ particularum fluidi quas corpus motum è lo-

è loco dimovet, & quæ in velocioribus motibus sola ferè observatur.

9. Altera resistentia quæ ex tenacitate partium fluidi uniformis nascitur, constans est, aut quod idem est, temporis momento proportionalis, eamque in tardissimis motibus sensibilem faciunt experimenta. Si enim partium fluidi cohæsio sit ubique eadem, vi quâdam determinatâ opus est ut partes illæ separentur, corporique transitum præbeant, quâcumque demum velocitate illud feratur, & ideò vis illa resistentiæ cum vi gravitatis uniformi, quæ corporis ascendentis motum retardat, conferri potest. Nam corpora duo similia & æqualia cùm pari velocitate è locis C & c per lineas CE, c e, ad rectam C c normales projiciantur, & in locis æque altis A & a, B & b, D & d &c. æqualem patiantur resistentiam; corpus quidem C resistentiam experiatur à vi gravitatis constante (quæ in locis A, B, D, E, &c. tantùm agat) oriundam, corpus verò c resistentiam ex tenacitate datâ, vi illi gravitatis æquali, in locis tantùm a, b, d, &c. reagente ortam; in spatiis verò intermediis A B & a b, B D & b d, &c. nullum sit motibus obstaculum; dum corpora perveniunt in A & a, æqualem habent velocitatem, & deindè victis æqualibus in A & a obstaculis, pari adhuc velocitate per spatia minime resistentia A B & a b, feruntur, & simili modo, ob æquales resistentias in locis B & b per spatia B D & b d simul moventur, & ità deinceps eandem semper velocitatem in locis æque altis habent. Minuantur jam æqualia illa spatia A B & ab, B D & b d, &c. & eorum numerus augeatur in infinitum, ut vis gravitatis & resistentiæ actio vel reactio continua reddatur, & corpora duo eandem ubique resistentiam patientur, & in locis æquè altis eandem velocitatem habebunt. Quarè resistentia quæ ex fluidi tenacitate ortum ducit, potest cum vi gravitatis uniformis comparari, licet medii tenacitas in corpus quiescens (quod quidem vi gravitatis semper urgeretur) agere nullo modo possit.

10. In fluidis igitur tenacitate aliquâ præditis, resistentia est partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis (8. 9.).



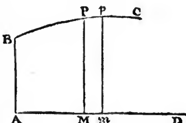
11. LEMMA. In quâcunque resistentiæ hypothesi, corporis tam in medio resistente quàm in vacuo moti velocitas finita in singulis locis est ut elementum spatii descripti directè & momentum temporis quo describitur inversè. Velocitas enim uniformis est ut spatium quodcunque descriptum directè & tempus quo id spatium describitur inversè. In medio autem sive resistente sive vacuo velocitas per spatium infinitè parvum æquabilis est (6.) 11.

12. *Coroll.* 1. Hinc temporis momentum est ut momentum seu elementum spatii directè & velocitas inversè; momentum verò spatii ut velocitas & momentum temporis conjunctim.

13. *Coroll.* 2. Si igitur velocitas dicatur v, spatium descriptum s, tempus quo descriptum est t erit $v = \frac{ds}{dt}$, $v\,dt = ds$ & $dt = \frac{ds}{v}$, sumptisque fluentibus $S. v\,dt = s$. & $t = S. \frac{ds}{v}$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

14. *Coroll.* 3. Si ità descripta fuerit curva B P C ut ejus applicatæ M P, m p, axi A D, normales, exponant velocitatem v, & abscissæ à puncto fixo A sumptæ A M, A m tempus t, erectumque sit perpendiculum A B curvæ occurrens in B, area A B P M exponit spatium tempore t descriptum. Sit enim applicata p m, priori P M infinitè propinqua, & erit M m = dt, adeóque areæ A B P M elementum M P p m = $v\,dt = ds$ (11) & proinde area A B P M = S. $v\,dt = s$. Recta A D dicatur linea temporum & curva B P C linea celeritatum. Eodem modo si abscissa A M exponeret spatium descriptum s & applicata M P velocitatem inversam, ità ut esset A M = s, & M P = $\frac{1}{v}$, area A B P M exponeret tempus quo spatium AM descriptum est; esset enim M P p m = $\frac{ds}{v} = dt$, & hinc area A B P M = S. $\frac{ds}{v} = t$.



15. LEMMA. *Si corpus datæ massæ solâ vi insitâ in medio resistente moveatur, decrementum velocitatis, erit ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Incrementum verò spatii erit ut velocitas & velocitatis decrementum directè & resistentia inversè.* Datâ enim corporis massâ, resistentia est ut velocitatis decrementum directè & momentum temporis inversè (2) ideóque decrementum velocitatis est ut resistentia & momentum temporis conjunctim. Quod erat 1um. Sed incrementum spatii est ut velocitas & momentum temporis conjunctim (12) momentum verò temporis est ut decrementum velocitatis directè & resistentia inversè (2); Quarè incrementum spatii est ut velocitas & illius decrementum directè & resistentia inversè. Quod erat 2um.

16. *Coroll.* 1. Hinc resistentia est ut velocitas & illius decrementum directè ac spatii incrementum inversè, & velocitas in suum decrementum ducta, est ut resistentia & incrementum spatii conjunctim.

17. *Coroll.* 2. Quare si spatium dicatur s, tempus t, velocitas v, resistentia r, erit $r\,dt = -dv$, & $r\,ds = -v\,dv$.

18. LEMMA. *Si corpus datæ massæ in medio resistente urgeatur vi centripetâ in directione motûs corporis agente; corpore ascendente, erit velocitatis decrementum ut momentum temporis & summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim. Et velocitas in suum decrementum ducta erit ut incrementum spatii & summa vis centripetæ & resistentiæ conjunctim.*

At corpore descendente, velocitatis incrementum erit ut momentum temporis, & differentia inter vim centripetam & vim resistentiæ conjunctim. Et velocitas in suum incrementum ducta, erit ut incrementum sive elementum spatii & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim.

Resistentia enim considerari potest tanquam vis continuò retardans (5), & vis centripeta corporis ascendentis motum etiam retardat, ideóque vis tota retardatrix est summa ipsa vis centripetæ & resistentiæ, dum corpus ascendit; sed vis retardatrix in temporis momentum ducta est ut decrementum velocitatis quod producit (2); ergò corpore ascendente, decrementum velocitatis est ut temporis momentum & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 1um.

Sed momentum temporis est ut incrementum sive elementum spatii directè & velocitas inversè (12). Quarè si corpus ascendat, decrementum velocitatis est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ directè, & velocitas inversè, adeóque velocitas in suum decrementum ducta est ut elementum spatii & summa vis centripetæ ac resistentiæ conjunctim. Quod erat 2um.

Descendente corpore vis centripeta motum

tum corporis accelerat dum resistentia retardat, & ideò si vis centripeta major sit vi resistentiae, excessus vis centripetae suprà resistentiam est vis tota accelerans; Si vis centripeta minor est vi resistentiae, vis tota retardans erit excessus resistentiae suprà vim centripetam. Quarè differentia inter resistentiam & vim centripetam, in temporis momentum ducta, erit in primo casu ut incrementum velocitatis, & in secundo casu, ut illius decrementum. Quod erat 3um. Sed momentum temporis est, ut elementum spatii directè & velocitas inversè (11), quarè velocitas in suum elementum (sive incrementum sit, sive decrementum) ducta, est ut elementum spatii, & differentia inter vim centripetam ac resistentiam conjunctim. Quod erat 4um.

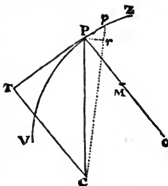
19. *Coroll.* 1. Undè si vis centripeta dicatur g, resistentia r, spatium s, tempus t, velocitas v erit pro corporis ascensu $g\,dt + r\,dt = -dv$, & $g\,ds + r\,ds = -v\,dv$; & pro corporis descensu, si vis centripeta vi resistentiae sit major $g\,dt - r\,dt = dv$, & $g\,ds - r\,ds = v\,dv$; at si vis centripeta vi resistentiae sit minor $r\,dt - g\,dt = -dv$; & $r\,ds - g\,ds = -v\,dv$.

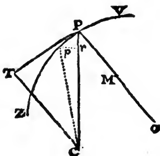
20. *Coroll.* 2. Si in his formulis ponatur $r = 0$, mutabuntur illae in formulas, quibus motus corporis in medio non resistente determinantur. Quâ ratione motus corporis in medio resistente conferri possunt cum ejusdem motibus in medio non resistente.

21. *Coroll.* 3. Si corpore descendente; resistentia vi centripetae aequalis fuerit, corporis celeritas aequabilis manet; nam in formulis $g\,dt - r\,dt = dv$, & $r\,dt - g\,dt = -dv$, positâ $g = r$, fit $dv = 0$, hoc est, velocitatis incrementum vel decrementum nullum.

22. *Coroll.* 4. Si corpus in lineâ rectâ AC vi centripetâ urgeatur ad punctum datum C, & de loco dato A sursum vel deorsum projiciatur cum velocitate datâ in medio resistente, & spatium AP quod ascendendo vel descendendo describit tempore t dicatur s, data AC dicatur b; & tam in ascensu quam in descensu scribatur $CP = x$, adeóque in ascensu $x - b = s$, & $dx = ds$, in descensu $b - x = s$, & $-dx = ds$; si loco ds substituatur ipsius valor in formulis coroll. 1. (19) erunt illae pro ascensu $g\,dx + r\,dx = -v\,dv$, quarum una in alteram abit, mutato signo + vel −, quantitati r praefixo.

22.





23. LEMMA. Si corpus vi quâlibet centripetâ sollicitatum curvam VPZ in medio resistente aut etiam in vacuo describat, visque centripeta in loco quovis P dividatur in vires duas, quarum altera directionem habeat PO tangenti PT per P ductae normalem, altera directionem cum tangente congruentem, quadratum velocitatis cor-

 poris

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUNDUS. SECTIO I.

peris in loco P, exponi poterit per factum ex vi normali ductæ in radium circuli curvam V P Z osculantis in P.

Sit P C, totius vis centripetæ directio, P O radius osculi, P p arcus curvæ infinitè parvus qui usurpari potest pro arcu circuli centro O & radio O P descripti. Velocitas corporis in P dicatur v, quæ per arcum P p tam in medio resistente quam in vacuo æquabilis est,

23\. (6) & totius vis centripetæ pars illa quæ secundum directionem P O agit, seu vis normalis dicatur N & quia vis resistentiæ ut potè semper contraria directioni mobili P T, (1) vim normalem N non afficit, erit vis illa N quâ corpus in arcu P p retinetur in medio resistente æqualis vi centripetæ quâ corpus idem cum eâdem velocitate æquabili v, in medio non resistente circulum describeret cujus centrum O, & radius O P. Corpus autem vi constante N, sollicitatum in vacuo de loco P cadat per radii partem P M ita ut eo lapsu acquirat celeritatem v quâ in medio non resistente circulum describeret cujus centrum est O & radius est O P; sitque P M $= s$, velocitas eo lapsu acquisita in M erit ergo $= v$, & erit (20. 19.) $N\,ds = v\,dv$, sumptisque fluentibus $Ns = \frac{1}{2} vv$, & $2\,Ns = vv$. Sed altitudo ex quâ corpus vi constante N sollicitatum in vacuo cadere debet ut velocitatem acquirat æqualem illi cum quâ circulum ipsum describit, est æqualis dimidio radii P O, (119. *lib.* 1.) ergo $2\,s =$ P O & $2\,Ns = vv = N \times$ P O. Q. E. D.

24\. *Coroll.* 1. Iisdem positis, totius vis centripetæ juxtà directionem P C urgentis ea pars quæ secundum directionem tangentis P T agit, seu vis tangentialis in P dicatur T resistentia ibidem r, arcus V P, s, ideoque P q $= ds$, & si corpus descendit, erit $T\,ds - r\,ds = \pm v\,dv$ (18. 19.) quia vis tangentialis motum accelerat & vis resistentiæ eundem retardat, vis autem normalis nec accelerat nec retardat. Sed si corpus ascendit, erit $T\,ds + r\,ds = - v\,dv$ (18. 19.) vi tangentiali & resistentiâ motum corporis simul retardantibus.

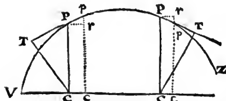
25\. *Coroll.* 2. Sit C virium centrum, vis tota centripeta in directione P C urgens $= g$, C P $= y$, C T tangenti perpendicularis $= p$, ideoque P T $= \sqrt{yy - pp}$. Ex puncto p, alteri P infinitè propinquo demissum sit ad C P perpendiculum p r,

ut sit p r $= dy$, & triangulum P r p, simile triangulo P T C, & erit P p (ds) : p r (dy) $=$ P C : P T $= g : T = \frac{g\,dy}{ds}$, ubi observandum est dy, esse affirmativam, quando crescente arcu V P sive s, crescit etiam recta C P, seu y, id est, quando corpus ascendit, & contrà dy esse negativam, dum corpus descendit, adeóque in hoc casu fieri $T = -\frac{g\,dy}{ds}$. Hi valores vis tangentialis T, substituantur in formulis corollarii 1. & ambæ in hanc mutabuntur, $g\,dy + r\,ds = - v\,dv$.

26\. *Coroll.* 3. Quia P p (ds) : p r ($\pm dy$) $=$ P C (y) : P T ($\sqrt{yy - pp}$) erit $ds = \pm \frac{y\,dy}{\sqrt{yy - pp}}$, (signo superiori pro ascensu & inferiori pro descensu usurpato).

pato). Quarè fiet $g\,dy + r\,ds = g\,dy \pm \frac{r\,y\,dy}{\sqrt{yy - pp}} = -v\,dv$.

27. *Coroll.* 4. Si radius osculi P O dicatur R, est (23) $R \times N = v^2$, & quia $y : p = g : N$, adeóque $\frac{pg}{y} = N$, fiet $\frac{Rpg}{y} = v^2$; sed radius osculi $R = \frac{y\,dy}{dp}$ (214 lib. 1.) quarè erit $\frac{gp\,dy}{dp} = v^2$, & $g = \frac{v^2\,dp}{p\,dy}$. Substituatur hic valor in formulâ corollarii 2[i]. & fiet $g\,dy + r\,ds = \frac{v^2\,dp}{p} + r\,ds = -v\,dv$, & ideò $v\,dv + \frac{v^2\,dp}{p} = -r\,ds$.



28. *Coroll.* 5. Vis centripetæ directio PC, sibi semper parallela maneat, ut hic assumitur vis gravitatis, & per punctum V, in curvâ V P Z datum, ducatur recta V C directioni gravitatis P C perpendicularis, dicanturque ut suprà V P $= s$, P p $= ds$, C P $= y$, p r $= dy$, vis tota gravitatis in P $= g$, resistentia r, velocitas corporis ibidem $= v$, & erit ut in corollario 2° $g\,dy + r\,ds = -v\,dv$.

29. *Coroll.* 6. Si in Hypothesi corollarii 5[i]. dicantur radius osculi in P $= R$, vis normalis $= N$, abscissa V C $= x$, & C c seu P r $= dx$, erit ob triangulorum P p r, C P T similitudinem, P p : P r = P C : T C $= g : N$, sive $ds : dx = g : N = \frac{g\,dx}{ds}$; sed (23) $N = \frac{v^2}{R}$, ergò $\frac{g\,dx}{ds} = \frac{v^2}{R}$, & hinc $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds}$.

30. *Coroll.* 7. Est autem (216. Lib. 1.) $R = \frac{ds^2\,dy}{ds\,ddx - dx\,dds} = -\frac{ds^2\,dy}{dx\,dds}$, si ponatur dx, constans, & ideò $ddx = 0$; Et quia $ds^2 = dy^2 + dx^2$, sumptisque fluxionibus, factâ dx, constante $ds\,dds = dy\,ddy$, & $dds = \frac{dy\,ddy}{ds}$, fiet $R = -\frac{ds^3}{dx\,ddy}$; quarè (29) $v^2 = \frac{Rg\,dx}{ds} = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$, ideòque $g = -\frac{v^2\,ddy}{ds^2}$, & hinc (28) $g\,dy + r\,ds = -\frac{v^2\,dy\,ddy}{ds^2} + r\,ds = -v\,dv$, hoc est, ob $dy\,ddy = ds\,dds$; $v\,dv = \frac{v^2\,dds}{ds} - r\,ds$.

31. *Scholion.* In superioribus quinque lemmatis ipsorumque corollariis, fere complexi sumus principia omnia, quibus & ad inventionem & ad demonstrationem motuum in mediis resistentibus usi sunt Clariss. viri NEWT. in hoc Libro; *Varignonius* in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1707. 1708. 1709. 1710. 1711. Joannes *Bernoulli* ibid. an. 1711. & in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. & 1719. *Hermannus* Lib. 2. *Phoronomiæ* & in Commentariis Academiæ Petropolitanæ, ae *Eulerus* in opere exquisito quod de *Mechanicâ* scripsit analyticè. Nunc alia nonnulla de Logarithmicæ proprietatibus, & de methodo maximorum & minimorum quæ ad doctrinam motuum in mediis resistentibus expplicandam spectant, subjungenda sunt.

LEMMA

præcipuas Logarithmicæ proprietates exponens.

III. *Hugenius* de hac ipsâ *Newtoniani* operis parte loquens, in quâ agitur de corporibus in mediis resistentibus motis, (quam summâ cum voluptate se vidisse testatur) ait se notasse lineam curvam quam Logarithmicam aut Logisticam nuncupat, summæ utilitatis esse in hoc negotio, & quædam de eâ Theoremata indicat quorum demonstrationem *Guido Grandus* postea evulgavit; Hujus ergo curvæ proprietates ab initio explicare à scopo nostro alienum non duximus.

32. De-

O L K H G B P p Q q s r F E D C T A a t M m N n

32. *Defin.* Sit linea recta N A O secundum quam feratur perpendicularis M P motu uniformi & sibi parallelo, dum in ea perpendiculari M P mobile P velocitate variabili movetur secundum hanc Legem, ut ejus velocitas sit semper proportionalis distantiæ ejus à rectâ N A O, curva ab illo puncto P descripta dicetur *Logarithmica* vel *Logistica*.

Linea N A O secundum quam perpendicularis P M motu uniformi & sibi parallelo fertur, dicitur *Axis Logarithmicæ*, & lineæ P M, Q N perpendiculares in Axem sunt ejus ordinatæ.

Si quædam ex ordinatis Logarithmicæ, ut A B, sit æqualis unitati, punctum axeos A cui insistit censetur abscissarum origo, & abscissæ à parte A M sumptæ, sunt positivæ, à parte A O negativæ & abscissa pertinens ad ordinatam A B sive ad unitatem est ipsum o.

Coroll. 1. *Differentiæ quamminimæ ordinatarum Logarithmicæ æqualibus tempusculis genitæ, sunt ut illæ ordinatæ.*

In quovis enim puncto Logarithmicæ velocitas axi perpendicularis quâ ordinatæ crescunt vel decrescunt, est ordinatæ proportionalis (*ex Def.*), sed durante tempusculo infinitè parvo illa velocitas uniformis est censenda, & æqualibus tempusculis incrementa vel decrementa linearum sunt ut velocitates uniformes quibus generantur, ergo incrementa vel decrementa ordinatarum h. e. earum differentiæ æqualibus tempusculis genitæ sunt ut illæ ordinatæ.

Coroll. 2. *Sint ordinatæ quævis P M, Q N, ducantur duæ aliæ ordinatæ p m, q n ipsis quamproximæ & ab iis æqualiter distantes, p m & q n erunt prioribus ordinatis proportionales:* Velocitas enim quâ ordinata motu sibi parallelo fertur, est uniformis, ideoque eodem tempore ordinata P M ad p m perveniet ac Q N ad q n ob æquales distantias, ergo, per Cor. I. differentiæ ordinatarum P M & Q N dum perveniunt ad p m & q n erunt iis ipsis ordinatis proportionales, sed adjectis vel detractis iis differentiis à lineis P M & Q N fiunt ordinatæ p m, q n, & adjectis vel detractis ex terminis rationis cujusvis, correspondentibus terminis rationis ipsi æqualis non mutatur prior ratio, ergo ordinatæ p m & q n erunt inter se ut P M ad Q N, & etiam alternando P M : p m = Q N : q n.

Coroll. 3. *Si sumantur in axe puncta C, D, E, F ad distantias æquales & quamminimas, in iisque punctis erigantur ordinatæ, illa ordine constituunt Progressionem Geometricam.* Nam quia ex Hyp. ordinatæ G C & H D, H D & K E sunt quamproximæ & æqualiter distantes, est per Corollarium præcedens G C : H D = H D : K E, eadem ratione est H D : K E = K E : L F, sicque deinceps, unde liquet ordi-

ordinatas GC : HD : KE : LF &c. esse in progressione Geometricâ.

33. Theor. I. *Sumantur in axe Logarithmicæ quatuor puncta, ita ut duo priora æque a se mutuo distent ac duo posteriora, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in proportione Geometricâ.*

Et si sumantur in axe quotlibet puncta æque distantia ordine continuo, ordinatæ iis insistentes erunt in progressione Geometricâ.

Sumantur in axe duo puncta quævis A & E, & alia duo H & K talia ut sit A E = H K, erigantur que in illa puncta ordinatæ A L, E P, H S, K T, dico illas ordinatas fore in proportione Geometricâ.

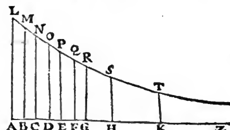
Dividatur tam A E quam H K, in partes infinitè parvas æquales inter se, totidem erunt divisiones in utraque intervallo; erigantur in illa puncta ordinatæ, fient duæ progressiones Geometricæ, in quibus totidem erunt termini, & rationes terminorum successivorum æquales erunt, quia ordinatæ in utrâque progressione æqualiter distant; Ergo ex æquo, primus terminus A L prioris progressionis erit ad E P ultimum terminum ejus progressionis, ut H S primus terminus alterius progressionis ad ejus ultimum terminum K T. Q. E. D.

Et si sumantur in axe plura puncta æquè distantia ordine continuo sibi succedentia, ordinatæ in iis punctis erectæ erunt in progressione geometricâ: Probatur ut in Cor. 3. defin.

Coroll. *E converso, si in lineâ quâvis sumantur plura puncta, æquè distantia ordine continuo, & in iis erigantur perpendiculares quæ sint in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

Sint enim A, D, G &c. ea puncta æquè distantia dividanturque eorum intervalla in partes æquales quamminimas, totidem erunt in quovis intervallo, assumantur mediæ proportionales inter perpendiculares A L & D O, D O & G R, &c. tot quot sunt divisionum puncta, & in singulis punctis erigantur perpendiculares iis mediis proportionalibus ordine sumptis æquales; Denique curva tangat tam perpendiculares datas A L, D O, G R quam hasce medias, dico eam curvam esse Logarithmicam.

Facilè enim liquet ex naturâ progressionum, quod cùm sit A L : D O = D O : G R &c. & totidem mediæ proportionales assumantur inter A L & D O, quot assumantur inter D O & G R, sicque deinceps, formari progressionem continuam constantem ex omnibus illis perpendicularibus tam datis quàm inventis, ideo quamlibet ex illis, ut A L, esse ad sibi proximam B M, ut alia quævis D O, est ad proximam P E, unde 33.



dividendo, est A L ad suam differentiam à proximâ, ut est etiam D O ad suam differentiam à proximâ, ideóque perpendicularium proximarum differentiæ erunt ubique eis perpendicularibus proportionales; Evanescentibus ergo punctorum in axe sumptorum intervallis, & perpendicularibus ad vicinas æquali ubique celeritate latis & æquali tempusculo (ob æqualitatem intervallorum), velocitates quibus crescunt vel decrescunt perpendiculares erunt iis ipsis perpendicularibus proportionales; Ergo (ex definitione Logarithmicæ) ea curva quæ tanget eas perpendiculares erit Logarithmica.

34. Theor. II. *Abscissæ axis Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum in earum extremo insistentium.* Ferantur hinc inde ab origine axis partes æquales quamminimæ, in extremo singularum erigantur ordinatæ, illæ omnes ordinatæ constituent progressionem Geometricam inter cujus terminos occurrit unitas, earum verò abscissæ erunt in progressione Arithmeticâ propter partium in axe sumptarum æqualitatem, & abscissa quæ unitati respondet est o; Jam autem cùm termini progressionis Arithmeticæ inter quos est o ita aptentur terminis progressionis Geometricæ ut o respondeat unitati, & reliqui

liqui termini sibi respondeant, tum termini progressionis Arithmeticæ sunt Logarithmi terminorum correspondentium progressionis Geometricæ; Ergo abscissæ Logarithmicæ, sunt Logarithmi ordinatarum correspondentium.

Corol. 1. *Portio axis quæ intercipitur inter duas Ordinatas est Logarithmus rationis quæ intercedit inter illas Ordinatas.* Quotiens enim duarum quantitatum exprimit rationem quæ inter illas intercedit, & differentia Logarithmorum earum quantitatum, est logarithmus quotientis earum, sed abscissæ sunt Logarithmi ordinatarum, & portio axis quæ intercipitur inter duas ordinatas est differentia abscissarum sive Logarithmorum ad eas ordinatas pertinentium, ergo illa portio est Logarithmus quantitatis quæ exprimit rationem quæ inter Ordinatas intercedit.

Coroll. 2. *Si dentur duarum aut plurium quantitatum Logarithmi, & à puncto dato rectæ alicujus sumantur longitudines eis Logarithmis æquales, & in earum extremo erigantur perpendiculares quantitatibus quarum sumuntur Logarithmi æquales, Logarithmica aliqua per earum perpendicularium extremitates transibit.*

In recta O A N sumatur punctum A in quod erigatur perpendicularis A B unitati æqualis, sitque A M logarithmus quantitatis cui æqualis est perpendicularis M P, sit A a differentia progressionis Arithmeticæ ex quâ desumuntur logarithmi, quæ ideò accuratè continebitur in intervallo A M toties quot sunt termini in progressione Geometrica ex qua desumuntur quantitates quarum habentur Logarithmi, quærantur tot mediæ proportionales inter A B & M P quot sunt divisionum puncta inter A & M, & in illa puncta erigantur perpendiculares illis mediis proportionalibus ordine æquales; fiet progressio Geometrica, quæ est ipsa progressio quantitatum quarum abscissæ lineæ O A N quantitate A a successivè auctæ sunt Logarithmi, siquidem in utrâque progressione occurrunt termini A B & M P eodem intervallo in utraque dissiti: sed si in punctis æquidistantibus lineæ cujusvis erigantur perpendiculares in progressione Geometricâ, Logarithmica aliqua earum vertices tanget (*Cor. Theor.* I.) Ergo si dentur numeri cum suis Logarithmis, concipi semper poterit Logarithmica cujus abscissæ sint illi Logarithmi & cujus ordinatæ sint quantitates quibus respondent.

31. Theor. III. *Axis logarithmicæ est ejus Asymptotus ad quam ab unâ parte accedit propius datâ quâvis quantitate, numquam tamen eam attingit, & à qua ab alterâ parte longius recedit datâ quâvis quantitate.*

Sint

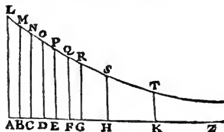
Sint duæ ordinatæ A B, M P quarum una sit alterius dupla vel plusquam dupla, feratur portio axis A M hinc inde secundum axem sine fine, ordinatæ in ea puncta erecta crescent ab unâ parte, & ab alterâ decrescent in ratione duplâ vel plusquam duplâ (*per Cor. Theor. I.*) sed ex Principiis *Archimedeis* quantitas crescens in progressione duplâ vel plusquam duplâ omnem quantitatem datam tandem excedet, & ex Principiis *Euclideis* quantitas quævis decrescens in ratione duplâ vel plusquam duplâ minor fit quâvis quantitate datâ; Ergo Logarithmicâ longius ab axe recedit, aut propiùs ad eum accedit quâvis quantitate datâ, numquam tamen eum attinget, attingat enim eum si fieri potest in quodam puncto X, ferendo distantiam A M secundum axem, fiet tandem ut cadat proximè citra X, putà in Y, tum proximè ultra, ut in Z; in puncto Y nondum attinget axem ex Hypothesi, & aliquo intervallo Y V ab eo distabit, sed quia Y Z = A M debebit esse A B : MP = Y V ad ordinatam in Z, qua ideò dabitur, ac per consequens Logarithmica nondum attinget axem in Z, nedum eum attigerit in X. Q. E. D.

36. Theor. IV. *Subtangens Logarithmicæ est constans.* Capiantur enim ubivis in axe particulæ æquales quamminimæ M m, N n, erectisque ordinatis M P, m p, & NQ, n q, per puncta P & Q concipiantur tangentes P T, Q t axi occurrentes in T, t; ducantur etiam rectæ P r, Q s, ordinatis m p, n q perpendiculares. Evanescentibus ordinatarum distantiis M m, N n, triangulum P p r fit simile triangulo T P M, & Triangulum Q q s simile triangulo t Q N, ideoque est p r : P M = P r (sive M m) : M T, & q s : Q N = N n (sive M m) : N t, sed ob distantias M m, N n æquales est p m : PM = qn : QN & dividendo est p r : PM = qs : QN, quare P r (sive M m) : M T = N n (sive M m) : N t, adeoque M T = N t. Q. E. D.

Cor. *Hinc cùm ordinata sit ad subtangentem constantem ut fluxio ordinatæ ad fluxionem abscissæ, obtinetur Logarithmicæ æquatio fluxionalis.* Abscissa A M dicatur x, ordinata M P y, subtangens M T, s, fluxio M m erit dx, $pr = dy$, cùmque sit $y : s = dy : dx$, est $y\,dx = s\,dy$ æquatio ad Logarithmicam.

37. PROBL. I. *Datâ subtangente & duabus ordinatis Logarithmicæ, invenire portionem axis inter eas ordinatas interceptam.*

1us *Casus.* Minor è duabus ordinatis sit ipsa unitas G R, altera verò ordinata L A dicatur y, &, ad vitandum series minus commodas, fingatur quantitas $z = \frac{y-1}{y+1}$, ita ut sit $yz + z = y - 1$, unde 37.



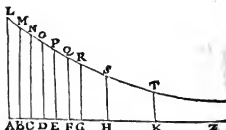
habetur $y = \frac{1+z}{1-z}$; sumptisque fluxionibus, fit $y\,dz + z\,dy + dz = dy$, & invenitur $dy = \frac{y+1}{1-z}\,dz$, sive, inserto valore ipsius y, fit $dy = \frac{\frac{1+z}{1-z}+1}{1-z}\,dz$, reductisque fractionibus $\frac{2}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz = dy$. Cùm ergo æquatio ad Logarithmicam sit (*per Theor. IV.*) $y\,dx = s\,dy$, insertis in hac æquatione valoribus y & dy, illa evadit $\frac{1+z}{1-z}\,dx = \frac{2s}{\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$, ex quâ deducitur $dx = \frac{2s\times\overline{1-z}}{1\times z\times\overline{1-z}\times\overline{1-z}}\,dz$ sive $dx = \frac{2s}{\overline{1+z}\times\overline{1-z}}\,dz = \frac{2s}{1-z^2}\,dz$; reducatur in seriem iste

valor, obtinebitur $dx = 2s \times dz + z^2 dz + z^4 dz + z^6 dz + z^8 dz$ &c. & sumptis fluentibus $x = 2s + 2 + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^9}{9}$ &c. & loco z scripto ejus valore $\frac{y-1}{y+1}$ pro valore portionis G A axis interceptæ inter G R & A L $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^3 + \frac{1}{5} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^5 + \frac{1}{7} \overline{\frac{y-1}{y+1}}^7$ &c.

2us Casus. Quæratur valor portionis axis interceptæ inter ordinatas O D & M B, sit O D $= n$ & M B $= m$ hæcque sit major ordinata; fiat $n : m :: 1 : y$, erit $y = \frac{m}{n}$, quæratur per hujus Problematis casum primum portio axeos intercepta inter ordinatam G R unitati æqualem & ordinatam y sive $\frac{m}{n}$, & erit ea portio æqualis B D sive portioni axeos interceptæ inter ordinatas O D & M B, propter proportionem Geometricam quæ est inter O D, M B, unitatem & ordinatam y, ut patet *ex Theor. I. n°. 33.*

3us Casus. Si ordinata S H sit unitate minor & quæratur portio axeos intercepta inter illam & unitatem G R, dicatur ea ordinata S H $=$ p, fiatque ut p : 1 $=$ 1 : y, erit $y = \frac{1}{p}$ quantitas unitate major; quæratur per primum casum hujusce Problematis valor portionis axeos interceptæ inter G R & ordinatam y, & ex præcedentis casûs demonstratione, liquet eum ipsum fore valorem abscissæ G H, sed quoniam punctum G unitati respondens, censetur axeos origo, portio axis inter G & ordinatam y intercepta positiva est, dum portio axis a puncto G ad ordinatam S H, negativa censeri, & negativo signo affici debet.

4us Casus. Si denique duæ ordinatæ S H, T K sint singulæ unitate minores, quæraturque portio axeos inter ambas interecepta, fiat ut prius S H : T K $=$ 1 : y, & portio axeos intercepta inter G R & ordinatam y erit æqualis illi quæ intercipitur inter S H & T K.

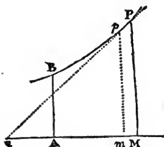


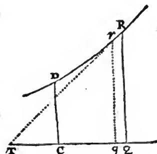
Cor. 1. *Si una ex ordinatis sit unitas portio axis quæsita x erit alterius ordinatæ abscissa, ideoque ejus erit Logarithmus*, positivus quidem si ea ordinata sit unitate major, negativus verò si unitate sit minor.

Si verò duæ ordinatæ ab unitate differant, portio axis intercepta x, *erit rationis inter eas ordinatas existentis Logarithmus*: positivus quidem, si major ordinata numeratorem, fractionis rationem exprimentis, constituat; negativus verò si minor ordinata numeratoris sedem occupare censeatur.

Cor. 2. *Sit ut in primo casu ordinata G R* $= 1$, *ordinata L A* $= y$ *sit* 2; *subtangens Logarithmicæ L R T sit etiam unitas*; *invenitur G A, sive* x, *Logarithmus nempe numeri binarii* $= .6931471$ &c. Nam in valore $x = 2s \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^3 + \frac{1}{5} \times \overline{\frac{y-1}{y+1}}^5$ &c. scripto 1 loco s, & 2 loco y series fit $x = 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{243} + \frac{1}{7} \times \frac{1}{2187}$ &c. quorum terminorum calculus facilis est, & si per Decimales instituatur, invenietur abscissa quæsita x, sive numeri binarii Logarithmus, $= .6931471$ &c.

Similiter si fiat $y = \frac{3}{2}$ ideòque $y - 1 = \frac{1}{2}$





$= \frac{1}{2}$ & $y + 1 = \frac{5}{2}$ fractio $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{5}$ five o. 2 & feries fit $x = 2 \times 0.2 + \frac{0.008}{3} + \frac{0.00032}{5} + \frac{0.0000128}{7} + \frac{0.000000512}{9}$ &c. $= .4054651$ quod additum Logarithmo numeri binarii, habetur Logarithmus numeri ternarii, 1.0986122 &c.

Si fiat $y = \frac{5}{4}$ ideoque fit $y - 1 = \frac{1}{4}$, & $y + 1 = \frac{9}{4}$, eft fractio $\frac{y-1}{y+1} = \frac{1}{9}$ & feries fit $x = 2 \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{729} + \frac{1}{5} + \frac{1}{59049}$ &c. quæ feries citiffimè convergit, eftque $x = .2231437$ &c. cui fi addatur duplum Logarithmi numeri binarii, habetur Logarithmus quinarii; 1.6094378, & addito iterum Logarithmo binarii, habetur Logarithmus denarii, 2.3025849.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECTIO I.

58. Theor. V. *Sint duæ diverfæ Logarithmicæ, in utrâque fumantur ordinatæ æquales, abfciffæ illis ordinatis correfpondentes in utrâque Logarithmicâ erunt ut earum Logarithmicarum fubtangentes, adeoque in conftanti ratione.*

Sint duæ Logarithmicæ P B, R D prioris fubtangens fit M S $= s$, fubtangens alterius fit Q T $= t$; Ordinatæ P M, R Q in utrâque fumptæ fint æquales dicanturque y; fint ordinatæ B A & D C æquales unitati; abfciffa A M dicatur x, & C Q, z; dico fore $s : t = x : z$. 38.

Id enim patet ex formâ feriei quæ exhibet abfciffæ valorem; Nam, fi in Logarithmicâ P B quæratur valor x pro ordinatâ y, habebitur, per cafum primum Problematis primi, $x = 2s \times \frac{y-z}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5}\frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5}$ &c. Et fi in Logarithmicâ R D quæratur valor abfciffæ z pro ordinatâ y habebitur, per eundem cafum Probl. I. $z = 2t \times \frac{y-1}{y+1} + \frac{1}{3}\frac{\overline{y-1}^3}{\overline{y+1}^3} + \frac{1}{5}\frac{\overline{y-1}^5}{\overline{y+1}^5}$ &c. Cùm ergo duæ feries quæ exprimunt valorem abfciffarum x & z iifdem terminis conftent, ductis in priori ferie per $2s$, in alterâ ferie per $2t$; liquet effe x ad z ut $2s$ ad $2t$, five $s : t = x : z$. Q. E. D.

Cor. 1. Hinc liquet quod (manente unitate) logarithmicæ quarum eædem erunt Subtangentes, in omnibus erunt æquales, quippe fi fumantur in iis æquales ordinatæ, abfciffæ etiam æquales erunt.

Cor. 2. Logarithmicæ verò diverfæ fpeciei dicentur, quarum fubtangentes erunt diverfæ; & Logarithmi diverfæ fpeciei dicentur, ubi eifdem quantitatibus Logarithmi diverfi refpondebunt, unde etiam Logarithmicæ ad quas pertinent diverfæ illæ Logarithmorum fpecies, habebunt diverfas fubtangentes (*per hoc Theor.*) ideoque erunt diverfæ fpeciei.

Cor. 2. *Datis Logarithmis cujufvis fpeciei, Logarithmi alius fpeciei eifdem numeris ref-*

respondentes inveniri possunt, si dentur subtangentes utriusque speciei, Hinc si dentur Logarithmi quorum subtangens est unitas (qui Hyperbolici dicuntur), sitque data subtangens alius speciei .4342944 multiplicentur Logarithmi dati per hunc numerum, habebunturque eorumdem numerorum Logarithmi in hac alterâ specie, ut liquet ex hoc Theor. Ideoque in posterum per hanc expressionem L. x, intelligemus Logarithmum Hyperbolicum quantitatis x, qui si multiplicetur per quantitatem quamlibet ut a, a L. x exprimet Logarithmum x ex eâ specie depromptum quæ habet a pro subtangente, est enim $1 : a =$ L. x ad eum Logarithmum qui ergo erit a L. x.

39. Probl. II. *Datâ ordinatâ Logarithmicæ & ejus abscissâ, invenire ejus subtangentem, dummodo alterius cujuslibet Logarithmicæ subtangens sit data.*

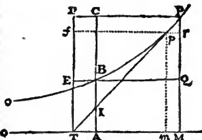
Data sit subtangens Logarithmicæ P B, Logarithmicæ verò R D data sit abscissa C Q & ordinata Q R, quæritur hujus Logarithmicæ subtangens: Quæratur primùm abscissa quæ in Logarithmica P B responderet ordinatæ æquali Q R, per Probl. I. sitque ea A M, fiatque ut A M ad C Q ita subtangens data ad quæsitam.

Exempl. In tabulis Logarithmorum, Logarithmus numeri 2. est .3010300. si ergo concipiatur Logarithmica cujus abscissæ sint Logarithmis tabularum æquales, & cujus ordinatæ sint æquales numeris eis Logarithmis correspondentibus, quæraturque ejus Logarithmicæ subtangens; invenitur in altera Logarithmica cujus subtangens est unitas abscissa respondens ordinatæ quæ sit unitatis dupla (per Cor. 2. Prob. I.) quæ est .6931472. fiatque ut .6931472. ad .3010300. Ita unitas ad subtangentem Logarithmicæ tabularum quæ invenietur. 4342944.

Coroll. Hinc dato Logarithmo alicujus numeri desumpto ex Logarithmica cujus subtangens data est, habebitur ejus numeri Logarithmus in tabulis, dicendo ut subtangens data ad .4342944. ita Logarithmus datus ad ejusdem numeri Logarithmum in Tabulis.

40. Probl. III. *Sit quantitas variabilis, cujus Logarithmus etiam variabilis est, ex ejus quantitatis variabilis fluxione, fluxionem ejus Logarithmi determinare.* Concipiatur Logarithmica ad quam pertinet species Logarithmi quæ assumitur, sit a ejus subtangens, sitque y variabilis proposita, quæ consideretur ut ejus Logarithmicæ ordinata, sitque x ejusdem Logarithmicæ abscissa ei ordinatæ y respondens, erit per naturam Logarithmicæ (n. 36) $y\,dx = a\,dy$ & $dx = \frac{a\,dy}{y}$, sed x est Logarithmus ordinatæ y, ergo $d\,x$ est ejus fluxio, ergo $d\,L.\,y = \frac{a\,dy}{y}$ hoc est, fluxio Logarithmi est æqualis fluxioni variabilis propositæ divisæ per ipsam variabilem, & ductæ in constantem quæ sit subtangens Logarithmicæ ad quam pertinet species Logarithmi assumpti.

Et è converso, si habeatur hæc fluxio $\frac{a\,dy}{y}$, ejus fluens est Logarithmus ipsius quantitatis y ex eâ Logarithmicâ desumptus, cujus subtangens est a.



41. Theor. VI. *Spatium Logarithmicum A B P M duabus ordinatis A B, P M, arcu B P & abscissâ A M comprehensum, æquale est rectangulo subtangentis & differentiæ ordinatarum.*

Ductâ enim per punctum P tangente P T, compleatur rectangulum T F P M, agatur per B recta E Q, parallela T M, secans T F in E & M P in Q; per m ordinata m p alteri M P infinitè propinqua; & per p recta f r parallela T M, occurrens T F in f & M P in r; His positis (ob triangula P r p, P M T similia) erit P r : p r = P M : M T, seu P F, ideoque rectangulum M m p r æquale erit rectangulo P F f r. Quarè si area logarithmica A B P M divisa intelligatur in rectangula innumera ut

M p,

Mp; rectangulum EFPQ divisum erit in totidem rectangula ut Fr correspondentibus Mp, æqualia, & proinde area logarithmica ABPM æqualis est rectangulo EFPQ. Q. E. D.

Hinc *spatium Logarithmicum ABPM est ut ordinatarum AB, PM differentia PQ*, ob datam subtangentem TM (36.)

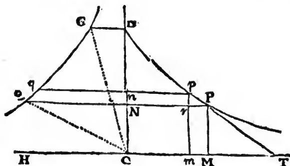
Trilineum verò logarithmicum BPQ = PQ × MT — AM × BA; & producta AB ut rectæ FP occurrat in C; erit trilineum logarithmicum BPC = AC × CP — CB × MT.

42. Coroll. 1. *Hinc spatium logarithmicum infinitè protensum OOPM, quâ parte logarithmica ad asymptotum MO continuò accedit, duplum est trianguli PTM.* Nam ob distantiam infinitam MO evanescit ordinata AB, fitque spatium OoPM, æquale rectangulo TFPM, sub ordinatâ PM & subtangente MT contento.

43. Cor. 2. *Tangens PT (producta si opus est) secet ordinatam AB in I; & spatium logarithmicum BPC erit ut BI inter logarithmicam & tangentem intercepta.* Nam ob triangulorum TFP, ICP, similitudinem, est TF ad FP, (seu AC ad MT) ut CI ad CP, & ideò AC × CP = MT × CI. Quarè (41) trilineum BPC = AC × CP — MT × CB = MT × CI — MT × CB = MT × BI. Est igitur, ob datam MT, trilineum BPC ut BI.

44. 44. Theor. VII. *Asymptotis orthogonalibus CH, CD descripta sit hyperbola Qq G, & per punctum D in asymptoto CD datum, logarithmica DpP axem habens CH productum; per punctum D agatur ad hyperbolam ordinata DG, & per punctum alterum quodvis N ordinata NQ quæ producta logarithmicæ occurrat in P; erit area hyperbolica NQGD, ad dignitatem hyperbolæ seu ad rectangulum CD × DG, in ratione rectæ NP ad subtangentem logarithmicæ.*

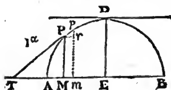
Agatur enim altera qp ipsi QP infinitè propinqua, ex punctis p, P demittantur ad axem CT perpendiculum pm secans QP in r & perpendiculum PM; PT tangat logarithmicam in P; erit ob triangula prP, PMT similia, pr (seu Nn): Pr = PM (seu CN): MT, & (ex naturâ hyperbolæ *per theor. 4. de hyp. lib. 1.*) NQ : DG = CD : CN; ideóque per compositionem rationum & ex æquo NQ × Nn : Pr × DG = CD : MT; Quarè ob datas CD & MT, summa omnium rectangulorum NQ × Nn, in quæ dividi potest area NQGD, hoc est, hæc area ipsa est ad rectangulum sub datâ GD, & summâ omnium Pr, seu totâ rectâ NP, ut CD ad MT, proindèque NQGD × MT = NP × GD × CD, & hinc NQGD : GD × CD = NP : MT. Q. E. D.

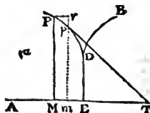


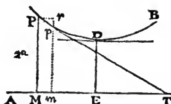
45. Coroll. *Hinc* (ob datas MT, GD, CD) *area hyperbolica NQGD & proindè sector CGQ ipsi æqualis* (377. lib. 1.) *est ut recta NP productio ordinatæ QN, inter asymptotum hyperbolæ CD & logarithmicam intercepta.*

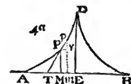
46. *Scholium.* Cùm Ill. Marchio *Polenus* in Epistolâ ad *Hermannum* Patavii an. 1729. editâ,

editâ, ità facilem & expeditam logarithmicæ descriptionem organicam, pro ingenii sui sagacitate invenerit, ut curva illa sectionibus conicis haud difficilius construatur, cùmque logarithmica per lineas rectas id præstet quod hyperbola per sectores vel quadrilatera sua, in problematum constructionibus quæ per areas hyperbolicas absolvuntur, loco hyperbolæ non malè usurparetur logarithmica, quamvis si problema ad merum calculum reducatur, æquè benè possint usurpari spatia hyperbolica, quàm abscissæ logarithmicæ. Quomodo autem constructiones quæ per spatia hyperbolica fiunt, ad logarithmicam transferantur, pluribus exemplis ostendemus deinceps.









De Maximis & Minimis.

47. Theor. *Si quantitas variabilis, (quam exponat recta P M curvæ P D B ordinata) ad certum usque terminum D continuò crescat & posteà decrescat, vel contra decrescat primum & deindè crescat. Actaque sit altera ordinata p m priori P M infinitè propinqua, & per punctum P recta P r abscissæ A P parallela secans p m in r, ratio incrementi vel decrementi evanescentis p r ordinatæ P M, ad incrementum evanescens M m abscissæ A M in puncto D ubi ordinata M P omnium maxima vel minima evadit, infinita est vel nulla.*

Per punctum P ducatur P T tangens curvam in P, & abscissæ occurrens in T, & propter similitudinem triangulorum p r P P M T, erit p r ad P r, seu M m ut P M ad M T. Sed si coincidente puncto P cum D, tangens P T evadat abscissæ A E parallela & proindè M P fiat maxima vel minima ordinata E D ut in figurâ 1a. & 2a. punctum T in infinitum abit, & ideò ratio P M ad M T seu ratio p r ad M m nulla est. Contrà verò si coincidente P cum D, tangens P T cum ordinatâ maximâ vel minima D E conveniat, ut in figurâ 3. & 4. evanescit subtangens M T & ratio P M ad M T, sive p r ad M m infinita evadit.

48. *Coroll.* 1. Ut ex datâ æquatione inter abscissam A M & ordinatam M P, inveniatur valor abscissæ A E cui maxima vel minima applicata E D ordinatur, sumenda est æquationis fluxio, & ratio fluxionis ordinatæ ad fluxionem abscissæ, seu ratio p r ad M m, eaque vel infinito vel nihilo æquanda est, aut quod idem est, factâ M m constante, fluxio ordinatæ vel infinito vel nihilo æqualis supponenda.

49. *Coroll.* 2. Si quantitas variabilis cujus maximum vel minimum quæritur non sit ordinata curvæ, potest illa supponi æqualis ordinatæ curvæ alicujus in datam quantitatem ductæ, uti si proposita es-

PROPOSITIO I. THEOREMA I.

Corporis, cui resistitur in ratione velocitatis, motus ex resistentiâ amissus, est ut spatium movendo confectum.

NAM cùm motus singulis temporis particulis æqualibus amissus sit ut velocitas, hoc ([a]) est, ut itineris confecti particula, erit, componendo, motus toto tempore amissus, ut iter totum. *Q. E. D.*

Corol. Quare si corpus, gravitate omni destitutum, in ([b]) spatiis liberis solâ vi insitâ moveatur; ac detur tum motus totus sub initio, tum etiam motus reliquus post spatium aliquod confectum: ([c]) dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest. Erit enim spatium illud ad spatium jam descriptum, ut motus totus sub initio ad motûs illius partem amissam.

LEMMA I.

Quantitates differentiis suis proportionales sunt continuè proportionales.

Sit A ad A — B ut B ad B — C & C ad C—D, &c. & convertendo fiet A ad B ut B ad C & C ad D, &c. *Q. E. D.*

PRO-

ta esset quantitas variabilis $a x^2 - x^3$ in quâ a data est, x indeterminata, poneretur $a x^2 - x^3 = b b y$, quæ est æquatio ad curvam cujus abscissa est x, & ordinata y, & hinc, sumptis fluxionibus, foret $2 a x d x - 3 x^2 d x = b b d y$, & $2 a x - 3 x^2 = \frac{b b d y}{d x} = 0$ adeòque $2 a x - 3 x x = 0$ & $x = \frac{2}{3} a$. Si itaque loco x substituatur $\frac{2}{3} a$ in quantitate propositâ, obtinebitur maximum ejus $\frac{4}{9} a^3 - \frac{8}{27} a^3 = \frac{4}{27} a^3$. Idem inventum fuisset brevius, si nullâ factâ suppositione, fluxio variabilis propositæ videlicet $2 a x d x - 3 x^2 d x$, nihilo fuisset æquata.

(a) * *Hoc est, ut itineris confecti particula* (12) ob datum temporis momentum (ex hyp.)

(b) * *In spatiis liberis*, id est, in quibus nullum aliud est obstaculum præter medii resistentiam velocitati proportionalem. 49.

(c) * *Dabitur spatium totum quod corpus infinito tempore describere potest*, hoc est, usque ad motus exstinctionem. (Ostendetur autem infra, in nota f, infinitum tempus requiri ut motus omnis extinguatur, quando resistitur motui in ratione velocitatis). Cùm ergo motus ad exstinctionem usque amissus, sit ipse motus totus; & motus amissi sint ut spatia movendo confecta (*per Theor.*) erit motus totus ad motûs partem amissam post datum spatium descriptum, ut spatium ad exstinctionem usque motûs descriptum ad illud datum spatium. Unde liquet, spatium, quod corpus ad motûs usque exstinctionem describit, finitum esse, cùm datam habeat rationem ad spatium finitum.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. II. THEOR. I.

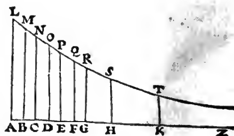
PROPOSITIO II. THEOREMA II.

Si corpori resistitur in ratione velocitatis, & idem solâ vi insitâ per medium similare moveatur, sumantur autem tempora æqualia: velocitates in principiis singulorum temporum sunt in progressione geometricâ, & spatia singulis temporibus descripta sunt ut velocitates.

Cas. 1. Dividatur tempus in particulas æquales; & si ipsis particularum initiis agat vis resistentiæ impulsu unico, quæ sit ut velocitas: (d) erit decrementum velocitatis singulis temporis particulis ut eadem velocitas. Sunt ergo velocitates differentiis suis proportionales, & propterea (*per lem.* 1. *lib.* 11.) continuè proportionales. (e) Proinde si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, erunt velocitates ipsis temporum initiis, ut termini in progressione continuâ, qui per saltum capiuntur omisso passim æquali termino-

(d) * *Erit decrementum velocitatis.* (15) ut resistentia ob datum temporis momentum, ideoque (*per hyp.*) ut velocitas.

(e) 50. *Proinde si ex æquali* &c. Linea recta A Z in particulas æquales A B, B C, C D &c. divisa, exponat tempus, & perpendicula A L, B M, C N &c. exponant velocitates ipsis singulorum temporum A B, B C, C D &c. initiis; erunt (ex Dem.) velocitates illæ in continuâ progressione geometricâ decrescente. Proindè si ex æquali particularum numero componantur tempora quælibet æqualia, ut A E, E H, H K &c. erunt velocitates A L, E P, H S &c., ipsis temporum initiis ut termini qui è progressione geometricâ per saltum capiuntur, omisso passim æquali terminorum intermediorum B M, C N &c. & F Q, G R &c. numero. Componuntur autem horum terminorum A L, E P, H S &c., rationes ex æqualibus rationibus terminorum intermediorum æqualiter repetitis; nimirum ratio A L ad E P, componitur ex rationibus A L ad B M, B M ad C N &c., quæ tum magnitudine, tum numero æquales sunt rationibus E P ad F Q, F Q ad G R &c. ex quibus componitur ratio E P ad S H, & ita porrò. Quarè ratio A L ad E P æqualis est rationi E P ad H S, & hæc æqualis rationi H S ad K T. Manifestum autem est (33) curvam L M N S T, ad quam terminantur perpendicula omnia A L, B M, C N &c., esse Logarithmicam.

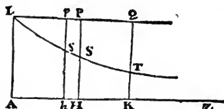


51.

norum intermediorum numero. Componuntur autem horum terminorum rationes ex rationibus inter se iisdem terminorum intermediorum æqualiter repetitis, & propterea eæ quoque rationes compositæ inter se eædem sunt. Igitur velocitates, his terminis proportionales, sunt in progressione geometricâ. Minuantur jam æquales illæ temporum particulæ; & augeatur earum numerus in infinitum, eò ut resistentiæ impulsus reddatur continuus; & velocitates in principiis æqualium temporum, semper continuè proportionales, erunt in hoc etiam casu continuè proportionales. *Q. E. D.*

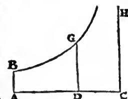
Cas. 2. Et divisim velocitatum differentiæ, hoc est, earum partes singulis temporibus amissæ, sunt ut totæ: spatia autem singulis temporibus descripta sunt ut velocitatum partes amissæ (*per prop.* 1. *lib.* 11.) & propterea etiam ut totæ. *Q. E. D.*

Corol.



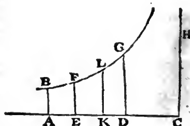
51. Si asymptoto A Z descripta sit Logarithmica quævis L S T, ad asymptotum versus Z accedens, & ordinata A L exponat velocitatem corporis initio motûs, abscissæque A H, A K, exponant tempora; erunt (50) ordinatæ H S, K T, ut velocitates residuæ elapsis temporibus A H, A K, & ideò ductâ per punctum L rectâ L Q, asymptoto A Z parallelâ, & ordinatas productas H S, K T secante in P, Q, erunt P S, Q T ut velocitates amissæ, atque etiam ut spatia descripta, temporibus A H, A K, vel L P, L Q. 50.
Ductâ ordinatâ, h s, alteri H S, infinitè propinquâ, spatium velocitate uniformi A L, tempusculo h H descriptum in vacuo, erit ad spatium eodem tempore cum velocitate H S, confectum in medio resistente, ut rectangulum H P × H h, ad rectangulum S H × H h, seu aream H S s h (12) & ideò si totum tempus A H in particulas innumeras ut h H divisum sit, erit spatium cum velocitate A L, in vacuo descriptum toto tempore A H, ad spatium eodem tempore percursum in medio resistente ut rectangulum A P ad aream Logarithmicam A L S H; sed area A L S H, æqualis est rectangulo subtangentis Logarithmicæ in P S, (39) & ideò si assumpta sit A L subtangenti æqualis, est area A L S H, æqualis rectangulo A L × P S; Quarè in hâc hypothesi, erit spatium prius ad posterius ut L P, ad P S.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. II. THEOR. II.



Corol. Hinc si asymptotis rectangulis *A C, C H* describatur hyperbola *B G*, sintque *A B*, *D G* ad asymptoton *A C* perpendiculares, & exponatur tum corporis velocitas tum resistentia medii, ipso motus initio, per lineam quamvis datam *A C*, elapso autem tempore aliquo per lineam indefinitam *DC*: exponi potest tempus per aream *ABGD*, & spatium eo tempore descriptum per lineam *A D*. (f) Nam si area illa per motum puncti *D* augeatur uniformiter ad modum temporis, decrescet recta *D C* in ratione geometricâ ad modum velocitatis, & (g) partes rectæ *A C* æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione.

PRO-



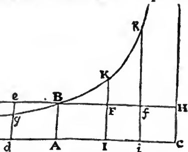
(f) * *Nam si area illa per motum puncti* D sive ordinatæ D G *augeatur uniformiter ad modum temporis*, exhibeatque proindè tempus, *decrescet recta* D C, *in ratione geometricâ* (380. lib. 1.) *ad modum velocitatis*, & ideò velocitatem poterit exponere (*per Cas.* 1. *Dem.*) & quia recta A C exponit velocitatem ipso motûs initio, & D C, velocitatem residuam elapso tempore A B G D erit A D ut velocitas amissa, atque ideò ut spatium descriptum (*per prop.* 1. *hujus*). Quia verò coincidentibus punctis D & C, area ABGD infinita evadit, manifestum est tempore infinito finitum spatium A C describi.

(g) * *Et partes rectæ A C æqualibus temporibus descriptæ decrescent in eâdem ratione &c.* Nam si area A B G D ductis ordinatis F E, L K in partes æquales A B F E, E F L K, K L G D divisa sit, erunt lineæ CA, C E, C K, C D in progressione geometricâ decrescente (380. *lib.* 1.) hoc est CA : CE = CE : CK = CK : CD, & dividendo A E : E K = E K : K D = C A : C E. Decrescunt ergo partes rectæ A C in ratione velocitatis. Exponent igitur rectæ A E, E K, K D &c., spatia temporibus A B F E, E F L K, K L G D, descripta, & tota recta A D spatium toto tempore A B G D descriptum.

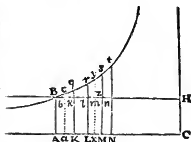
PROPOSITIO III. PROBLEMA I.

Corporis, cui, dum in medio similari rectà ascendit vel descendit, resistitur in ratione velocitatis, quodque ab uniformi gravitate urgetur, definire motum.

Corpore ascendente, exponatur gravitas per datum quodvis rectangulum *BACH*, & resistentia medii initio ascensus per rectangulum *BADE* sumptum ad contrarias partes rectæ *AB*. Asymptotis rectangulis *AC*, *CH*, per punctum *B* describatur hyperbola secans perpendicula *DE*, *de* in *G*, *g*, & corpus ascendendo tempore *DGgd* describet spatium *EGge*, tempore *DGBA* spatium ascensus totius *EGB*; tempore *ABKI* spatium descensus *BFK*, atque tempore *IKki* spatium descensus *KFfk*; & velocitates corporis (resistentiæ medii proportionales) in horum temporum periodis erunt *ABED*, *ABed*, nulla, *ABFI*, *ABfi* respectivè; atque maxima velocitas, quam corpus descendendo potest acquirere, erit *BACH*.



(h) Resolvatur enim rectangulum *BACH* in rectangula innumera *Ak*, *Kl*, *Lm*, *Mn*, &c. quæ sint ut incrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta; & erunt nihil, *Ak*, *Al*, *Am*, *An*, &c. ut velocitates totæ, atque ideo (per hypothesin) ut resistentiæ medii principio singulorum temporum



(h) * *Resolvatur enim &c.* Demonstratio quæ sequitur est pro corporis descensu.

porum æqualium. (i) Fiat AC ad AK vel $ABHC$ ad $ABkK$ ut vis gravitatis ad resistentiam in principio temporis secundi, deque vi gravitatis subducantur resistentiæ, & manebunt $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $MmHC$, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum urgetur, atque ideo (*per motûs legem* II.) ut incrementa velocitatum, id est, ut rectangula Ak, Kl, Lm, Mn, &c. & (k) propterea (*per lem.* I. *lib.* II.) in progressione geometricâ. Quare si rectæ Kk, Ll, Mm, Nn, &c. productæ occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. (l) æquales, ideoque tum temporibus tum viribus gravitatis semper æqualibus analogæ. (m) Est autem area $ABqK$ (*per corol.* 3. *lem.* VII. & *lem.* VIII. *lib.* I.) ad aream Bkq ut Kq ad $\frac{1}{2}kq$ seu AC ad $\frac{1}{2}AK$, hoc est, ut vis gravitatis ad resistentiam in medio temporis primi.

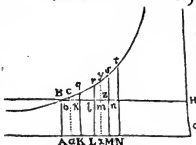
Et

(i) * *Fiat A C ad A K &c.* Cùm enim sit A K k B, proportionalis resistentiæ principio temporis secundi, si fiat A K k B ad A B H C seu A K ad A C, ut resistentia illa ad gravitatem, rectangulum A H exponet vim gravitatis datam; & simili modo, cum sit A l, ad A k, ut resistentia initio temporis tertii ad resistentiam initio temporis secundi, erit, ex æquo perturbare A l ad A H, seu A L ad A C, ut resistentia in principio temporis tertii ad gravitatem, & ità deinceps. Quoniam verò gravitas motum corporis cadentis accelerat quem resistentia retardat, de vi gravitatis auferenda est vis resistentiæ ut habeatur vis absoluta quâ corpus deorsum urgetur.

(k) * *Et propterea.* Rectangula A B H C, K k H C, L l H C &c. differentiis suis A k, K l &c., proportionalia, erunt in progressione geometricâ (*per Lem.* I. *lib.* 2.)

(l) * *Æquales.* (380) lib. I.)

(m) *Est autem area A B q K* (*per cor.* 3. *Lem. VII. & lem. VIII. lib.* I.) *ad aream B k q ut K q ad* $\frac{1}{2}$ *k q seu ut A C ad* $\frac{1}{2}$ *A K.* Etenim per ea Lemmata has areas pro rectilineis sumi posse constat, erigatur in medio partis A K perpendicularis a c ad Hyperbolam usque, facile constabit ex Elementis trapezium A B q K fore ad Triangulum B k q ut tota ea perpendicularis a c (pro quâ K q sumi poterit) ad portionem ejus b c intrà Triangulum comprehensam, quæ erit (*ex const. & 2. 6. Elem.*) $= \frac{1}{2}$ k q, est verò ex natura Hyperboles ea perpendicularis a c ad A B, ut A C ad C a sive A C $-$ $\frac{1}{2}$ A K & dividendo, est ea perpendicularis a c ad a c $-$ a b sive b c quæ est $\frac{1}{2}$ k q ut A C ad A C $-$ A C $+$ $\frac{1}{2}$ A K sive $\frac{1}{2}$ A K; Ergo area A B q K est ad aream B q k ut A C ad $\frac{1}{2}$ A K, sive ut Rectangulum A B C H ad Rect. $\frac{1}{2}$ A B k K, seu *ut vis gravitatis* quam exponit Rectang. A H ad *resistentiam in medio temporis primi* quam exponit rectang. A k. Cùm enim sit A K ut velocitas toto primo tempore acquisita, erit $\frac{1}{2}$ A K ut velocitas in medio temporis primi acquisita; resistentiæ autem sunt velocitatibus analogæ.



Et (n) ſimili argumento areæ *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſunt ad areas *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. ut vires gravitatis ad reſiſtentias in medio temporis ſecundi, tertii, quarti, &c. Proindè cùm areæ æquales *BAKq*, *qKLr*, *rLMs*, *sMNt*, &c. ſint viribus gravitatis analogæ, erunt areæ *Bkq*, *qklr*, *rlms*, *smnt*, &c. reſiſtentiis in mediis ſingulorum temporum, hoc eſt (per hypotheſin) velocitatibus, atque (o) ideo deſcriptis ſpatiis analogæ. Sumantur analogarum ſummæ, & erunt areæ *Bkq*, *Blr*, *Bms*, *Bnt*, &c. ſpatiis totis deſcriptis analogæ; necnon areæ *ABqK*, *ABrL*, *ABsM*, *ABtN*, &c. temporibus. Corpus igitur inter deſcendendum, tempore quovis *ABrL*, deſcribit ſpatium *Blr*, & tempore *LrtN* ſpatium *rlnt*. *Q.E.D.*

Et (p) ſimilis eſt demonſtratio motûs expoſiti in aſcenſu, *Q.E.D.*

Co-

(n) *Et ſimili argumento areæ.* Sumptis enim iſtis areis pro Trapeziis rectilineis: ducantur perpendiculares x z y in medio partium A K, K L, L M, M N ad Hyperbolam uſque, & (*ex elementis*) facile conſtabit quod area tota ſinguli trapezii (v. gr. r L M s) eſt ad ejus areæ portionem ſupra B H poſitam (nempe r l m s) ut linea tota x y per medium trapezii ducta ad ejus partem z y ſupra B H, ſed ex naturâ Hyperbolæ eſt ea perpendicularis x y ad A B ſive x z, ut A C ad abſciſſam C x illi perpendiculari reſpondentem (quæ eſt C L — ½ L M), & dividendo, eſt ea perpendicularis x y ad ejus partem z y ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & eam perpendicularem (hoc eſt, in exemplo aſſumpto, ut A C ad A L + ½ L M). Ergo area tota ſinguli trapezii ad ejus areæ portionem ſupra B H, ut A C ad A x portionem abſciſſæ inter A & medium partis cujuſvis aſſumptæ, ſive (aſſumpta communi altitudine A B) ut Rectangulum A H, ad Rectangulum ſub A B & lineâ inter A & medium partis aſſumptæ comprehenſa; ſed illud eſt ut vis gravitatis, hoc ut velocitas ac proinde ut reſiſtentia in medio temporis cui reſpondet pars aſſumpta, ergo alternando, area ſinguli trapezii eſt ad vim gravitatis ut portio trapezii ſupra B H ad reſiſtentiam ſive ad velocitatem in medio temporis cui reſpondet trapezium, ſed areæ totæ trapeziorum ſunt ubique æquales, & vis gravitatis ſemper eadem, conſtans ergo eſt eorum ratio; ergo, portiones trapeziorum ſuper B H, ut r l m s ſunt ſicut reſiſtentiæ ſive ut velocitates, adeóque ut ſpatia ſingulis tempuſculis quibus reſpondent deſcripta.

(o) * *Atque ideò deſcriptis ſpatiis analogæ.* Spatia enim ſingulis temporibus deſcripta ſunt ut velocitates per Prop. II. hujuſce libri.

(p) *Et ſimilis eſt demonſtratio.* Reſolvatur enim rectangulum D B in rectangula innumera D k, K l, L m, M n &c. quæ ſint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta, & erunt, nihil D k, D l, D m, D n &c., ut velo-

Corol. 1. Igitur velocitas maxima, quam corpus cadendo poteſt acquirere, eſt ad velocitatem dato quovis tempore acquiſitam, ut vis data gravitatis, quâ corpus illud perpetuò urgetur, ad vim reſiſtentiæ, quâ (q) in fine temporis illius impeditur.

Co-

citates totæ amiſſæ in principio ſingulorum temporum æqualium. Quia igitur totum rectangulum D B, exponit (*per hyp.*) velocitatem corporis & reſiſtentiam medii velocitati proportionalem initio aſcenſus, rectangula A E, A k, A l, A m, A n &c., exponent velocitates reſiduas, reſiſtentiaſque medii initio ſingulorum temporum æqualium. Fiat A C, ad A k, ſive Rectang. A H ad Rectang. A k, ut vis gravitatis ad reſiſtentiam principio temporis ſecundi, & vi gravitatis addatur reſiſtentia (quod gravitas & reſiſtentia corporis aſcendentis motum retardent) & erunt D E H C, K k H C, L l H C, M m H C &c., ut vires abſolutæ quibus corpus in principio ſingulorum temporum retardatur, atque ideò (*per mot. leg.* 2.) vel *per not.* 18.) ut decrementa velocitatum, id eſt, ut rectangula D k, K l, L m, M n &c., & propterea (*per Lem.* 1. *Lib.* 2.) in progreſſione geometricâ. Quarè ſi rectæ K k, L l, M m, N n &c., occurrant hyperbolæ in q, r, s, t, &c. erunt areæ D G q k, k q r L, L r s M, M s t N &c. æquales, ideóque tum temporibus, tum viribus gravitatis ſemper æqualibus analogæ.

Erigatur in medio partis D K perpendicularis uſque ad E B, erit area D G q K ad aream G E k q ut pars ejus perpendicularis ad Hyperbolam ordinata ad ejus partem reliquam uſque ad E B, ſed (*per Theor.* 4. *de Hyperbola*, ea ordinata ad Hyperbolam eſt ad A B ſive ad totam perpendicularem, ut A C ad ejus ordinatæ abſciſſam, ideoque dividendo, eſt ea ordinata ad perpendicularis] partem reliquam uſque ad lineam E B, ſive eſt area D G q K ad aream G E k q ut A C ad portionem abſciſſæ inter A & perpendicularem, & aſſumptâ communi altitudine A B, ut Rectangulum A H ad Rectangulum ſub A B & portione abſciſſæ inter A & perpendicularem, ideoque area D G q K ad aream G E k q ut vis gravitatis ad reſiſtentiam ſive velocitatem reſiduam in medio temporis primi, cùmque vis gravitatis ſit ubique eadem & areæ D G q K, q K L r, ubique æquales, areæ G E k q, k q r l, &c. erunt ſemper, ut reſiſtentiæ in ſingulis temporibus ſive ut velocitates, ideoque ut ſpatia ſingulis tempuſculis deſcripta, ac per conſequens areæ totæ G E n t, erunt ut ſpatia toto tempore G D N t deſcripta, dum areæ A B N n erunt ut velocitates in fine eorum temporum reſiduæ.

(q) * *In fine temporis illius impeditur.* Eſt enim velocitas dato tempore, A B r L acquiſita, ad velocitatem alio quovis tempore A B t N acquiſitam, ut rectangulum A l ad re-

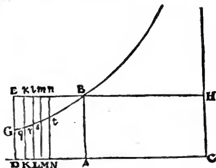
Corol. 2. Tempore autem aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis illius maximæ ac velocitatis in ascensu, atque etiam earundem differentia in descensu (r) decrescit in progressione geometricâ.

Corol. 3. (f) Sed & differentiæ spatiorum, quæ in æqualibus

rectangulum A n, sivè ut linea data A L, ad lineam A N, (ex dem.), & ideò velocitas corporis cadentis cum areâ A B t N, seu cum tempore continuò crescit. Sed coincidentibus puncto N cum puncto C & ordinatâ N t cum asymptoto C H, area A B t N infinita evadit, hoc est, tempus fit infinitum & velocitas maxima; Quarè velocitas maxima quæ etiam *terminalis* dicitur, est ad velocitatem dato quovis tempore A B r L, acquisitam ut A C ad A L, seu ut rectangulum A H, ad rectangulum A I, hoc est, (*ex dem.*) ut vis gravitatis ad vim resistentiæ in fine temporis A B r L.

(r) * *Decrescit in progressione geometricâ.* In ascensu corporis temporibus D G q k, D G r l, D G s M &c. in arithmeticâ progressione crescentibus, abscissæ C D, C K, C L, &c. in progressione geometricâ decrescunt (380. *lib.* 1.) sed singulæ abscissæ illæ sunt (*ex dem.*) ut summa velocitatis maximæ quam exponit linea C A, & velocitatis residuæ quam exponit linea A K vel A L, vel A M &c., in fine temporis D G q k, vel D G r L, vel D G s M &c. Quarè tempore aucto in progressione arithmeticâ, summa velocitatis maximæ ac velocitatis in ascensu residuæ decrescit in progressione geometricâ. Simili modo in descensu corporis patet quod crescentibus temporibus (vid. fig. notæ super.) A B q k, A B r L, ABsM &c., in progressione arithmeticâ, abscissæ C A, C K, C L, C M &c., decrescunt in progressione geometricâ (380. *lib.* 1.), sed abscissæ illæ sunt ut differentiæ velocitatis maximæ quam exhibet linea A C & velocitatis acquisitæ quam exponit linea A K, vel A L, vel A M &c., crescente igitur tempore in progressione arithmeticâ, differentia velocitatis maximæ, & velocitatis dato quovis tempore in descensu acquisitæ, decrescit in progressione geometricâ. Hinc si summa illa in ascensu & differentia in descensu numeris exprimantur, erunt tempora ut eorum numerorum Logarithmi.

(f) * *Sed & differentiæ spatiorum.* Nam si in ascensu corporis capiantur tempora D G q K, K q r L, L r s M, M s t N &c. æqualia, erit spatium primo tempore descriptum ut G E k q = D K × D E — D G q K; spatium tempore secundo descriptum ut q k l r = K L × D E — K q r L (sive quia K q r L = D G q K) = KL×DE — D G q K, & itâ de cæteris. Quarè differentia spatiorum primo & secundo tempore descriptorum est ut D K × D E — K L × D E, id est, ob datam D E, ut D K — K L; & simili argumento differentia spatiorum secundi & tertii temporis est ut



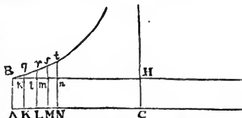
K L — L M; differentia spatiorum tertii & quarti temporis ut L M — M N. Erunt igitur differentiæ spatiorum quæ in æqualibus temporum differentiis describuntur ut differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., sed (*ex dem.*) termini D K, K L, L M, M N &c., decrescunt ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Ergò differentiæ D K — K L, K L — L M, L M — M N &c., decrescunt ut D K, K L, L M, M N &c., seu ut termini progressionis geometricæ D C, K C, L C, M C &c. Eadem est demonstratio pro descensu.

temporum differentiis describuntur, decrescunt in eâdem progressione geometricâ.

Corol. 4. Spatium verò à corpore descriptum differentia est duorum spatiorum quorum alterum est ut tempus sumptum ab initio descensûs, & (t) alterum ut velocitas, quæ etiam ipso (u) descensûs initio æquantur inter se. PRO-

(t) * *Alterum ut velocitas.* Nam spatium tempore quovis A B t N, in descensu descriptum, est ut area B t n, est autem area B t n = A B t N — A B n N, & est A B n N ut velocitas tempore A B t N acquisita.

(u) * *Descensûs initio æquantur.* Descensûs initio est area nascens A B q K æqualis rectangulo A B K k.



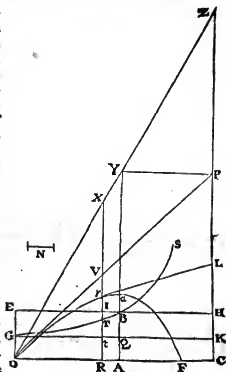
52. *Scholium.* Ex demonstratis non solùm corporis ascendentis aut è quiete descendentis motus determinatur, sed etiam motus ejusdem datâ cum velocitate deorsum projecti facilè inveniri potest. Nam velocitas projectionis vel æqualis est velocitati maximæ, quam in figuris superioribus exponit linea A C, sive rectangulum A H, aut velocitate maximâ minor est, aut eâ major. Si 1ᵐᵒ. motus corporis deorsum verticaliter projecti æquabilis est, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam. Si 2ᵒ. in lineâ A C (*vid. fig. prop.* 3.) capiatur A L, ad A C, ut velocitas projectionis data ad maximam, sive ut resistentia ad gravitatem, & tempore quovis L r t N, corpus describet, spatium l r t n, & in fine illius temporis habebit velocitatem L l n N, eodem modo ac si è quiete cadendo tempore A B r L, acquisivisset datam projectionis velocitatem A B l L, & deindè in motu perseverasset.

53. Verùm si velocitas projectionis major sit velocitate maximâ quam corpus cadendo acquirere potest, mutanda erit NEWTONI constructio. Cæteris enim manentibus ut in constructione pro corporum descensu, producantur rectæ A C, & B H, ad a & b, ut sit rectangulum A B b a ad rectangulum C H b a, ut resistentia tota initio motus ad vim gravitatis: velocitas projectionis exponi poterit per rectangulum A B b a, cùm resistentia sit ipsi semper proportionalis, & corpus descendendo tempore quovis A B t N, describet spatium A B b a × A N + C a × B t n, & velocitatem habebit N n b a, & tempore infinito describet spatium infinitum, velocitatemque habebit æqualem terminali sive maximæ velocitati quam corpus è quiete cadendo acquirere potest. Resolvatur enim rectangulum A H in rectangula innumera A k, K l, L m, M n, &c. quæ sint ut decrementa velocitatum æqualibus totidem temporibus facta. (cùm enim resistentia gravitatem superet, velocitas decrescit) & erunt, nihil A k, A l, A m, A n, &c. ut velocitates amissæ, & ideò rectangula a B, a k, a l, a m, a n, &c., ut velocitates residuæ resistentiis proportionales, principio singulorum temporum æqualium. Quoniam verò gravitas motum accelerat quem resistentia retardat, de vi resistentiæ subducatur gravitas C H b a, & manebunt rectangula A B H C, K k H C, L l H C, M m H C, &c. ut vires absolutæ quibus corpus in principio singulorum temporum æqualium retardatur, atque ideò ut decrementa velocitatum, id est, ut rectangula A k, K l, L m, M n, & propterea per Lem. 1. Lib. 2. in progressione geometricâ. Quarè (380. lib. 1.) erunt areæ A B q K, K q r L, L r s M, M s t N, &c. æquales, ideóque temporibus semper æqualibus analogæ. Elapso igitur tempore quovis A B t N, corporis velocitas residua erit ut rectangulum N n b a, sive ut recta N a, sed spatia sunt ut velocitas & tempus conjunctim, ergo

PROPOSITIO IV. PROBLEMA II.

Posito quòd vis gravitatis in medio aliquo similari uniformis sit, ac tendat perpendiculariter ad planum horizontis; definire motum projectilis in eodem, resistentiam velocitatis proportionalem patientis.

Et loco quovis *D* egrediatur projectile secundum lineam quamvis rectam *DP*, & per longitudinem *DP* exponatur ejusdem velocitas sub initio motus. A puncto *P* ad lineam horizontalem *DC* (x) demittatur perpendiculum *PC*, & secetur *DC* in *A*, ut (y) sit *DA* ad *AC* ut resistentia medii, ex motu in altitudinem sub initio orta, ad vim gravitatis; vel (z) (quod perinde est) ut sit rectangulum sub *DA* & *DP* ad rectangulum sub *AC* & *CP* ut resistentia tota sub initio motus ad vim gravitatis. Asymptotis *DC*, *CP* describatur hyperbola quævis *GTBS* secans



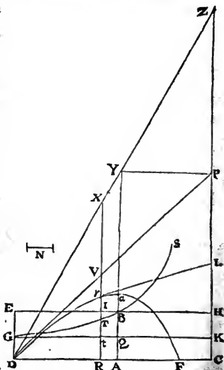
ergo spatia singulis tempusculis descripta sunt ut ea velocitas N a ducta in tempus M s t N, id est ut N C × t N × M N + C a × t N × M N = A B H C × M N + C a × M s t N, (ob N C × t N = A B × C A, per theor. 4. de Hyp.) Quarè (componendo) spatium totum tempore A B t N descriptum, erit ut A B H C × A N + C a × A B t N = A B b a × A N + C a × B t n, ob A B t N = A B × A N + B t n. Q. E. D.

(x) * *Demittatur perpendiculum* P C, & quoniam D P exponit velocitatem projectionis, CP exponet velocitatem verticalem, & D C velocitatem horizontalem, *per leg. motûs cor.* 1. *&* 2.

(y) * *Ut sit* D *A ad AC ut resistentia &c.*, aut, quod idem est (*per cor.* 1. *prop.* 111.) ut sit D A ad A C ut velocitas verticalis C P ad velocitatem maximam seu terminalem.

(z) * *Vel (quod perinde est) ut sit rectangulum &c.* Nam cùm sit D P ad C P 53

perpendicula DG, AB in G & B; & compleatur parallelogrammum $DGKC$ cujus latus GK secet AB in Q. Capiatur linea N in ratione ad QB quâ DC sit ad CP; & ad rectæ DC punctum quodvis R erecto perpendiculo RT, quod hyperbolæ in T, & rectis EH, GK, DP in I, t & V occurrat; in eo cape Vr æqualem $\frac{tGT}{N}$, vel (a) quod perinde est, cape Rr æqualem $\frac{GTIE}{N}$; & projectile tempore $DRTG$ perveniet ad punctum r, describens curvam lineam $DraF$, quam punctum r semper tangit, perveniens autem ad maximam altitudinem a in perpendiculo AB, & postea semper appropinquans ad asymptoton PC. Estque velocitas ejus in puncto quovis r ut curvæ tangens rL. *Q. E. I.*



Est

ut velocitas tota projectionis ad velocitatem verticalem, ac proinde ex lege resistentiæ ut resistentia tota sub initio ad resistentiam ex motu in altitudinem, & cùm sit D A ad A C ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis (*per hypothesim*), erit per compositionem rationum & ex æquo $DA \times DP$ ad $AC \times CP$ ut resistentia tota ex motu projectionis ad vim gravitatis.

(a) * *Vel quod perinde est, cape R r æqualem &c.* Cùm enim sit (per hyp.) $N : QB = DC : CP$, & $DC : CP = DR : RV$, ob triangula similia DRV, DCP; erit $N : QB = DR : RV$, & ideo $RV = \frac{DR \times QB}{N}$. Sed rectangulum $GEIt = Gt \times GE = DR \times QB = GTIE + tGT$, & ideo $\frac{GTIE}{N} = \frac{DR \times QB - tGT}{N} = RV - \frac{tGT}{N}$. Quare si capiatur $Vr = \frac{tGT}{N}$, erit $\frac{GTIE}{N} = RV - Vr = Rr$.

Est enim N ad QB ut DC ad CP seu DR ad RV, ideoque RV æqualis $\frac{DR \times QB}{N}$, & Rr (id est $RV - Vr$ seu $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) (b) æqualis $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Exponatur jam tempus per aream $RDGT$, & (*per legum corol.* 2.) distinguatur motus corporis in duos, unum ascensus, alterum ad latus. Et cùm resistentia sit ut motus, (c) distinguetur etiam hæc in partes duas partibus motus proportionales & contrarias: ideoque longitudo, à motu ad latus descripta, erit (*per prop.* 11. hujus) ut (d) linea DR, (e) altitudo verò (*per prop.* 111. hujus) ut area $DR \times AB - RDGT$, (f) æqualis est rectangulo $DR \times AQ$, ideoque linea illa Rr (seu $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) tunc est ad DR ut $AB - AQ$ seu QB ad N, id est, ut CP ad DC; atque ideo ut motus in altitudinem ad motum in longitudinem sub initio. Cùm igitur Rr semper sit ut altitudo, ac DR semper ut longitudo, atque Rr ad DR sub initio ut altitudo ad longitudinem: necesse est ut Rr semper sit ad DR ut altitudo ad longitudinem, & prop-

(b) * *Æqualis* $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$ &c. Est enim $\frac{DR \times AB - RDGT}{N} = \frac{DR \times RI - RDGT}{N} = \frac{GTIE}{N} = RV - Vr$.

(c) * *Distinguetur etiam hæc &c.* In eâ, quam tractamus, resistentiæ hypothesi motus componere ac dividere licet eodem modo quo componuntur & dividuntur in vacuo; quod in aliis resistentiæ hypothesibus fieri non potest. Cùm enim resistentia velocitati proportionalis est, spatia velocitatibus separatis & conjunctis eodem temporis momento describenda vi resistentiæ minuuntur in eâdem quam habent inter se ratione.

(d) * *Ut linea* DR. Exponitur enim corporis velocitas horizontalis sub motus initio per lineam DC. Unde tempus exponi poterit per aream hyperbolicam $DRGT$, & spatium hoc tempore descriptum per lineam DR, *per cor. prop.* 11. hujus.

(e) * *Altitudo verò &c.* Cùm enim sit DA ad AC ut resistentia verticalis ad gravitatem (*per hyp.*); area $GTIE$, seu ei æqualis $DR \times AB - RDGT$, erit ut altitudo motu verticali descripta (*per prop.* 111. *hujus*); & quia) *per construct.*) est $Rr = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$, ideoque ob datum N, Rr ut $DR \times AB - RDGT$, erit altitudo ut Rr.

(f) * *Æqualis est rectangulo &c.* Nam coincidente puncto t cum G, evanescit Tt respectu Rt seu AQ, fitque area evanescens $RDGT$ æqualis $RDGt$ seu $DR \times AQ$.

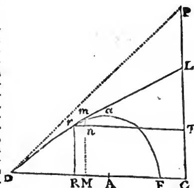
53.

propterea ut corpus moveatur in linea $DraF$, quam punctum r (g) perpetuò tangit. *Q. E. D.* *Co-*

(g) 54. *Perpetuo tangit.* Quoniam autem D A est ad A C ut resistentia ex motu verticali sub initio orta ad vim gravitatis, tempus totius ascensûs corporis erit D A B G (*per Prop.* III. hujus), quo etiam tempore percurrit corpus longitudinem D A, & ideo ad maximam suam altitudinem a perveniet ubi erit in perpendiculo A B a, & postea semper appropinquat ad asymptoton P C (*per* Cor. *Prop.* II). Per punctum quodvis trajectoriæ r agatur r T horizontali D C parallela & verticali C P occurrens in T, verticalis M m ipsi R r infinitè propinqua secet r T in n & tangentem r L seu curvam in m: & quoniam motus corporis in loco r per arcum r m dividi potest in motum horizontalem r n & verticalem n m, erit velocitas horizontalis ad verticalem ut r n ad n m, & ad obliquam secundùm tangentem curvæ ut r n ad r m. Sed ob similitudinem triangulorum r n m, r T L, est r n : m n = r T vel R C : T L, & r n : r m = R C : r L. Quare cùm R C sit ut velocitas horizontalis corpori in loco r residua ex velocitate D C quam sub initio motus habebat in loco D (*per Cor. Prop.* II.); erit T L ut velocitas verticalis corpori residua ex velocitate initiali C P, & r L ut velocitas obliqua in arcu r m ex duabus r T, & T L composita. Est itaque velocitas & proinde resistentia corporis in puncto quovis trajectoriæ r ut curvæ tangens r L.

55. Hinc per datum trajectoriæ punctum r duci potest tangens r L. Nam velocitas verticalis L T in loco r est ad velocitatem verticalem C P in loco D, ut rectangulum R B ad rectangulum D B (*vide figuram textûs*) sive ut R A ad D A (*per Prop.* III.); ideoque $LT = \frac{CP \times RA}{DA}$.

56. Ex superiori constructione facilè deducitur æquatio ad trajectoriam D r a F. Positis enim $DP = b$, $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $AB = h$, $Rr = y$, & $DR = x$, erit (*per theor.* 4um. *de hyperb. lib.* 1.) $DC(e) : AC(g) = AB(h) : GD = \frac{gh}{e}$, & RC



$(e-x) : AC(g) = AB(h) : RT = \frac{gh}{e-x}$; ideoque $QB = AB - GD = \frac{eh-gh}{e}$, & areæ hyperbolicæ R D G T elementum nascens $RT \times dx = \frac{ghdx}{e-x}$, ac proinde area $RDGT = gh.S.\frac{dx}{e-x}$. Præterea (per constr.) est $CP(f) : DC(e) = QB\frac{(eh-gh)}{e} : N = \frac{eh-gh}{f}$, & $Rr = y = \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Est & $DR \times AB = hx$. Quare erit $y = \frac{fx}{e-g} - \frac{fg}{e-g} \times S.\frac{dx}{e-x}$. Est etiam (*per constr.*) D A seu $e-g$ ad A C seu g ut resistentia medii ex motu in altitudinem ad vim gravitatis, & ideo per Cor. I. Prop. III. ut *velocitas verticalis*, quam exponit recta C P seu f, ad *velocitatem terminalem*; & ideo si velocitas terminalis exponatur per lineam a, habebitur $a = \frac{fg}{e-g}$. Unde fit $y = \frac{ax}{g} - a.S.\frac{dx}{e-x}$ & sumptis fluxionibus $dy = \frac{adx}{g} - \frac{adx}{e-x}$. Si ponatur R C sive $e - x = z$; erit

Corol. 1. Est igitur Rr æqualis $\frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: ideoque si producatur RT ad X ut (h) fit RX æqualis $\frac{DR \times AB}{N}$; id est, si compleatur parallelogrammum $ACPY$, jungatur DY secans CP in Z, & producatur RT donec occurrat DY in X; erit Xr æqualis $\frac{RDGT}{N}$, & propterea tempori proportionalis.

erit $-dx = dz$, & $-\frac{adx}{e-x} = \frac{adz}{z}$, ideoque $-a.\,S.\frac{dx}{e-x} = a.\,S.\frac{dz}{z} = a.\,L.\,z = a.\,L.\,e-x$ (40). Quare erit $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x + Q$ *const.* Et quia evanescente y, evanescit quoque x, invenitur constans $Q = -a.\,L.\,e$, & hinc $y = \frac{ax}{g} + a.\,L.\,e-x - a.\,L.\,e = \frac{ax}{g} - a.\,L.\,\frac{e}{e-x}$. Est enim $L.\,e - L.\,e-x = L.\,\frac{e}{e-x}$, & signis mutatis $L.\,e-x - L.\,e = -L.\,\frac{e}{e-x}$.

57. Ex hac æquatione alia deducitur inter D V & V r. Si enim dicantur D V $= v$ & V r $= z$, erit ob triangula D C P, D R V similia, D P (b) : D V (v) = D C (e) : D R $(x) = \frac{ev}{b}$, & ideo $e - x = \frac{eb - ev}{b}$ & $\frac{e}{e-x} = \frac{b}{b-v}$; similiter erit D C (e) : C P (f) = D R $\left(\frac{ev}{b}\right)$: V R $= \frac{fv}{b}$, ideoque y = R r = V R − V r $= \frac{fv}{b} - z$. Quare habebitur $\frac{fv}{b} - z = \frac{aev}{bg} - a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$, & $z = \frac{fgv - aev}{bg} + a.\,L.\,\frac{b}{b-v}$. Sed (ex demonstr.) $a = \frac{fg}{e-g}$, atque ideo $ae - ag = fg$, & $fg - ae = -ag$; quare erit etiam $z = a.\,L.\,\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. 57.

(h) * *Ut fit R X æqualis* $\frac{DR \times AB}{N}$ vel quod idem est, *si compleatur Parallelogrammum A C P Y* erit A Y = C P, *si jungatur D Y secans C P in Z, & producatur R T donec occurrat D Y in X* valor R X qui hoc modo reperitur idem erit cum valore $\frac{DR \times AB}{N}$ ipsi assignato (*vide fig. text. pag.* 28) erit enim D A : A Y (C P) = D R : R X $= \frac{CP \times DR}{DA}$; jam verò $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, quippe per nat. Hyper. est A B : D G (sive Q A) = D C : A C & convertendo A B : A B − A Q (sive Q B) = D C : D A $= \frac{DC \times QB}{AB}$, ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB \times CP}{DC \times QB}$, sed $\frac{CP}{DC \times QB} = \frac{1}{N}$ ex construct. ergo $\frac{CP}{DA} = \frac{AB}{N}$, & $\frac{CP \times DR}{DA}$ qui est valor R X repertus per constructionem, idem est ac valor $\frac{AB \times DR}{N}$ ipsi assignatus per Hypothesim. Quoniam igitur R X $= \frac{DR \times AB}{N}$, & X r = R X − R r $= \frac{DR \times AB}{N} - \frac{DR \times AB}{N} + \frac{RDGT}{N}$; erit X r $= \frac{RDGT}{N}$, &

Corol. 2. Unde si capiantur innumeræ CR, vel, quod perinde est, innumeræ ZX in progressione geometricâ; erunt totidem Xr in (i) progressione arithmeticâ. Et hinc curva $DraF$ (k) per tabulam logarithmorum facile delineatur.

Corol. 3. Si vertice D, diametro DG deorsum productâ, & latere recto quod sit ad $2DP$ ut resistentia tota ipso motus initio ad vim gravitatis, parabola construatur: velocitas quacum corpus exire debet de loco D secundum rectam DP, ut in medio uniformi resistente describat curvam $DraF$, ea ipsa erit quâcum exire debet de eodem loco D, secundum eandem rectam DP, ut in spatio non resisten-

propterea, ob datam N, X r est ut area R D G T, ideoque ut tempus quo corpus ex loco D pervenit in locum r.

(i) * *In progressione arithmeticâ.* Nam (380. lib. 1.) temporibus seu areis R D G T in progressione arithmeticâ crescentibus, abscissæ R C in progressione geometricâ decrescunt, & vice versâ. Quare verticalibus X r, quæ sunt ut areæ R D G T, in progressione arithmeticâ crescentibus, correspondentes abscissæ R D decrescent in progressione geometricâ, & contra. Sed ob triangulorum D R X, D C Z similitudinem, est D C ad D Z ut D R ad D X, & divisim ut R C ad Z X: quare ob datas D C & D Z, est Z X ad R C in datâ ratione, & ideo Z X crescit vel decrescit in eâdem ratione cum R C.

(k) 58. *Per tabulam Logarithmorum facilè delineatur.* Dicantur enim, ut suprà n. 56. $DC = e$, $CP = f$, $AC = g$, $a = \frac{fg}{e-g}$, $DR = x$, $Rr = y$; & erit (56) $y = \frac{ax}{g} - aL\frac{e}{e-x}$. Ob triangula D A Y, Y P Z similia, est D A seu $e-g$ ad A Y vel C P seu f, ut Y P vel A C seu g ad P Z, ideoque $PZ = \frac{fg}{e-g} = a$. Triangula similia DRX, YPZ dant etiam Y P seu g ad P Z seu a, ut D R seu x ad R X, & propterea $RX = \frac{ax}{g}$. Unde cùm sit $RC = e - x$, æquatio $y = \frac{ax}{g} - aL.\frac{e}{e-x}$ fiet $Rr = RX - PZ \times L.\frac{DC}{RC}$. Verùm cùm $PZ.\ L.\frac{DC}{RC}$ sit Logarithmus rationis D C ad R C in Logarithmica cujus subtangens est a sive P Z, dicendo ut subtangens tabularum ad P Z, ita $L.\frac{DC}{RC}$ è tabulis desumptus ad ejusdem quantitatis Logarithmum in Logarithmicâ cujus subtangens est P Z. Invenietur itaque $PZ \times L.\frac{DC}{RC}$ ope

sistente describat parabolam. Nam (l) latus rectum parabolæ hujus,

ope tabulæ vulgaris Logarithmorum, & inde obtinebitur R r ordinata ad trajectoriam D r a F, & sic punctum quodlibet r in illa determinabitur.

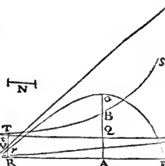
59. Ex his simplicissima deducitur trajectoriæ D r a F per Logarithmicam constructio. Iisdem enim positis quæ in corollario 1° hujus præscripta sunt, asymptoto C Z & subtangente P Z describatur per punctum D Logarithmica D K k G secans R X in K. Capiatur X r = R K, seu R r = X K, & punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam si ex puncto K ducatur ad C Z perpendiculum K E, erit C E seu R K Logarithmus rationis D C ad K E vel R C (34), ideoque erit (58) R r = R X — R K = X K, & hinc R K = R X — R r = X r. Q. E. D.

60. Hæc constructio hoc etiam commodi habet, quod statim inveniantur altitudo maxima A a & horizontalis amplitudo D F. Est enim A a = Y k; & si ex puncto G intersectionis Logarithmicæ cum lineâ D Z demittatur ad D C perpendiculum G F, erit D F amplitudo Jactûs: nam coincidente X cum G fit X K seu R r = o, & ideo coincidit punctum r cum R in horizontali D C. Pariter punctum r, quo trajectoria D r a F rectam quamlibet D c ex puncto D ad C Z ductam secat, invenitur, si capiatur C H æqualis c Z, jungatur D H Logarithmicam secans in K, & ex puncto K demittatur ad D C perpendiculum K R, quod lineam D c secabit in puncto quæsito r; erit enim R K : C H seu Z c = D r : D c = X r : Z c, ideoque X r = R K.

61. Quoniam velocitas projectionis est ad velocitatem terminalem, quæ data est, ut D P ad P Z (58); si manet velocitas projectionis & linea D P, manebit quoque Logarithmicæ subtangens P Z; & ideo una eademque Logarithmicæ species describendæ trajectoriæ D r a F sufficiet, utcumque mutetur projectionis angulus P D C.

(l) 62. *Latus rectum parabolæ hujus &c.* Est enim V r spatium infinitè parvum quod corpus vi gravitatis descendendo describit in medio resistente, quodque eodem tempusculo dato describeret in medio non resistente (e). Sed corpus in medio non resistente projectum vi gravitatis describeret arcum parabolæ D r, cujus tangens D P, diameter G D E, abscissa D M = V r; ordinata M r æqualis & parallela D V (40. *lib.* 1.), & (*per theor.* 1. *de parabola lib.* 1.) rectangulum sub latere recto & abscissâ D M seu V r æquatur quadrato ordinatæ M r seu D V. Quare latus rectum parabolæ hujus ipso motus initio est $\frac{DV^2}{Vr}$. 62.

hujus, ipso motus initio, est $\frac{DV\, quad.}{Vr}$; & Vr (m) est $\frac{tGT}{N}$ seu $\frac{DR \times Tt}{2N}$. Recta autem quæ, si duceretur, hyperbolam GTS tangeret in G, (n) parallela est ipsi DK, ideoque Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$. Et propterea Vr est $\frac{DRq \times CK \times CP}{2\, DCq \times QB}$, id est (ob proportionales DR & DC, DV & DP) $\frac{DVq \times CK \times CP}{2\, DP\, q \times QB}$ & latus rectum $\frac{DV\, quad.}{Vr}$ prodit $\frac{2DPq \times QB}{CK \times CP}$, id (o) est (ob proportionales QB & CK, DA & AC) $\frac{2\, DPq \times DA}{AC \times CP}$, ideoque ad $2\, DP$, ut $DP \times DA$ ad $CP \times AC$; (p) hoc est, ut resistentia ad gravitatem. *Q.E.D.*



Corol. 4. Unde si corpus de loco quovis D, datâ cum velocitate, secundum rectam quamvis positione datam DP projiciatur; & resistentia medii ipso motûs initio detur, inveniri potest curva $D\,r\,a\,F$, quam corpus idem describet. Nam ex datâ velocitate (q) datur latus rectum parabolæ, ut notum est.

(m) * *Vr est* $\frac{tGT}{N}$ (*per constr.*) *seu* $\frac{DR \times Tt}{2\, N}$; evanescente enim D R seu G t, triangulum t G T fit $\frac{1}{2}$ Gt×Tt=$\frac{1}{2}$ D R × Tt, & hinc $\frac{tGT}{N} = \frac{DR \times Tt}{2\, N}$.

(n) * *Parallela est ipsi D K*, ob K C = D G, & subtangentem hyperbolæ æqualem abscissæ D C (*per theor.* 1. *de hyp. lib.* 1.). Cùm autem evanescit G T t, fit T t ad t G seu D R ut ordinata G D seu C K ad subtangentem, sive ad D C, & ideo $Tt = \frac{CK \times DR}{DC}$. Et N erat $\frac{QB \times DC}{CP}$ (*per constr.*). Quare si loco N & T t, hi valores substituantur in quantitate $\frac{DR \times Tt}{2\, N}$ = V r, invenietur $Vr = \frac{DR \times {}^2 \times CK \times CP}{2\, DC^2 \times QB}$

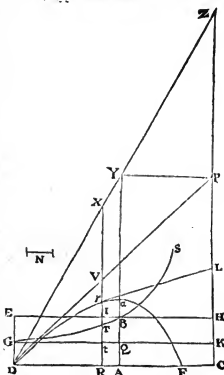
(o) * *Id est, ob proportionales Q B & C K, D A & A C &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) A B est ad G D (sive A Q vel C K) ut D C ad A C, & divisim Q B est ad C K ut D A ad A C, id est $\frac{QB}{CK} = \frac{DA}{AC}$.

(p) * *Hoc est, ut resistentia ad gravitatem*, per construct. Probl. II.

(q) * *Datur latus rectum parabolæ &c.* Datâ velocitate secundum directionem tangentis D P, datur tum spatium finitum in medio non resistente tempore dato æquabiliter descriptum, tum ex effectu cognito gravitatis in tempore dato, habetur

Et sumendo $2\,DP$ ad latus illud rectum, ut est vis gravitatis ad vim resistentiæ, datur DP. Dein secando DC in A, ut sit $CP \times AC$ ad $DP \times DA$ in eâdem illâ ratione gravitatis ad resistentiam, dabitur punctum A. (r) Et inde datur curva $DraF$.

Corol. 5. Et contra, si datur curva $DraF$, dabitur & velocitas corporis & resistentia medii in locis singulis r. (ſ) Nam ex datâ ratione $CP \times AC$ ad $DP \times DA$, datur tum resistentia medii sub initio motus, tum latus rectum parabolæ: (t) & inde datur etiam velocitas sub initio motus. Deinde ex longitudine tangentis rL, datur & huic proportionalis velocitas, & velocitati proportionalis resistentia in loco quovis r.



Corol. 6. Cùm autem longitudo $2\,DP$ sit ad latus rectum parabolæ ut gravitas ad resistentiam in D; & ex auctâ velocitate augeatur resistentia

tur spatium verticale finitum V r eodem tempore vi gravitatis descriptum, id est, dantur ordinata & abscissa parabolæ, quibus datis datur illius latus rectum (per theor. 1. de parab.)

(r) * *Et inde datur curva* D r a F, non solum constructione per hyperbolam, sed etiam constructione illâ quæ per Logarithmicam absolvitur (59.) Nam inventâ D P, sumenda est Logarithmicæ subtangens P Z ad D P in ratione gravitatis ad resistentiam sub initio motûs; & ideò Logarithmicæ subtangens P Z erit etiam ad D P ut 2 D P ad latus rectum parabolæ. 62.

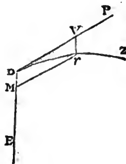
(ſ) * *Nam ex datâ ratione* C P × A C ad D P × D A, id est (per constr.) ratione gravitatis ad resistentiam totam sub motus initio, dabitur resistentia, ob datam gravitatem (*per hyp.*); & quia C P × A C est ad D P × D A ut 2 D P ad latus rectum parabolæ (*per cor.* 3.), dabitur illud latus rectum.

(t) * 63. *Et inde datur etiam velocitas sub initio motus.* Nam dato latere recto

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

in eâdem ratione, (u) at latus rectum parabolæ augeatur in ratione illâ duplicatâ: (x) patet longitudinem 2 *D P* augeri in ratione illâ simplici, ideoque velocitati semper proportionalem esse, neque ex angulo *CDP* mutato augeri vel minui, nisi mutetur quoque velocitas.

Corol. 7. Unde liquet methodus determinandi curvam *D r a F* ex phænomenis quamproximè, & inde colligendi resistentiam & velocitatem quâcum corpus projicitur. Projiciantur corpora duo similia & æqualia eâdem cum velocitate, de loco *D*, secundum angulos diversos *CD P*, *CDp*, & cognoscantur loca *F*, *f*, ubi incidunt in horizontale planum *D C*. Tum, assumptâ quâcunque longitudine pro *D P* vel *Dp*, fingatur quod resistentia in *D* sit ad gravitatem in ratione quâlibet, & exponatur

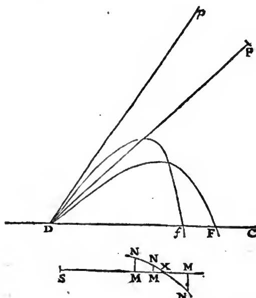


parabolæ D r Z, quam grave in medio non resistente describit, & datâ positione tangentis D P cum diametro D E, parabola describi potest; datur autem in singulis locis velocitas corporis gravis parabolam datam describentis: Sit enim abscissa D M verticali V r æqualis & parallela, & ordinata M r etiam æqualis & parallela tangenti D V; datur tum velocitas quam corpus grave è puncto V cadendo per altitudinem datam V r habet in r, tum tempus quo altitudinem illam describit, & hinc datur tempus idem quo motu uniformi describit spatium datum D V (40. *lib.* 1.), ideoque datur velocitas uniformis per tangentem D P, quæ est ipsa velocitas projectionis in D.

(u) * *At latus rectum parabolæ augeatur.* Nam cùm velocitas secundùm tangentem D V uniformis supponatur (40. *lib.* 1.); Si, dato tempore quo describitur D V, velocitas illa crescat, crescet D V in eadem ratione, manente spatio verticali V r hoc eodem tempore dato descripto; sed latus rectum parabolæ D r Z est $\frac{DV^2}{Vr}$ (*per cor.* 3.) & quantitas $\frac{DV^2}{Vr}$ manente V r, crescit ut D V². Quare latus rectum parabolæ D r Z augetur in ratione duplicatâ velocitatis.

(x) * *Patet longitudinem* 2 D P *&c.* Gravitas dicatur G, resistentia initio motûs *R*, latus rectum parabolæ, ut suprà, $\frac{DV^2}{Vr}$; & erit 2 D P : $\frac{DV^2}{Vr}$ = G : *R*, ideoque 2 D P = $\frac{G \times DV^2}{R \times Vr}$, hoc est, datis V r & G, 2 D P est ut $\frac{DV^2}{R}$, & quia *R* est ut velocitas, seu ut D V, erit etiam 2 D P ut D V, sive ut velocitas (*per notam superiorem*).

tur ratio illa per longitudinem quamvis SM. (y) Deinde per computationem, ex longitudine illâ assumptâ DP, inveniantur

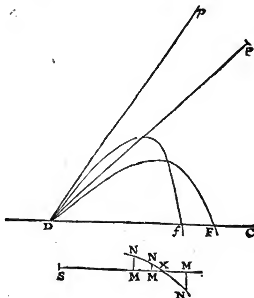


longitudines DF, Df, ac de ratione $\frac{Ff}{DF}$ per calculum inventâ, (z) auferatur ratio eadem per experimentum inventa, & expo-

(y) 64. *Deinde per computationem.* Datâ enim D P longitudine & positione, dantur C P & D C, & datâ ratione resistentiæ in D ad gravitatem dantur D A & A C per constructionem problematis istius: His autem datis, curva D r a F (vide figuras superiores) describi potest, & hinc invenitur amplitudo horizontalis D F constructione per hyperbolam vel per logarithmicam (59). Si autem rem voluerimus calculo tractare, uti poterimus æquatione $y = \frac{ax}{g} - a.L.\frac{e}{e-x}$ (63) in qua ut sit $x = DF$, ponenda est $y = 0$, & æquatio fiet $\frac{ax}{g} = L.\frac{e}{e-x}$; ex quâ per regressum serierum, vel per alias approximationes invenietur x per g & e, seu D F per A C & D C. 64.

(z) 65. *Auferatur ratio eadem per experimentum inventa*; & si nihil est residui, rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem; si quid residui fuerit, *exponatur differentia per M N.* Nam si rectè assumpta fuit ratio resistentiæ ad gravitatem, curva D r a F per constructionem vel per computationem descripta similis est trajectoriæ quam corpus in medio resisten-

exponatur differentia per perpendiculum *M N*. Idem fac iterum ac tertiò, assumendo semper novam resistentiæ ad gravitatem rationem *S M*, & colligendo novam differentiam *M N*. Ducantur autem differentiæ affirmativæ ad unam partem rectæ



S M, & negativæ ad alteram; & per puncta *N*, *N*, *N* agatur curva regularis *N N N* secans rectam *S M M M* in *X*, & ([a]) erit *S X* vera ratio resistentiæ ad gravitatem, quam inve-

te reverâ describit, & hinc homologarum in illis curvis linearum debet esse ratio data. Determinatur enim trajectoria vera ex velocitate & angulo projectionis æquali P D C vel p D C, atque ex ratione resistentiæ ad gravitatem datam; & curva per constructionem delineata determinatur per longitudinem assumptam D P vel D p, quæ velocitatem datam semper potest exhibere, per angulum P D C vel p D C, & per rationem linearum D A, A C, seu rationem resistentiæ ad gravitatem, si recte assumpta fuit: quare differentia tota inter veram trajectoriam & curvam hoc modo per constructionem descriptam est in magnitudine linearum homologarum, quarum ratio est eadem in utrâque curvâ. Curvæ igitur illæ similes sunt.

(a) 66. *Et erit* S X *vera ratio resistentiæ ad gravitatem.* Nam ubi M N seu differentia rationum $\frac{F f}{D F}$, quæ per computatio-

invenire oportuit. Ex (b) hac ratione colligenda eſt longitudo DF per calculum; & longitudo quæ ſit ad aſſumptam longitudinem DP, ut longitudo DF per experimentum cognita ad longitudinem DF modò inventam, erit vera longitudo DP. Quâ inventâ, habetur tum curva linea $DraF$ quam corpus deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis.

Scholium.

Cæterùm, reſiſtentiam corporum eſſe in ratione velocitatis; (†) hypotheſis eſt magis mathematica quàm naturalis. In mediis, quæ rigore omni vacant, reſiſtentiæ corporum ſunt in dupli-

tionem & per experimentum inventæ ſunt, nulla eſt, ratio reſiſtentiæ ad gravitatem rectè aſſumpta fuit (65). Quare cùm S M aſſumptam illam rationem exponat, & evaneſcat M N ubi S M fit S X, patet in hoc caſu rationem reſiſtentiæ ad gravitatem rectè exponi per lineam S X. Itaque ſi innumeræ abſciſſæ S M aſſumptæ fuiſſent, & innumeræ ordinatæ N M per experimenta determinatæ, curva quam punctum N perpetuò tangit, rationem accuratam reſiſtentiæ ad gravitatem determinaret per ejus interſectionem X cum lineâ S M; ideoque ſi multa fiunt tentamina, ſicque plura obtineantur puncta N, & per ea ducatur curva regularis N N X N, illa quàm proximè punctum X quæſitum determinabit; methodum autem ducendi curvam regularem per plura puncta data mox in Scholio ſumus tradituri. 66.

(b) *Ex hac ratione colligenda eſt &c.* Sit, exempli causâ, ratio aſſumpta reſiſtentiæ ad gravitatem 1 ad 10, ſeu $SM = \frac{1}{10}$; inventa autem ſit $SX = 2\,SM = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$; erit reſiſtentia ad gravitatem ut 1 ad 5. Ex hac ratione & aſſumptâ longitudine D P colligenda eſt longitudo D F ſeu amplitudo jactûs (64); & quoniam inventâ verâ ratione reſiſtentiæ ad gravitatem, trajectoria per calculum vel per conſtructionem inventa ſimilis eſt trajectoriæ quam corpus in medio reſiſtente, reverâ deſcribit (65), erit amplitudo D F per calculum inventa ad amplitudinem D F per experimentum cognitam, ut aſſumpta longitudo D P ad veram longitudinem D P pro trajectoriâ in medio reſiſtente deſcriptâ. Hâc autem longitudine inventâ, habetur (*per cor.* 4.) tum curva linea D r a F quam corpus reipsâ deſcribit, tum corporis velocitas & reſiſtentia in locis ſingulis (*per cor.* 5.)

(†) 67. Ex ſupra demonſtratis determinari poſſent motus corporis in medio quod reſiſtit partim uniformiter, partim in ratione velocitatis. Et quidem ſi corpus ſolâ vi inſitâ in hoc medio feratur, pars illa reſiſtentiæ quæ eſt uniformis, tanquam vis conſtans gravitatis quâ corporis aſcendentis motus retardatur, conſideranda eſt, & in ſuperioribus conſtructionibus pro corporis aſcenſu, non gravitas, ſed ea reſiſtentia uniformis data per lineam A C, vel per rectangulum A H exponi debet. Si vero corpus in prædicto medio vi gravitatis etiam urgeatur, linea A C gravitatem & reſiſtentiæ partem uniformem ſimul junctas, ſi corpus aſcendit, & exceſſum gravitatis ſupra eam reſiſtentiæ partem uniformem, ſi corpus deſcendit, exponet. Quâ ratione cæteris manentibus, determinabuntur motus corporis tum ſolâ vi inſitâ moti, tum vi gravitatis urgente aſcendentis & deſcendentis in medio quod reſiſtit partim in ratione datâ, partim in ratione velocitatis, tum etiam corporis projecti.

Ex-

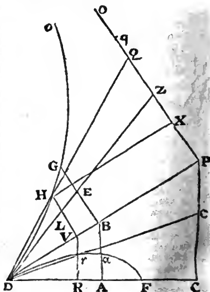
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. I. PROP. IV. PROBL. II.

plicatâ ratione velocitatum. (c) Etenim actione corporis velocioris communicatur eidem medii quantitati, tempore minore, motus major in ratione majoris velocitatis; ideoque tempore æquali, ob majorem medii quantitatem perturbatam, communicatur motus in duplicatâ ratione major; estque resistentia (*per motûs leg.* II. & III.) ut motus communicatus. Videamus igitur quales oriantur motus ex hâc lege resistentiæ.

(c) *Etenim actione &c.* Hæc patent per demonstrata (8).

68. *Scholium.* Ex æquatione ad curvam D r a F, quam (57) invenimus, deducitur hujus curvæ per Logarithmicam satis elegans constructio, quâ usi sunt *Varignonius* & *Hermannus*. Eam hîc exponemus breviter. Deinde cùm in superioris propositionis corollario ultimo & alibi postea describenda sit curva regularis quæ per data puncta transeat, hoc problema, quod NEWTONUS in Epistolâ ad *Oldenburgum* anno 1676. datâ unum fere ex pulcherrimis dicit quod solvere desideraverit, solvemus.

69. Iisdem positis quæ in superiori constructione NEWTONI, sit $DP = b$, $DV = v$, $Vr = z$, & DP ad a ut velocitas projectionis ad velocitatem terminalem; & erit (57) $z = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b}$. Oportet curvam D r a F ex hac æquatione per Logarithmicam construere. In rectâ PO ad DP normali capiatur $PZ = a$, asymtoto PO & subtangente PZ describatur per punctum D Logarithmica DHO, cujus DZ erit tangens, & per punctum quodvis V in linea DP agatur VH parallela PO Logarithmicæ occurrens in H & tangenti DZ in L, capiaturque verticalis VR pars Vr æqualis HL. Punctum r erit in trajectoriâ quæsitâ D r a F. Nam ducto ex H ad PO perpendiculo HX, erit (*per constr.*) $VP = HX = b - v$, $PZ = a$, & hinc $PX = HV = PZ \times L.\frac{DP}{HX} = a.L.\frac{b}{b-v}$ (34). Et ob triangula DVL, DPZ similia, $DP(b) : PZ(a) = DV(v) : VL = \frac{av}{b}$. Quare erit $HV - LV = a.L.\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = z = Vr$. Q. E. D.

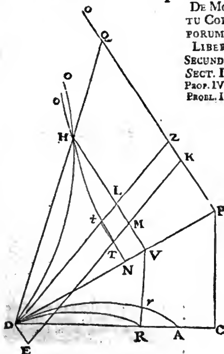


70. *Cor.* 1. Si per punctum A NEWTONI constructione determinatum erigatur verticalis AB secans DP in B, & per B erigatur ad DP perpendiculum BG secans DZ in E & Logarithmicam in G, capiaturque Ba æqualis GE, erit Aa maxima altitudo Jactûs.

71. *Cor.* 2. Punctum r quo trajectoria rectam Dc ex D ductam ad PC, secat, invenitur, si in lineæ ZO capiatur ZQ æqualis Pc, jungatur DQ logarithmicam secans in H, demittatur ex H ad DP, perpendiculum HV, & ex V ad

ad DC perpendiculum VR, quod rectam Dc secabit in puncto quæsito r, atque hinc determinatur etiam horizontalis amplitudo DF, capiendo ZQ æqualem PC, & reliqua perficiendo ut modo diximus. Nam ob parallelas Vr & Pc, HV & QP, est $Pc:Vr = PD:DV = DZ:DL = QZ:HL$; sed (*per constr.*) $QZ = Pc$: ergo $Vr = HL$, ideoque punctum r est in trajectoria TraF (*69*).

72. Ex demonstratis inveniri potest angulus elevationis PDC, sub quo corpus data velocitate DP projectum transibit per punctum r in verticali VR datum. Dicantur $DR = c$, $Rr = e$, $DZ = f$, $DL = x$, $HL = Vr = z$, $VR = z + e = y$; & ob triangula DLV, DZP similia erit $DZ(f) : DP(b) = DL(x) : DV = \frac{bx}{f}$, & ob angulum DRV rectum $DV^2 = DR^2 + VR^2$, hoc est, $\frac{bbxx}{ff} = cc + yy$, æquatio ad hyperbolam, cujus diameter transversa est $\frac{2cf}{b}$, diameter conjugata $2c$, abscissa à centro sumpta x, & ordinata y seu $z + e$, ut calculo inito liquet. Inde autem deducitur hæc constructio. Per punctum D ducatur infra lineam DP recta DE parallela PZ & æqualis Rr, per E agatur EK parallela DZ secans HV in M; & erit $LM = DE = Rr = e$, ideoque $HM = z + e = y$, atque $EM = DL = x$, & proinde centrum hyperbolæ est in E; cùmque semidiameter transversa sit $\frac{cf}{b} = \frac{DR \times DZ}{DP}$, si capiatur in linea DP pars DN æqualis DR, & per punctum N erigatur ad DP perpendiculum NT, secans EK in T & DZ in t, erit DP ad DZ ut DN seu DR ad Dt seu ET, ideoque $ET = \frac{DR \times DZ}{DP}$, & propterea ET semidiameter transversa, EM abscissa, & MH ordinata hyperbolæ THo, cujus semidiameter conjugata æquatur DR. Hæc itaque hyperbola occursu suo cum Logarithmicâ DHo determinabit punctum H, ex quo si demittatur ad DP perpendiculum HV secans DZ in L, dabuntur DV & HL æqualis Vr, ideoque dabitur etiam $VR = Vr + Rr$. His autem datis, datur angulus elevationis PDC, cujus sinus est VR, posito sinu toto DV.

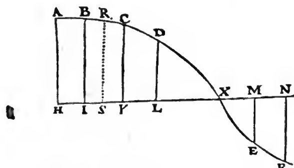


73. Si verò quæratur angulus projectionis PDC, ut corpus per punctum R in horizontali DC datum transeat, fiet $Rr = e = o$, & æquatio ad hyperbolam evadet $\frac{bbxx}{ff} = cc + zz$, ob $y = z + e = z$. In constructione verò coincidet punctum E cum puncto D, & T cum t, cæteris manentibus ut supra. Et quia si per hyperbolæ & Logarithmicæ intersectionem H ducatur recta DH secans Po in Q, est $QZ = PC$ (71.); liquet in eo casu esse QZ sinum anguli elevationis PDC, existente radio seu sinu toto DP. Observandum porro est, quod si in his constructionibus hyperbola Logarithmicam nus-

quam attingat; problema est impossibile; quod si eam bis secet, anguli duo satisfaciunt. Patet quoque datam semper esse rationem diametrorum hyperbolæ, ubicumque situm sit punctum r, vel R; est enim D R ad $\frac{DR \times DZ}{DP}$ in ratione data DP ad DZ.

74. Angulus elevationis P D C maximæ omnium amplitudini horizontali conveniens ita determinatur. Per punctum D ducatur D X ipsi D P perpendicularis quæ sit ad DP ut est DP ad PZ: jungatur Z X Logarithmicam secans in H, & ex D per H ducatur recta DH secans PO in Q; erit QZ sinus anguli quæsiti, existente sinu toto DP. Sit enim DR amplitudo horizontalis maxima $= c$, $DV = v$, $VR = Vr = z$, & erit ob angulum DRV rectum $vv - zz = cc$, & sumptis fluxionibus $2vdv - 2zdz = 2cdc = 0$ (48), ideoque $vdv = zdz$. Sed (69) $z = aL\frac{b}{b-v} - \frac{av}{b} = aLb - gLb - v - \frac{av}{b}$, & sumptis fluxionibus $dz = \frac{adv}{b-v} - \frac{adv}{b} = \frac{avdv}{bb-bv}$. Quare erit $zdz = \frac{azvdv}{bb-bv} = vdv$, & ideo $az = bb - bv$, ac proinde DP(b) : PZ(a) = HL(z) : PV ($b-v$); verùm ob triangulorum DVL, DPZ similitudinem est DP : DZ = PV : ZL; unde per compositionem rationum & ex æquo $DP^2 : PZ \times DZ = HL : ZL$, & quia $DP^2 = DX \times PZ$ (*per constr.*), erit DX : DZ = HL : LZ. Quapropter punctum H per æquationem $az = bb - bv$ determinatum perpetuo tangit lineam rectam XZ; cùmque idem punctum in Logarithmica esse oporteat ut determinetur maxima amplitudo DR, si per intersectionem H rectæ XZ & Logarithmicæ DHo ducatur recta DQ secans Po in Q, habebitur QZ sinus anguli PDC (73) maximæ amplitudini DR convenientis. Q. E. D.

75. Jam si oporteat curvam regularem describere, per data quotlibet puncta transeuntem, uti possumus generali methodo, quam NEWTONUS in Arithmetica universali tradidit, quamque deinde in Problematis 55, 58 &



58 & 61. adhibuit. Hæc sunt ipsius verba: „Cùm curva non datur specie, sed determinanda proponitur, possisque pro arbitrio „æquationem fingere quæ naturam ejus generaliter contineat, & hanc pro eâ designandâ tanquam si daretur assumere, ut ex „ejus assumptione quomodocumque perveniatur ad æquationes ex quibus assumpta tandem determinetur. Si itaque curva „generis dati per data puncta delineanda „sit, assumatur generalis ad curvam illam „æquatio cum terminorum coëfficientibus „indeterminatis, & curvâ ad rectam aliquam positione datam relatâ, ex singulis „punctis datis in rectam illam demittantur „perpendiculares aut rectæ aliæ inter se parallelæ, quæ datæ erunt ut & earum abscissæ a dato in rectâ illâ puncto computatæ; deinde in assumptâ æquatione loco „abscissæ variabilis x & ordinatæ etiam variabilis y scribantur abscissæ & ordinatæ „per puncta data determinatæ, & tot inde „obtinebuntur æquationes quot sunt puncta „data per quæ curva transire debet, atque ex „illis æquationibus, generalis æquationis „assumptæ coëfficientes determinabuntur. Hujus methodi exemplum sit solutio Lemmatis 5. lib. 3. Principiorum, quod ita propositum est: invenire curvam generis parabolici quæ per data quotcumque puncta transibit; cujus Lemmatis solutionem dedit ibidem NEWTONUS, sed sine demonstratione, quæ tamen ex ejusdem auctoris differentiali methodo colligi potest.

76. I. Sunto puncta illa A, B, C, D, E, F, &c. & ab iisdem ad rectam 76. quamvis positione datam H N demittantur perpendicula quotcumque A H, B I, C K, D L, E M, F N, &c.; positisque abscissâ variabili H S $= x$, & ordinatâ R S $= y$, assumatur generalis ad parabolam A B D E F æquatio $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 +$ &c., sintque A, B, C, D, E, &c. cum suis signis indeterminatæ. Dicantur A H $= a$, B I $= f$, C K $= g$, D L $= h$, M E $= -k$, & H I $= l$, H K $= m$, H L $= n$, H M $= t$, &c. Ponantur 1°. $y = a$ & $x = 0$; 2°. $y = f$, & $x = l$; 3°. $y = g$ & $x = m$; 4°. $y = h$, & $x = n$; 5°. $y = -k$, & $x = t$ atque ita deinceps, & loco y & x seorsim substituantur hi valores in æquatione generali assumpta, quæ in has mutabitur:

II. $a = A$

$$f = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 + \text{\&c.}$$
$$g = A + Bm + Cm^2 + Dm^3 + Em^4 + \text{\&c.}$$
$$h = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 + \text{\&c.}$$
$$-k = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 + \text{\&c.}$$

Subducantur æquationes inferiores ex superioribus, nimirum secunda ex primâ, tertia ex secundâ, & ita deinceps. Differentia verò primæ ac secundæ ordinatæ per primum intervallum H I divisa dicatur b, id est, $b = \frac{a - f}{l}$; secundæ ac tertiæ ordinatæ differentia per secundum intervallum I K divisa dicatur 2 b, id est, $2\,b = \frac{f - g}{m - l}$, & ita de cæteris. Prodibunt æquationes sequentes.

III. $b = \frac{a-f}{l} = -B - Cl - Dl^2 - El^3$

$2b = \frac{f-g}{m-l} = -B - Cl - Cm - Dl^2 - Dlm - Dm^2 - El^3 - El^2m - Elm^2 - Em^3$

$3b = \frac{g-h}{n-m} = -B - Cm - Cn - Dm^2 - Dmn - Dn^2 - Em^3 - Em^2n - Emn^2 - En^3$

$4b = \frac{h+k}{t-n} = -B - Cn - Ct - Dn^2 - Dnt - D^2 - En^3 - En^2t - Ent^2 - Et^3$

Simili modo capiantur adhuc æquationum istarum differentiæ, & dividantur per intervallum inter duas ordinatas interceptum H K, I L, K M, & differentiæ sic divisæ dicantur c, 2c, 3c, ut hic factum videtur.

IV. $c = \frac{b - 2b}{m} = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$.

$2c = \frac{2b - 3b}{n-l} = C + Dl + Dm + Dn + El^2 + Elm + Em^2 + Eln + Emn + En^2$.

$3c = \frac{3b - 4b}{t-m} = C + Dm + Dn + Dt + Em^2 + Emn + En^2 + Emt + Ent + Et^2$.

Harum æquationum differentiæ per intervalla trium ordinatarum H L, I M, divisæ dicantur d, 2d, & erunt æquationes.

V. $d = \frac{c - 2c}{n} = -D - El - Em - En$

$2d = \frac{2c - 3c}{t-l} = -D - El - Em - En - Et$

Harum tandem æquationum differentia per intervallum quatuor ordinatarum H M divisa dicatur e, & erit

VI. $e = \frac{d - 2d}{t} = E$.

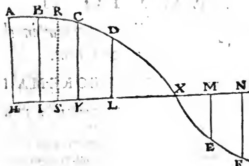
Si plura fuissent puncta data; pluresque ideo fuissent æquationes, eodem modo pergendum esset usque ad differentiam ultimam: quæ hic est differentia quarta, & sic tandem pervenitur ad valorem coëfficientis ultimi termini æquationis generalis assumptæ, & deinde retrogrediendo inveniuntur valores aliarum coëfficientium D, C, B, & A hoc modo.

VII. Quoniam $e = E$, & (V.) $d = -D - El - Em - En$, erit $D = -d - el - em - en$; & quia (IV.) est $c = C + Dl + Dm + El^2 + Elm + Em^2$ ideoque $C = c - Dl - Dm - El^2 - Elm - Em^2$ si loco E & D substituantur eorum valores modo inventi, habebitur $C = c + dl + dm + elm + enl + emn$. Et simili modo si in æquatione (III.) $b = -B - Cl - Dl^2 - El^3$, substituantur coëfficientium E, D, C valores, invenietur $B = -b - cl - dlm - elmn$.

VIII. Cùm igitur sit (II.) $A = a$; æquatio assumpta $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$, in hanc abit $y = a - x.(b + cl + dlm + elmn) + x^2.(c + dl + dm + elm + enl + emn) - x^3.(d + el + em + en) + ex^4 = a - bx - clx + cx^2 - dlmx + dlx^2 + dmx^2 - dx^3 - elmnx + elmx^2 + enlx^2 + emnx^2 - elx^3 - emx^3 - enx^3 + ex^4$, seu $y = a + b.(-x) + c.(-x \times \overline{l-x}) + d.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x}) + e.(-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x})$ + &c. In quâ æquatione patet terminorum progressus, & quomodo datâ abscissâ H S seu x inveniri compendiosè possit correspondens ordinata S R seu y. Nam si dicantur $-x$ seu $-HS = p$; $-IS \times p$, seu $-x \times \overline{l-x} = q$; $+SK \times q$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} = r$; $+SL \times r$, seu $-x \times \overline{l-x} \times \overline{m-x} \times \overline{n-x} = s$, ita scilicet pergendo ad usque perpendiculum penultimum, quod hic est D L; erit R S seu $y = a + bp + cq + dr + es$ + &c.

IX. Atque hæc ipsa est regula quam NEWTONUS casu secundo Lemmatis V. lib. III. sic tradit: collige perpendiculorum A H, B I, C K &c. differentias primas per intervalla perpendiculorum divisas b, 2b, 3b, 4b &c; secundas per intervalla bina divisas c, 2c, 3c, 4c &c; tertias per intervalla terna divisas d, 2d, 3d, &c.; quartas per intervalla quaterna divisas e, 2e, &c. Et sic deinceps. Inventis differentiis, dic $AH = a$, $-HS = p$, p in $-IS = q$, q in $+SK = r$, r in $+SL = s$, pergendo scilicet ad usque perpendiculum penultimum. Et erit ordinatim applicata $RS = a + bp + cq + dr + es$ + &c. ubi observandum est, præponenda esse signa negativa terminis H S, I S &c. qui jacent ad partes puncti S versus A, & signa affirmativa terminis S K, S L &c. qui jacent ad alteras partes puncti S.

X. Per hanc igitur regulam, assumptâ quâ-



qualibet abſciſſâ H S, invenietur valor ordinatæ correſpondentis S R, ſingulaque parabolæ puncta determinabuntur. Si vero in æquatione ponatur $y = 0$, & deinde quæratur valor abſciſſæ x, cognoſcetur punctum X quo parabola rectam H N interſecat.

77. XI. Si perpendiculorum HA, IB, KC, LD &c. æqualia ſint intervalla HI, IK, KL &c.; cæteris ut ſupra (I) nominibus ſervatis, poſitoque intervallo $HI = l = 1$, erunt $HK = m = 2$, $HL = n = 3$, $HM = t = 4$, &c. & perpendiculorum differentiæ per intervalla, per intervalla bina, terna, quaterna, & diviſæ erunt (III, IV, V, VI) quæ ſequuntur.

Differentiæ primæ per intervalla diviſæ, $b = a - f$, $2b = f - g$, $3b = g - h$, $4b = h + k$.

Differentiæ ſecundæ per intervalla bina diviſæ, $c = \frac{a - 2f + g}{2}$, $2c = \frac{f - 2g + h}{2}$, $3c = \frac{g - 2h - k}{2}$.

Differentiæ tertiæ per intervalla terna diviſæ, $d = \frac{a - 3f + 3g - h}{6}$, $2d = \frac{f - 3g + 3h + k}{6}$.

Differentiæ quartæ per intervalla quaterna diviſæ, $e = \frac{a - 4f + 6g - 4h - k}{24}$.

XII. Ponatur $a - f = \beta$, $a - 2f + g = \kappa$, $a - 3f + 3g - h = \delta$, $a - 4f + 6g - 4h - k = \varepsilon$; 77.

& erit $b = \beta$, $c = \frac{\kappa}{2}$, $d = \frac{\delta}{6}$, & $= \frac{\varepsilon}{24}$. Quare ſi hi valores ſubſtituantur in æquatione ſupra (VIII.) inventa, $y = a + b.(-x) + c.(-x \times l - x) + d.(-x \times l - x \times m - x) + e.(-x \times l - x \times m - x \times n - x) +$ &c., illa in hanc mutabitur $y = a + \beta(-x) + \frac{\kappa(-x \times 1 - x)}{2} + \frac{\delta.(-x \times 1 - x \times 2 - x)}{2 \times 3} + \frac{\varepsilon.(-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x)}{2 \times 3 \times 4} +$ &c.

Quapropter ſi in hâc ultimâ æquatione dicantur $-$ HS, ſeu $-x = p$; $\frac{1}{2}p$ in $-$ IS, ſeu $\frac{-x \times 1 - x}{2} = q$; $\frac{1}{3}q$ in $+$ SK, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x}{2 \times 3} = r$; $\frac{1}{4}r$ in $+$ SL, ſeu $\frac{-x \times 1 - x \times 2 - x \times 3 - x}{2 \times 3 \times 4} = s$; & ita pergatur ad uſque perpendiculum penultimum, erit $y = a + \beta p + \kappa q + \delta r + \varepsilon s +$ &c. ut NEWTONUS in caſu primo Lemmatis V. lib. III. determinavit. De hoc problemate Lector conſulat clariſſimos auctores, *Hermannum* in Appendice ad Phoronomiam, *Craigium* in Tractatu de Calculo fluentium; maximè verò *Stirling* in libro de Interpolatione ſerierum, in quo totam hanc materiam copiosè & ſagaciter explicat.

SECTIO II.

De motu corporum quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum.

PROPOSITIO V. THEOREMA III.

Si corpori resistitur in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ per medium similare movetur; tempora verò sumantur in progressione geometricâ à minoribus terminis ad majores pergente: dico quod velocitates initio singulorum temporum sunt in eâdem progressione geometricâ inversè; & quod spatia sunt æqualia, quæ singulis temporibus describuntur.

Nam quoniam quadrato velocitatis proportionalis & resistentia medii, & (d) resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis; si tempus in particulas innumeras æquales dividatur, quadrata velocitatum singulis temporum initiis erunt velocitatum earundem differentiis proportionalia. Sunto temporis particulæ illæ AK, KL, LM, &c. in rectâ CD sumptæ, & erigantur perpendicula AB, Kk, Ll, Mm, &c. hyperbolæ $BklmG$, centro C asymptotis rectangulis CD, CH descriptæ, occurrentia in B, k, l, m, &c. & (e) erit AB ad Kk ut CK ad CA, & divisim $AB - Kk$ ad Kk ut AK ad CA, & vicissim $AB - Kk$ ad AK ut Kk ad CA, ideoque ut $AB \times Kk$ ad $AB \times CA$. Unde, (f) cùm AK & $AB \times CA$ dentur, erit $AB - Kk$ ut $AB \times Kk$; & ultimo, ubi coeunt AB & Kk, ut $AB\,q$. Et simili argumento erunt $Kk - Ll$, $Ll - Mm$, &c. ut $Kk\ quad.$ $Ll\ quad.$ &c. Linearum igitur AB, Kk, Ll, Mm quadrata sunt ut earundem differentiæ (†); & idcirco cùm quadrata velocitatum fuerint etiam ut ipsarum diffe-

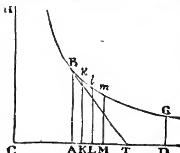
(d) * *Et resistentiæ proportionale est decrementum velocitatis*; dato nempe temporis momento, (1. 15.)

(e) * *Et erit AB ad Kk ut CK ad CA*, (per theor. 4. de hyp.)

(f) * *Undè cùm AK, & $AB \times CA$* dentur. A K quidem (ex hyp. tempus enim in particulas innumeras æquales dividitur, quæ per lineas æquales A K, K L &c. exponuntur.) & A B × C A (*per theor. 4. de hyp.*)

(†) * Scilicet ex naturâ Hyperbolæ inter suas Asymptotos, fluxiones ordinatarum sunt ut earum ipsarum ordinatarum qua-

differentiæ, (g) similis erit ambarum progreſſio. (h) Quo demonſtrato, conſequens eſt etiam ut areæ his lineis deſcriptæ ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus deſcribuntur. Ergo ſi velocitas initio primi temporis *AK* exponatur per lineam *AB*, & velocitas initio ſecundi *KL* per lineam *Kk*, & longitudo primo tempore deſcripta per aream *AKkB*; velocitates omnes ſubſequentes exponentur per lineas ſubſequentes *Ll*, *Mm*, &c. & longitudines deſcriptæ per areas *Kl*, *Lm*, &c. Et compoſitè, ſi tempus totum exponatur per ſummam partium ſuarum *AM*, longitudo tota deſcripta exponetur per ſummam partium ſuarum *AMmB*. Concipe jam tempus *AM* ita dividi in partes *AK*, *KL*, *LM*, &c. ut ſint *CA*, *CK*, *CL*, *CM*, &c. in progreſſione geometricâ; & (i) erunt partes illæ in eâdem progreſſione, & (k) velocitates *AB*, *Kk*, *Ll*, *Mm*, &c. in progreſſione eâdem inverſâ, (l) atque ſpatia deſcripta *Ak*, *Kl*, *Lm*, &c. æqualia. *Q. E. D.*



Corol.

quadrata; Æquatio enim Hyperbolæ inter ſuas Aſymptotos eſt $xy = a^2$; Æquatio fluxionalis $xdy + ydx = 0$; & $dy = -\frac{ydx}{x}$, cùm verò ſit $\frac{y}{a^2} = \frac{1}{x}$, ſit $dy = -\frac{yydx}{a^2}$, cùm ergo dx ſit fluxio ſibi ſemper æqualis, & a^2 ſit quantitas conſtans, eſt dy ut $-yy$.

(g) * *Similis erit ambarum progreſſio*; & ideo velocitates ſingulis temporum æqualium A K, K L, L M &c. initiis exponi poſſunt per lineas A B, K k, L l &c.

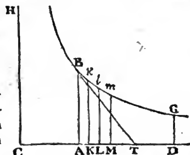
(h) * *Quo demonſtrato, conſequens eſt ut areæ* A B K k, K k l L, L l m M, &c. *ſint in progreſſione conſimili cum ſpatiis quæ velocitatibus* A B, K k, L l &c., tempuſculis A K, K L, L M &c., *deſcribuntur* (14). 77.

(i) 78. * *Et erunt partes illæ* A K, K L, L N, &c. quæ ſunt differentiæ linearum CA, CK, CL, CM, &c. in eâdem progreſſione. Differentiæ enim cujuſvis progreſſionis geometricæ, ſunt in eâdem progreſſione geometricâ. Nam cùm ſit C A : C K = C K : C L = C L : C N &c., erit auferendo antecedentia ex antecedentibus & conſequentia ex conſequentibus C A : C K = A K : K L = K L : L M &c.

(k) * *Et velocitates A B, K k, L l, M m &c., in progreſſione eâdem inverſâ.* Siquidem (*per theor. 4. de hyp.*) eſt A B ut C A, inverſè, K k ut C K inverſè.

(l) * *Atque ſpatia deſcripta*, A B k K, K k l L, L l m M &c., æqualia (380. lib. 1.)

Corol. 1. Patet ergo quòd, si tempus exponatur per asymptoti partem quamvis AD, & velocitas in principio temporis per ordinatim applicatam AB; velocitas in fine temporis exponetur per ordinatam DG, & spatium totum descriptum per aream hyperbolicam adjacentem $ABGD$; necnon spatium, quod corpus aliquod eodem tempore AD, velocitate primâ AB, in medio non resistente describere posset, (m) per rectangulum $AB \times AD$.



Corol. 2. Unde datur spatium in medio resistente descriptum, capiendo illud ad spatium quod velocitate uniformi AB in medio non resistente simul describi posset, ut est area hyperbolica $ABGD$ ad rectangulum $AB \times AD$.

Corol.

(m) 79. * *Per rectangulum* A B × A D. Si enim velocitas A B, manet eadem, tempore AK, describet corpus spatium AB×AK, dum in medio resistente describit spatium A B k K, tempore K L velocitate A B describet spatium A B × K L, dùm in medio resistente describit spatium K k l L, & ità deinceps (14. lib 1.); Quare tempore A M velocitate primâ A B in medio non resistente describet corpus spatium A B × (A K + K L + L M) = A B × A M; & tempore A D, spatium A B × A D. Et quoniam ipso motûs initio, est area ABkK, æqualis rectangulo A B × A K, atque spatia in medio resistente & in medio non resistente descripta temporis momento A K, sunt etiam æqualia, liquet spatium in medio resistente descriptum tempore quovis A D, esse ad spatium eodem tempore in medio non resistente descriptum velocitate A B, ut est area hyperbolica A C G D ad rectangulum A B × A D.

80. Ex corollario primo sequitur, tempore infinito spatium infinitum describi in medio quod resistit in ratione quadrati velocitatis. Non enim evanescet G D, hoc est, velocitas tota extincta non erit, nisi infinita evadat recta A D, hoc est nisi tempus motûs sit infinitum, tuncque infinita fit area A B G D, seu spatium descriptum est infinitum.

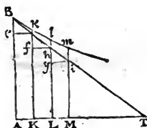
Corol. 3. Datur etiam resistentia medii, statuendo eam ipso motûs initio æqualem esse vi uniformi centripetæ, quæ in cadente corpore, tempore *A C*, in medio non resistente, generare posset velocitatem *A B*. Nam si ducatur *B T* quæ tangat hyperbolam in *B*, & occurrat asymptoto in *T*; (n) recta *A T* æqualis erit ipsi *A C*, & (o) tempus exponet, quo resistentia prima uniformiter continuata tollere posset velocitatem totam *A B*.

Corol. 4. (p) Et inde datur etiam proportio hujus resistentiæ ad vim gravitatis, aliamve quamvis datam vim centripetam.

Corol.

(n) * *Recta A T æqualis erit ipsi A C.* (Per theor. 1. de Hyp.)

(o) * *Et tempus exponet.* Ordinatæ K k, L l, M m, &c. rectæ B T, occurrant in k, h, i, &c. ex punctis k, h, i, demissa sint ad A B, K k, L l, &c. perpendicula K e, h f, i g, &c. & sumptis temporibus quam minimis A k, k L, L M, æqualibus erunt B e, k f, h g æquales, sed resistentia prima temporis momento A K, tollit velocitatem A B — K k, seu B e, & eadem uniformiter continuata temporis momento K L, sive A K, tolleret etiam velocitatem k f = B e, & temporis momento L M, seu A K, velocitatem g h = B e, atque ita deinceps; Quarè resistentia prima uniformiter continuata tempore A T tolleret velocitatem totam A B, quia A B æqualis est omnibus differentiis B e, k f, g h, &c. usque ad T; vis autem centripeta quæ tempore A K, producit velocitatem B e, æqualis est vi quæ eodem temporis momento eandem velocitatem B e extinguit, seu æqualis est resistentiæ primæ, & illa vis centripeta uniformis manens toto tempore A T, totam velocitatem A B, produceret, quam resistentia prima uniformis manens eodem tempore extingueret; ergò resistentia prima æqualis



est vi uniformi centripetæ quæ in cadente corpore, tempore A T sive A C, in medio non resistente generare posset velocitatem A B.

(p) * *Et indè datur etiam proportio.* Sunt enim vires centripetæ uniformes ut velocitates quas dato tempore producunt (13. *lib.* 1.) & ideò erit resistentia prima ad gravitatem ut velocitas quam producit vis centripeta uniformis cui resistentia illa æqualis supponi potest, ad velocitatem quam vis gravitatis eodem tempore generat.

Corol. 5. Et vice versâ, si datur proportio resistentiæ ad datam quamvis vim centripetam; (q) datur tempus AC, quo vis centripeta resistentiæ æqualis generare possit velocitatem quamvis AB: & inde datur punctum B per quod hyperbola asymptotis CH, CD, describi debet; ut (r) & spatium $ABGD$, quod corpus incipiendo motum suum cum velocitate illâ AB, tempore quovis AD, in medio similari resistente describere potest.

(q) *Datur tempus A C quo vis resistentiæ æqualis generare possit velocitatem A B.* Si enim detur vis quædam centripeta, dabitur tempus quo velocitatem A B generare potest. Tempora autem quibus diversæ vires centripetæ eamdem velocitatem generare possunt, sunt inversè ut illæ vires; Ergo si datur ratio vis centripetæ cui resistentia est æqualis ad aliam vim datam, dabitur ratio temporis quo hæc vis velocitatem A B generare potest ad tempus quo vis, cui resistentia est æqualis eam velocitatem generat, hoc est datur tempus A C.

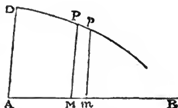
(r) * *Ut & spatium A B G D.* His enim datis, datur tùm area A B G D, tùm rectangulum AB×AD, tùm spatium quod corpus tempore A D, cum datâ velocitate uniformi A B, describeret in medio non resistente, ideóque cum sit A B × A D, ad A B G D, ut spatium tempore A D & velocitate A B in medio non resistente descriptum ad spatium eodem tempore descriptum in medio resistente (*per cor.* 2.) hoc spatium dabitur.

81. *Scholium.* Hujus propositionis constructio ad Logarithmicam reduci facilè posset; sed id relinquimus lectoris arbitrio, generalis problematis quod sequitur, solutionem analyticam tradituri, ut inventionis fons ipse aperiatur.

PROBLEMA.

82. Definire motum corporis solâ vi insitâ lati in medio quod resistit in ratione composita ex simplici ratione densitatis medii, & quâvis ratione multiplicatâ celeritatis mobilis.

Si loco A egrediatur corpus cum velocitate datâ c & tempore t describat rectam AM $= s$, sitque ejus velocitas in M $= v$ densitas medii in eodem loco $= k$, & resistentia r erit (17.) $r\,ds = -v\,dv$. Ponatur resistentia $r = \frac{k v^n}{a^n}$, sitque a quantitas data, & habebitur $\frac{k v^n ds}{a^n} = -v\,dv$, & hinc $k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$. Per punctum M, erigatur ad A M, perpendiculum M P quod exponat medii densitatem k in loco M, sitque DPp curva quam punctum P perpetuò tangit; & erecto altero perpendiculo m p priori M P infinitè propinquo ut sit M m $= ds$, erit elementum M P p m $= k\,ds = -a^n v^{1-n} dv$, sumptisque fluentibus, area A D P M $= \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n}$; Quia verò evanescente areâ A D P M, evanescit quoque s, & fit $v = c$, erit $0 = \frac{Q - a^n c^{2-n}}{2-n}$, & ideo constans $Q = a^n c^{2-n}$, atque ità A D P M $= \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$. Porrò si densitas k, seu P M, est ut functio quævis spatii descriptis s sive A M, poterit curva D P p describi, ac proindè in hâc Hypo-



Hypotheſi dato ſpatio deſcripto, dabitur per quadraturam areæ A D P M, velocitas, & contrà datâ velocitate dabitur area A D P M, & hinc dabitur ſpatium deſcriptum A M, inde etiam (14. *lib.* 1.), datâ velocitate aut ſpatio dabitur tempus t, & contrà.

83. Si $n = 2$, fit $2 - n = 0$, & ideò reſumenda eſt æquatio MPpm $= - a^n v^{1-n} dv = - \frac{a^2 dv}{v}$, quæ, ſumptis fluentibus, abit in hanc A D P M $= Q - a^2 L. v$; & quia poſitâ areâ A D P M $= 0$, fit $v = c$, erit $Q = a^2 L. c$, ideoque A D P M $= a^2 L. c - a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$. Sit A D P M $= b$, logarithmus numeri $h = 1$, ſeu $L. h = 1$, erit $b L. h = a^2 L. \frac{c}{v}$, & $\frac{b}{a^2} \times L. h = L. \frac{c}{v}$, ſeu $L. h^{\frac{b}{a a}} = L. \frac{c}{v}$, ac proindè $h^{\frac{b}{a a}} = \frac{c}{v}$, & $v = \frac{c}{h^{\frac{b}{a a}}}$. Quarè dato ſpatio, dabitur velocitas, & hinc dabitur tempus (14) & contrà.

84. Sit denſitas uniformis ſeu $k = 1$, erit $k ds = ds = - a^n v^{1-n} dv$, ſumptiſque fluentibus $s = \frac{Q - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n}$.

Undè reperitur $v = \frac{[a^n c^{2-n} + (n-2)s]^{\frac{1}{2-n}}}{a^{\frac{n}{2-n}}}$.

Invenitur tempus per formulam $dt = \frac{ds}{v} = - \frac{a^n v^{1-n} dv}{v} = - a^n v^{-n} dv$. Et ſumptis fluentibus, fit $t = \frac{Q - a^n v^{1-n}}{1-n} = \frac{a^n c^{1-n} - a^n v^{1-n}}{1-n}$, quia poſito $t = 0$, fit $v = c$, & proindè $Q = a^n c^{1-n}$.

85. Si $k = 1$, & $n = 1$, hoc eſt, ſi denſitas eſt uniformis & reſiſtentia ut velocitas erit (84) $s = ac - av$; & quia (*ibid.*) $dt = - a^n v^{-n} dv = - \frac{a dv}{v}$, erit $t = Q - a L. v = a L. c - a L. v = a L. \frac{c}{v}$, quod poſito tempore $t = 0$, fiat $v = c$ & proindè $Q = a L. c$.

86. Si $k = 1$, & $n = 2$, erit (84) $s = \frac{a^2 c - a^2 v}{c v}$, & quia (ibid.) $dt = - a^n v^{-n} dv = - \frac{a^2 dv}{v}$, erit $s = Q - a^2 L. v = a^2 L. c - a^2 L. v = a^2 L. \frac{c}{v}$.

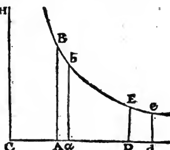
87. Si in æquatione ſpatii & velocitatis ſuprà inventâ, velocitas v, ſupponatur $= 0$, erit $s = \frac{a^n c^{2-n}}{2-n}$, ſi n eſt numerus binario minor, at ſi n eſt numerus binario major, cum ſit $s = \frac{a^n c^{2-n} - a^n v^{2-n}}{2-n} = \frac{a^n}{2-n} \times c^{2-n} - v^{2-n}$ ut loco $2-n$, quæ eſt quantitas negativa, expreſſio $n-2$, quæ eſt poſitiva, ſubſtitui poſſit, fiet $s = - \frac{a^n}{n-2} \times \frac{1}{c^{n-2}} - \frac{1}{v^{n-2}} = - \frac{a^n}{n-2} \times \frac{v^{n-2} - c^{n-2}}{c^{n-2} v^{n-2}} = \frac{a^n}{n-2} \times \frac{c^{n-2} - v^{n-2}}{c^{n-2} v^{n-2}}$; ſi fiat ergo $v = 0$ erit $s = \frac{a^n \times c^{n-2}}{n-2 \times 0} = \infty$; & ubi $n = 2$, erit (86) $s = a^2 L. \frac{c}{0} = \infty$. Quarè ſi n eſt numerus poſitivus binario minor, deſcripto ſpatio aliquo finito velocitas omnis extinguitur; at ſi n binario æqualis eſt vel major, ſpatium infinitum conficitur, priuſquam velocitas evaneſcat. 87.

88. Si in æquationibus temporis & velocitatis, velocitas v evadat $= 0$, erit (84) $t = \frac{a^n c^{1-n}}{1-n}$, ſi n eſt numerus unitate minor, at erit $t = \infty$, ſi n eſt unitate major, & (85) $t = a L. \frac{c}{0} = \infty$, ubi $n = 1$. Quapropter ſi numerus poſitivus n eſt unitate minor, velocitas tempore finito extinguitur, ſpatio etiam finito deſcripto (87). Si n eſt unitati æqualis vel ipſâ major, velocitas nonniſi tempore infinito extingui poteſt, & ſpatium finitum eſt, ſi n eſt numerus binario minor, infinitum verò, ſi n binario æqualis vel major (87.).

PROPOSITIO VI. THEOREMA IV.

Corpora sphærica homogenea & æqualia, resistentiis in duplicatâ ratione velocitatum impedita, & solis viribus insitis incitata, temporibus quæ sunt reciproce ut velocitates sub initio, describunt semper æqualia spatia, & amittunt partes velocitatum proportionales totis.

Asymptotis rectangulis *CD*, *CH* descriptâ hyperbolâ quâvis *B b E e* secante perpendicula *A B*, *a b*, *D E*, *d e*, in *B*, *b*, *E*, *e*, (ſ) exponantur velocitates initiales per perpendicula *A B*, *D E*, & tempora per lineas *A a*, *D d*. Est ergo ut *A a* ad *D d* ita (per hypothesin) *D E* ad *A B*, & ita (ex (t) naturâ hyperbolæ) *C A* ad *CD*;



& componendo, ita *Ca* ad *Cd*. (u) Ergo areæ *A B b a*, *D E e d*; hoc est, spatia descripta æquantur inter se, & velocitates primæ *A B*, *D E* sunt ultimis *a b*, *d e*, & propterea dividendo partibus etiam suis amissis *A B* — *a b*, *D E* — *d e* proportionales. *Q. E. D.*

PROPOSITIO VII. THEOREMA V.

Corpora sphærica quibus resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, temporibus, quæ sunt ut motus primi directè & resistentiæ primæ inversè, amittent partes motuum proportionales totis, & spatia describent temporibus istis & velocitatibus primis conjunctim proportionalia.

(x) Namque motuum partes amissæ sunt ut resistentiæ & tem-

(ſ) * *Exponantur velocitates initiales &c.* Cùm enim corpora duo similia homogenea & æqualia supponantur, eorum motus considerari possunt tanquam motus unius ejusdemque corporis variis celeritatis gradibus acti (*ut in prop.* 5.) ideóque (*per coroll.* 1. *prop.* 5.) velocitates initiales exponi possunt per lineas A B, D E, tempora per lineas A a, D d, velocitates in fine illorum temporum residuæ per lineas a b, d e, & spatia his temporibus descripta per areas Hyperbolicas A B b a, D E e d.

(t) * *Ex naturâ Hyperbolæ.* (Per theor. 4. de Hyperb.)

(u) * *Ergò areæ A B b a, D E e d*, (378. Lib. 1.)

(x) * *Namque motuum partes amissæ &c.* (2),

tempora conjunctim. Igitur ut partes illæ sint totis proportionales, debebit resistentia & tempus conjunctim esse ut motus. Proinde tempus erit ut motus directè & resistentia inversè. Quare temporum particulis in eâ ratione sumptis, corpora amittent semper particulas motuum proportionales totis, (y) ideoque retinebunt velocitates velocitatibus suis primis semper proportionales. Et (z) ob datam velocitatum rationem, describent semper spatia, quæ sunt ut velocitates primæ & tempora conjunctim. *Q. E. D.*

(a) *Corol.* 1. Igitur si æquivelocibus corporibus resistitur in duplicatâ ratione diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia diametris suis proportio-

(y) * *Ideoque retinebunt velocitates* in ratione primâ, ob datas corporum massas (6. lib. 1.)

(z) * *Et ob datam velocitatum rationem* (12.)

89. Tota propositionis hujus demonstratio per Analysim hoc modo exponitur. Sit globi cujusvis massa m, velocitas data initio motûs c, in fine temporis t fit v, resistentia data initio motûs r, & quia ejusdem corporis resistentiæ in diversis locis sunt ut velocitatum quadrata (*per Hyp.*) erit cc, ad vv, ut r, ad resistentiam elapso tempore t, quæ proindè erit $\frac{rvv}{cc}$. Sed (2) resistentia $\frac{rvv}{cc}$ est ut motûs decrementum $-m\,dv$ directè, & temporis momentum dt, inversè, hoc est, $\frac{rvv}{cc} = -\frac{m\,dv}{dt}$, & hinc $dt = -\frac{mcc\,dv}{rvv}$, sumptisque fluentibus $t = Q + \frac{mcc}{rv}$. Ponatur $t = 0$, & fiet $v = c$, adeóque $Q = -\frac{mc}{r}$, quo valore substituto fit $t = \frac{mcc - mcv}{rv}$. Capiatur tempus t, ut motus primus mc, directè & resistentia prima r, inversè, hoc est t ut $\frac{mc}{r}$, & erit $\frac{mc}{r}$ ut $\frac{mcc - mcv}{rv}$, & ideóque mcv, ut $mcc - mcv$, & dividendo per c, mv ut $mc - mv$; & compositè fiet mc, ut $mc - mv$, id est, motus amissus $mc - mv$ ut motus primus mc; & hinc ob datam massam m, erit etiam c, ut $c - v$, id est, velocitas amissa $c - v$, ut velocitas prima c; indè etiam erit c, ad $c - c + v$, seu v, hoc est velocitas prima c, ad residuam v, in ratione datâ. Jam si spatium tempore t descriptum dicatur s, erit (13) $ds = v\,dt$, & quia v est ut data c, erit ds ut $c\,dt$, sumptisque fluentibus ob datam c, fiet s ut ct. Q. E. D.

90. Quoniam spatium s est ut ct, & t ut $\frac{mc}{r}$, erit etiam s ut $\frac{mcc}{r}$; globi cujus massa m diameter sit D, & datâ globi densitate erit massa m, ut volumen (2. *lib.* 1.) hoc est, ut diametri cubus D^3; Quare erit s ut $\frac{D^3cc}{r}$. Si prætereà datâ velocitate c, resistentia r est ut diametri D, dignitas cujus index n, hoc est r ut D^n, & proindè velocitate non datâ, resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut $\frac{D^3cc}{D^n cc}$, seu ut D^{3-n}. Ex quibus patent corollaria quæ sequuntur.

(a) * *Cor.* 1. Nam in Hypothesi corollarii hujus est $n = 2$. adeóque s ut D.

tionalia, amittent partes motuum proportionales totis. Motus enim globi cujusque erit ut ejus velocitas & massa conjunctim, id est, ut velocitas & cubus diametri; resistentia (*per hypothesin*) erit ut quadratum diametri & quadratum velocitatis conjunctim; & tempus (*per hanc propositionem*) est in ratione priore directè & ratione posteriore inversè, id est, ut diameter directè & velocitas inversè; ideoque spatium, tempori & velocitati proportionale, est ut diameter.

(b) *Corol.* 2. Si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione sesquiplicatâ diametrorum: globi homogenei quibuscunque cum velocitatibus moti, describendo spatia in sesquiplicatâ ratione diametrorum, amittent partes motuum proportionales totis.

Corol. 3. Et universaliter, si æquivelocibus corporibus resistitur in ratione dignitatis cujuscunque diametrorum: spatia quibus globi homogenei, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut cubi diametrorum ad dignitatem illam applicati. Sunto diametri D & E; & si resistentiæ, ubi velocitates æquales ponuntur, sint ut D^n & E^n: spatia quibus globi, quibuscunque cum velocitatibus moti, amittent partes motuum proportionales totis, erunt ut D^{3-n} & E^{3-n}. Et propterea globi homogenei describendo spatia ipsis D^{3-n} & E^{3-n} proportionalia, retinebunt velocitates in eâdem ratione ad invicem ac sub initio.

(c) *Corol.* 4. Quòd si globi non sint homogenei, spatium à globo densiore descriptum augeri debet in ratione densitatis. Motus enim, sub pari velocitate, major est in ratione densitatis, & tempus (*per hanc propositionem*) augetur

tur

(b) * *Cor.* 2. In hypothesi corollarii hujus est $n = \frac{3}{2}$, ideóque s ut $D^{3-\frac{3}{2}}$, seu ut $D^{\frac{3}{2}}$.

(c) * *Cor.* 4. Sit globi m densitas δ, adeóque (2 *lib.* 1.) massa m ut δD^3, & hinc (90) s ut $\frac{\delta D^3 cc}{r}$. Quarè si ponatur resistentia r, ut $D^n cc$, erit s ut δD^{3-n}, hoc est, spatium s, quod datâ densitate δ, erat ut D^{3-n}, augeri debet in ratione densitatis δ.

tur in ratione motus directè, ac spatium descriptum in ratione temporis.

(d) *Corol.* 5. Et si globi moveantur in mediis diversis; spatium in medio, quod cæteris paribus magis resistit, diminuendum erit in ratione majoris resistentiæ. Tempus enim (*per hanc propositionem*) diminuetur in ratione resistentiæ auctæ, & spatium in ratione temporis.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. VII. THEOR. V.

(e) LEMMA II.

Momentum genitæ æquatur momentis laterum singulorum generantium in eorundem laterum indices dignitatum & coefficientia continuè ductis.

Genitam voco quantitatem omnem, quæ ex lateribus vel terminis quibuscunque in arithmeticâ per multiplicationem, divisionem, & extractionem radicum; in geometriâ per inventionem vel contentorum & laterum, vel extremarum & mediarum proportionalium, sine additione & subductione generatur. Ejusmodi quantitates sunt facti, quoti, radices, rectangula, quadrata, cubi, latera quadrata, latera cubica, & similes. Has quantitates, ut indeterminatas & instabiles, & quasi motu fluxuve perpetuo crescentes vel decrescentes, hic considero; & earum incrementa vel decrementa momentanea sub nomine momentorum intelligo: ita ut incrementa pro momentis addititiis seu affirmativis, ac decrementa pro subductitiis seu negativis habeantur. Cave tamen intellexeris particulas finitas. Particulæ finitæ non sunt momenta, sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ. Intelligenda sunt principia jàmjam nascentia finitarum magnitudinum. Neque enim spectatur in hoc lemmate magnitudo momentorum: sed prima nascentium proportio.

(d) * *Cor.* 5. Resistentia r, quæ antè erat ut D^2cc, augeatur in ratione quâvis a, seu fit r ut aD^2cc, & quia s est ut $\frac{\delta D^3cc}{r}$, (*cor.* 4.) fiet s ut $\frac{\delta D^3cc}{aD^2cc}$, seu ut $\frac{\delta D^{3-2}}{a}$, spatium igitur di- 90
minuendum est in ratione majoris resistentiæ.

(e) * *Lem.* 2. Totum istud Lemma num. 137. & sequentibus Lib. 1. fusè expositum videat lector.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. LEMMA II.

tio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes & fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitæ quævis quantitates velocitatibus hisce proportionales. (f) Lateris autem cujusque generantis coefficiens est quantitas, quæ oritur applicando genitam ad hoc latus.

Igitur sensus (g) lemmatis est, ut, si quantitatum quarumcunque perpetuo motu crescentium vel decrescentium A, B, C, &c. momenta, vel his proportionales mutationum velocitates dicantur a, b, c, &c. momentum vel mutatio geniti rectanguli AB fuerit $aB + bA$, & geniti contenti ABC momentum fuerit $aBC + bAC + cAB$: & genitarum dignitatum A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ momenta $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$, & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respectivè. Et generaliter, ut dignitatis cujuscunque $A^{\frac{n}{m}}$ momentum fuerit $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$. Item ut genitæ A^2B momentum fuerit $2aAB + bA^2$; & genitæ $A^3B^4C^2$ momentum $3aA^2B^4C^2 + 4bA^3B^3C^2 + 2cA^3B^4C$; & genitæ $\frac{A^3}{B^2}$ sive A^3B^{-2} momentum $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & sic in cæteris. Demonstratur verò lemma in hunc modum.

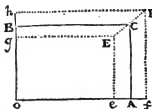
Cas. 1. Rectangulum quodvis motu perpetuo auctum AB, ubi

(f) *Lateris autem.* Sic lateris x, in quantitate genitâ $x^n y^m$ positi, coefficiens est $\frac{x^n y^m}{x}$, seu $x^{n-1} y^m$.

(g) * *Sensus Lemmatis est, ut, si quantitatum* A, B, C *momenta dicantur* a, b, c, ità ut dum A fit $A + a$, B evadat $B + b$, C evadat $C + c$ &c., *momentum vel mutatio geniti rectanguli AB, erit* $aB + bA$ &c., vel si loco litterarum A, B, C, &c. utamur litteris minusculis x, y, z &c. quibus variabiles quantitates consuevimus significare, & loco a, b, c, &c. scribamus dx, dy, dz &c. sensus Lemmatis est momentum seu fluxionem rectanguli xy, esse $ydx + xdy$, fluxionem solidi xyz, esse $yzdx + xzdy + xydz$, & genitarum quantitatum x^2, x^3, x^4, $x^{\frac{1}{2}}$ &c. momenta esse $2xdx$, $3x^2dx$, $4x^3dx$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ &c. respectivè; & genitæ $x^n y^m$, momentum esse, $ny^m x^{n-1}dx + mx^n y^{m-1}dy$ &c.

ubi de lateribus A & B deerant momentorum dimidia $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, fuit $A - \frac{1}{2}a$ in $B - \frac{1}{2}b$, seu $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$; & quam primum latera A & B alteris momentorum dimidiis aucta sunt, evadit $A + \frac{1}{2}a$ in $B + \frac{1}{2}b$ seu $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. De hoc rectangulo subducatur rectangulum prius, & (h) manebit excessus $aB + bA$. Igitur laterum incrementis totis a & b generatur rectanguli incrementum $aB + bA$. *Q. E. D.*

Cas. 2. Ponatur AB semper æquale G, & contenti ABC seu GC momentum (*per cas.* 1.) erit $gC + cG$, id est (si pro G & g scribantur AB & $aB + bA$) $aBC + bAC$ $+ c$



(h) * *Et manebit excessus* $aB + bA$.

1us. *Casus.* Sit Rectangulum OABC sub duabus variabilibus OA, OB continuè crescentibus; sumantur hinc inde ab A partes æquales Ae, Af; & a B partes æquales Bg, Bh, ita ut, si a & b sint quantitates momentis linearum OA, OB proportionales sit $ef = a$, & $gh = b$: Compleantur Rectangula OgEe, OhFf, ducatur FE, quæ transibit per C punctum concursus linearum AC, BC (ob parallelas, & lineas ef & gh similiter, nempe bifariam, sectas in A & B). Dico quòd summa Trapeziorum EFef & EFgh æqualis erit momento Rectanguli OACB; obtinetur verò Trapeziorum summa, sumendo differentiam Rectangulorum OeEg, OfFh, quæ est $Of \times Oh - Oe \times Og$, sive $\overline{OA + Af} \times \overline{OB + Bh} - \overline{OA - Ae} \times \overline{OB - Bg}$, & vocando OA, A; OB, B; $Af = Ae = \frac{1}{2}a$, $Bh = Bg = \frac{1}{2}b$ differentia Rect. erit $\overline{A + \frac{1}{2}a} \times \overline{B + \frac{1}{2}b} - \overline{A - \frac{1}{2}a} \times \overline{B - \frac{1}{2}b} = AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab - AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA - \frac{1}{4}ab = aB + bA$. 90.

Ut verò probetur summam Trapeziorum EFef & EFgh æqualem esse momento Rectanguli OACB, observandum primò: Quòd si lineæ quævis ST, VX, utcumque inæquales, in lineam SV sint perpendiculares jungaturque TX, & in medio lineæ SV erigatur perpendicularis YZ, erit Trapezium STXV æquale Rectangulo $SV \times YZ$: Itaque Trapezium EFef erit æquale Rectangulo $AC \times ef$, & Trapezium EFgh æquale Rectangulo $BC \times gh$. Præterea quoniam ef & gh sunt momentis linearum OA, OB proportionales, hoc est, proportionales velocitatibus quibus lineæ OA, OB crescunt, sive, quod idem est, celeritatibus quibus, dum Rectangulum OACB crescit, lineæ AC, BC antrorsum feruntur, Rectangula $AC \times ef$ & $BC \times gh$, erunt ut lineæ illæ AC, BC & earum velocitates conjunctim.

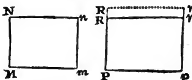
Mutatio autem geniti Rectanguli CACB proportionalis est causæ quæ eam producit, ea autem causa est motus linearum variabilium AC, BC quo antrorsum feruntur dum lineæ OA, OB crescunt, & quamvis dum illæ lineæ AC, BC moventur, interim lineæ OA, OB crescant, incrementi hujus nulla habenda est ratio dum Rectanguli fluxionem sive incrementum nascens consideramus, etenim in ipso hujus incrementi nascentis ortu illæ productiones linearum OA, OB nihil planè sunt, & cùm primum sunt aliquid jam aliæ AC, BC prioribus majores

$+ c$ A B. Et par est ratio contenti sub lateribus quotcunque. *Q. E. D.*

Cas. 3. Ponantur latera A, B, C sibi mutuo semper æqualia; & ipsius A^2, id est rectanguli A B, momentum $a B + b A$ erit $2 a A$, ipsius autem A^3, id est contenti A B C, momentum $a BC + b AC + c AB$ erit $3 a A^2$. Et eodem argumento momentum dignitatis cujuscunque A^n est $n a A^{n-1}$. *Q. E. D.*

Cas. 4. Unde cùm $\frac{1}{A}$ in A sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A}$ ductum in A, unâ cum $\frac{1}{A}$ ducto in a, (i) erit momentum ipsius 1, id est, nihil. Proinde momentum ipsius $\frac{1}{A}$ seu ipsius A^{-1} est $-a$

jores assumuntur, ergo momentum Rectanguli O A C B sive ejus mutationis momentanea causa, ex lineis A C & BC & velocitatibus quibuscum feruntur, determinanda est.



Sint verò Rectangula M N m n, P R p r, quorum lineæ M N, P R sint æquales, concipiantur aliæ lineæ hisce etiam æquales quæ ab M N & P R profectæ motu uniformi & parallelo secundum lineas M m & P p ferantur, ita ut eodem tempore ad m n & p r perveniant, manifestum est (*per* 1. 6[i]. *Elem.*) areas M n, P r fore ut lineæ M m P p, & pariter velocitates linearum ab M N & P R profectarum in eadem fore ratione, ideoque areas M n, Pr, fore in ratione earum velocitatum. Quòd si lineæ N M, P R sint inæquales, areæ erunt ut lineæ illæ MN, PR & earum velocitates conjunctim, & quævis incrementa Rectangulorum NMmn, P R p r æquali tempore facta in eadem ratione erunt, ideoque & nascentia incrementa erunt in eâ Ratione. Unde tandem sequitur quòd incrementum Rectanguli OABC ex motu lineæ A C natum, est ut illa linea A C & ejus velocitas conjunctim, & quod incrementum ejusdem Rectanguli O A C B ex motu lineæ B C natum, est ut illa linea B C & ejus velocitas conjunctim, ideoque totum momentum Rectanguli O A C B est summa factorum linearum AC & BC per velocitates quibus feruntur respectivè ductarum, ideoque ut summa Rectangulorum A C × e f & B C × g h, sive denique ut summa Trapeziorum E F e f, E F g h. Q. E. D.

2[us]. *Casus.* Facilè hæc applicantur ad eos casus ubi vel ambæ lineæ O A, O B decrescunt, vel unâ crescente altera decrescit, quippe varianda sunt solummodo signa juxta has hypotheses.

Vide aliam hujus casûs demonstrationem (num. 160. lib. 1.).

(i) * *Erit momentum ipsius* 1, *id est nihil.* Ponatur enim $\frac{1}{A} = B$ & erit $\frac{1}{A} \times A = A B = 1$, sed momentum rectanguli $A B$ est $a B + b A$ (*per cas.* 1.) & momentum constantis 1 nullum est; Quarè erit $a B + b A = 0$, & hinc $b A = - a B = - \frac{a}{A}$, undè momentum b ipsius B seu $\frac{1}{A}$ est $b = \frac{-a}{A^2}$ $= -a$

$\frac{-a}{A^2}$. Et generaliter cùm $\frac{1}{A^n}$ in A^n sit 1, momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ ductum in A^n unà cum $\frac{1}{A^n}$ in $n a A^{n-1}$ erit nihil. Et propterea momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$ seu A^{-n} erit $-\frac{n a}{A^{n+1}}$. *Q.E.D.*

Cas. 5. Et cùm $A^{\frac{1}{2}}$ in $A^{\frac{1}{2}}$ sit A, momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ ductum in $2 A^{\frac{1}{2}}$ erit a, per cas. 3: ideoque momentum ipsius $A^{\frac{1}{2}}$ erit $\frac{a}{2 A^{\frac{1}{2}}}$ sive $\frac{1}{2} a A^{-\frac{1}{2}}$. Et generaliter si ponatur $A^{\frac{m}{n}}$ æquale B, erit A^m æquale B^n, ideoque $m a A^{m-1}$ æquale $n b B^{n-1}$, & $m a A^{-1}$ æquale $n b B^{-1}$ seu $n b A^{-\frac{m}{n}}$, ideoque $\frac{m}{n} a A^{\frac{m-n}{n}}$ æquale b, id est, æquale momento ipsius $A^{\frac{m}{n}}$. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur genitæ cujuscunque $A^m B^n$ momentum est momentum ipsius A^m ductum in B^n, unà cum momento ipsius B^n ducto in A^m, id est $m a A^{m-1} B^n + n b B^{n-1} A^m$; idque sive dignitatum indices m & n sint integri numeri vel fracti, sive affirmativi vel negativi. Et par est ratio contenti sub pluribus dignitatibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc in continuè proportionalibus, si terminus unus datur, (k) momenta terminorum reliquorum erunt ut iidem ter-

$= -a A^{-2}$. Similiter si ponatur $\frac{1}{A^n} = B$, & ideò $\frac{1}{A^n} \times A^n = A^n B = 1$, erit per cas. 3. & 1. $n a A^{n-1} B + b A^n = 0$ & $b A^n = -n a A^{n-1} B = \frac{-n a A^{n-1}}{A^n} = \frac{-na}{A}$, atque adeò b, seu momentum ipsius $\frac{1}{A^n}$, erit $\frac{-n a}{A^{n+1}}$. Simili modo patent casus 5. & 6. 90.

(k) * *Momenta terminorum reliquorum.* Quoniam enim A, B, C, D, E, F, sunt continuè proportionales, erit $D : C = C : B = \frac{C C}{D} = C C D^{-1}$ & similiter invenitur $A = \frac{C^3}{D^2} = C^3 D^{-2}$, $E = \frac{D^2}{C}$, $F = \frac{D^3}{CC}$ &c.

termini multiplicati per numerum intervallorum inter ipsos & terminum datum. Sunto A, B, C, D, E, F continuè proportionales; & si detur terminus C, momenta reliquorum terminorum erunt inter se ut — 2 A — B, D, 2 E, 3 F.

(l) *Corol.* 2. Et si in quatuor proportionalibus duæ mediæ dentur, momenta extremarum erunt ut eædem extremæ. Idem intelligendum est de lateribus rectanguli cujuscunque dati.

(m) *Corol.* 3. Et si summa vel differentia duorum quadratorum detur, momenta laterum erunt reciprocè ut latera.

Scholium.

In epistolâ quâdam ad D. *J. Collinium* nostratem 10. Decem. 1672. datâ, cùm descripsissem methodum tangentium quam suspicabar eandem esse cum methodo *Slusii* tum nondum communicatâ; subjunxi: *Hoc est unum particulare vel corollarium potius methodi generalis, quæ extendit se citra molestum ullum calculum, non modo* (n) *ad ducendum tangentes ad quasvis curvas sive geometricas sive mechanicas vel quomodocunque rectas lineas aliasve curvas respicientes, verùm etiam ad resolvendum alia abstrusiora problematum genera de* (o) *curvitatibus*, (p) *areis, longitudinibus*,

Quarè ob datum C, cujus nullum est momentum, momenta reliquorum terminorum erunt (per cas. 3. & 4.) $-2\,d\,C^3 D^{-3}$, $-d\,C^2 D^{-2}$, d, $\frac{2\,d\,D}{C}$, $\frac{3\,d\,D^2}{C\,C}$, & multiplicando singulos terminos per $\frac{D}{d}$, manebit proportio terminorum $-2\,C^3 D^{-2}$, $-C^2 D^{-1}$, D, $\frac{2\,D^2}{C}$, $\frac{3\,D^3}{C\,C}$, hoc est $-2A$, $-B$, D, $2E$, $3F$. Est autem 2 numerus intervallorum inter terminum A, & terminum datum C, sicut & intervallorum inter E & C, 1 intervallum inter B & C, ac inter C & D, & 3, numerus intervallorum inter C & F. Quarè patet veritas corollarii.

(l) * *Cor.* 2. Sit $A : B = C : D$, seu $BC = AD$ & BC, rectangulum datum erit (per cas. 1.) $ad + dA = 0$, & hinc $aD = -dA$ ideóque $a : -d = A : D$.

(m) * *Cor.* 3. Sit $A^2 + B^2 = C^2$, & quadratum C^2 sit datum, erit (per cas. 3.) $2aA + 2bB = 0$, ideóque $Aa = -bB$, & proinde $a : -b = B : A$. In iis duobus corollariis necessum est ut variabili unâ crescente, decrescat altera, & idcircò dum momentum unius positivum est, alterius momentum est negativum.

(n) * *Ad ducendum tangentes* (150. 156. lib. 1.) vide Marchionis *Hospitalii* Analysim infinitè parvorum, ubi methodus illa tangentium fusè & perspicuè exponitur.

(o) *De curvitatibus* (216. lib. 1.).

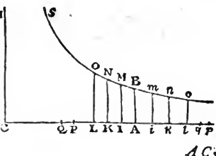
(p) * *Areis, longitudinibus* &c. Hæc plurimis exemplis, tum 1°. tum 2°. libro contentis manifesta sunt. Vide tractatum NEWTONI de quadraturâ curvarum.

bus, (q) *centris gravitatis curvarum &c. neque* (*quemadmodum* Huddenii *methodus de maximis & minimis*) *ad solas restringitur æquationes illas quæ quantitatibus surdis sunt immunes. Hanc methodum intertexui alteri isti quâ æquationum exegesin instituo reducendo eas ad series infinitas.* Hactenus epistola. Et hæc ultima verba spectant ad tractatum quem anno 1671 de his rebus scripseram. Methodi verò hujus generalis fundamentum continetur in lemmate præcedente. (r)

PROPOSITIO VIII. THEOREMA VI.

Si corpus in medio uniformi, gravitate uniformiter agente, rectâ ascendat vel descendat, & spatium totum descriptum distinguatur in partes æquales, inque principiis singularum partium (addendo resistentiam medii ad vim gravitatis, quando corpus ascendit, vel subducendo ipsam quando corpus descendit) investigentur vires absolutæ; dico quòd vires illæ absolutæ sunt in progressione geometricâ.

Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam AC; resistentia per lineam indefinitam AK; vis absoluta in descensu corporis per differentiam KC; velocitas corporis per lineam AP, quæ sit media proportionalis inter AK & AC;

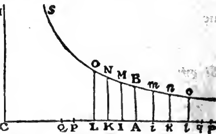


(q) * *Centris gravitatis* (66. lib. 1.).

(r) In præcedentibus Editionibus istud scholium hoc modo se habebat.

In litteris quæ mihi cum Geometrâ peritissimo G. G. *Leibnitio* annis abhinc decem intercedebant, cùm significarem me compotem esse methodi determinandi maxima & minima, ducendi Tangentes, & similia peragendi, quæ in terminis surdis æque ac in rationalibus procederet, & literis transpositis hanc sententiam involventibus. (*Datâ æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versâ* (eamdem celarem; Rescripsit Vir Clarissimus se quoque in ejusmodi methodum incidisse, & methodum suam communicavit, à meâ vix abludentem, præterquàm in verborum & notarum formulis, & ideâ generationis quantitatum. Utriusque fundamentum continetur in hoc Lemmate. 90.

AC, (s) ideoque in subduplicatâ ratione resistentiæ; incrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam KL, & contemporaneum velocitatis incrementum per lineolam PQ; & centro C asymptotis rectangulis CA, CH describatur hyperbola quævis BNS, erectis perpendiculis AB, KN, LO occurrens in B, N, O. Quoniam AK est ut APq, erit hujus momentum KL ut (t) illius momentum $2\,APQ$: id est, ut AP in KC, nam velocitatis incrementum PQ (*per motûs leg.* II.) proportionale est vi generanti KC. Componatur ratio ipsius KL cum ratione ipsius KN, & fiet



rectangulum $KL \times KN$ ut $AP \times KC \times KN$; hoc est, ob (u) datum rectangulum $KC \times KN$, ut AP. Atqui areæ hyperbolicæ $KNOL$ ad rectangulum $KL \times KN$ ratio ultima, ubi coeunt puncta K & L, est æqualitatis. Ergo area illa hyperbolica evanescens est ut AP. Componitur igitur area tota hyperbolica $ABOL$ ex particulis $KNOL$ velocitati AP semper proportionalibus, & (x) propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. & vires absolutæ AC, IC, KC, LC, &c. (y) erunt in progressione geometricâ. *Q. E. D.* Et (z) simili argumento, in ascensu corporis, sumen-

(s) * *Ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ.* Ob datam A C.

(t) * *Ut illius momentum 2 A P Q.* Cùm enim sit $AK \times AC = AP^2$ (*per constr.*) erit $AC \times KL = 2\,AP \times PQ$ (*per cas.* 1. & 3. *Lem.* 2.) id est, ob datam A C; K L est ut $AP \times PQ$, & quia velocitatis incrementum P Q, dato temporis momento genitum (*per mot. leg.* 2.) proportionale est vi generanti K C, erit K L, ut $AP \times KC$.

(u) * *Ob datum rectangulum* $KC \times KL$ (per theor. 4. de hyp.).

(x) * *Et propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est*; dato enim temporis momento, spatium descriptum est ut velocitas (12).

(y) * *Erunt in progressione geometricâ* (379. lib. 1.).

(z) * *Et simili argumento.* Exponatur enim vis gravitatis per datam lineam A C, resistentia per lineam indefinitam

A I,

mendo, ad contrariam partem puncti *A*, æquales areas *A B m i*, *i m n k*, *k n o l*, &c. conſtabit quod vires abſolutæ *A C*, *i C*, *k C*, *l C*, &c. ſunt continuè proportionales. Ideoque ſi ſpatia omnia in aſcenſu & deſcenſu capiantur æqualia; omnes vires abſolutæ *l C*, *k C*, *i C*, *A C*, *I C*, *K C*, *L C*, &c. erunt continuè proportionales. *Q. E. D.*

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. VIII. Theor. VI.

Corol. 1. Hinc ſi ſpatium deſcriptum exponatur per aream hyperbolicam *A B N K*; exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia medii per lineas *A C*, *A P* & *A K* reſpectivè; & vice versâ. (a)

Corol. 2. Et velocitatis maximæ, quam corpus in infinitum deſcendendo poteſt unquam acquirere, (b) exponens eſt linea *A C*.

Corol. 3. Igitur ſi in datâ aliquâ velocitate cognoſcatur reſiſtentia medii, invenietur velocitas maxima, ſumendo ipſam ad velocitatem illam datam in ſubduplicatâ ratione, quam habet vis gravitatis (c) ad medii reſiſtentiam illam cognitam.

PRO-

A l, vis abſoluta velocitatem minuens in aſcenſu corporis per ſummam C l, velocitas corporis per lineam A p quæ ſit media proportionalis inter A l & A C, ideóque in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiæ; decrementum reſiſtentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam l k, & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam p q; & deſcribatur ut ſuprà hyperbola S B o; Quoniam A l eſt ut A p² erit hujus momentum k l ut illius momentum 2 A p q, id eſt, ut A p in l C; nam velocitatis decrementum p q (*per mot. leg.* 2.) proportionale eſt vi generanti l C, componatur ratio ipſius k l cum ratione ipſius l o, & fiet rectangulum k l × l o ut A p × l C × l o, hoc eſt, ob datum rectangulum l C × l o, ut A p. Ergo, coeuntibus punctis k, l, area hyperbolica k n o l = k l × l o, eſt ut A p. Componitur igitur area tota hyperbolica 2 A B o l ex particulis k n o l velocitati A p ſemper proportionalibus, & propterea ſpatio velocitate iſtâ deſcripto proportionalis eſt. Dividatur jam area illa in partes æquales A B m i; i m n k, k n o l, &c. & vires abſolutæ l C, 90.
k C, i C, A C, &c. erunt in progreſſione geometricâ. Q. E. D.

(a) * Simili modo ſi in aſcenſu corporis, ſpatinm uſque ad motûs extinctionem deſcribendum exponatur per aream hyperbolicam A B n k exponi poſſunt vis gravitatis, velocitas corporis & reſiſtentia medii per lineas A C, A p, A k reſpectivè; & vice versâ.

(b) * *Exponens eſt linea A C.* Fiat enim A P = A C, & quia (*per conſtr.*) A P² = A K × A C, erit etiam A K = A C, ideóque coincidente ordinatâ K N, cum aſymptoto C H, area hyperbolica A B N K, infinita evadet, & ſpatium deſcendendo deſcriptum huic proportionale erit quoque infinitum, gravitas verò, reſiſtentia & velocitas corporis exponentur per lineam A C, eritque proinde reſiſtentia gravitati æqualis, & propterea velocitas A C maxima.

(c) * *Ad medii reſiſtentiam illam cognitam.* Cùm enim velocitates ſint in ſubduplicatâ ratione reſiſtentiarum (*per hyp.*) & reſiſtentia ſit gravitati æqualis, ubi velocitas maxima eſt, (*per cor.* 2.)

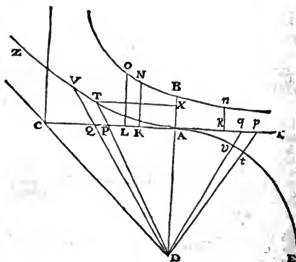
ve-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

PROPOSITIO IX. THEOREMA VII.

Positis jam demonstratis, dico quòd, si tangentes angulorum sectoris circularis & sectoris hyperbolici sumantur velocitatibus proportionales, existente radio justæ magnitudinis: erit tempus omne ascendendi ad locum summum ut sector circuli, & tempus omne descendendi à loco summo ut sector hyperbolæ.

Rectæ AC, quâ vis gravitatis exponitur, perpendicularis & æqualis ducatur AD. Centro D semidiametro AD descri-



batur tum circuli quadrans AtE; tum hyperbola rectangula AVZ axem habens AX, verticem principalem A, & asymptoton DC. Ducantur Dp, DP, & erit sector circularis AtD ut tempus omne ascendendi ad locum summum; &

velocitas maxima erit ad velocitatem datam in subduplicatâ ratione gravitatis ad medii resistentiam illam cognitam.

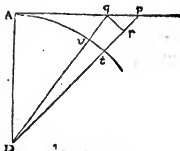
& sector hyperbolicus ATD ut tempus omne descendendi à loco summo: Si modò sectorum tangentes Ap, AP, sint ut velocitates.

Cas. 1. Agatur enim Dvq abscindens sectoris ADt & trianguli ADp momenta, seu particulas quàm minimas simul descriptas tDv & qDp. Cùm particulæ illæ, ob angulum communem D, sunt in (d) duplicatâ ratione laterum, erit particula tDv ut $\frac{qDp \times tD \ quad.}{pD \ quad.}$, id est, ob datam tD, ut $\frac{qDp}{pD \ quad.}$. Sed pD *quad.* est AD *quad.* $+ Ap$ *quad.* id est, (e) AD *quad.* $+ AD \times Ak$, seu $AD \times Ck$; & (f) qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Ergo sectoris particula tDv est ut $\frac{pq}{Ck}$, id est, ut velocitatis decrementum quàm minimum pq directè, & vis illa Ck quæ velocitatem diminuit inversè; (g) atque ideo ut particula temporis decremento velocitatis respondens. Et componendo fit summa particularum omnium tDv in sectore ADt, ut summa particularum temporis singulis velocitatis

(d) * *In duplicatâ ratione laterum.* Nam si ex puncto q ducatur ad Dp lineola qr parallela ipsi vt, duo triangula evanescentia Dqr, Dvt similia sunt & in ratione duplicatâ laterum Dq, Dv, (*per prop. 19. lib. 6. Elem.*) & triangulum Dqp æquale est triangulo Dqr evanescente pr respectu Dq; est igitur pD^2 ad tD^2, seu AD^2, ut triangulum qDp ad triangulum tDv, & ideo $tDv = \frac{AD^2 \times qDp}{pD^2}$, undè ob datum circuli radium AD, particula tDv est ut $\frac{qDp}{pD^2}$.

(e) * *Id est,* Nam $AC \times Ak$, seu $AD \times Ak = Ap^2$ (*per constr. prop. 8.*) & $AD^2 + AD \times Ak = AD \times (AC + Ak) = AD \times Ck$.

(f) * *Et* qDp *est* $\frac{1}{2} AD \times pq$, ob AD basi pq productæ normalem.



90.

(g) * *Atquè ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens* (18).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. IX. THEOR. VII.

tis decrescentis Ap particulis amissis pq respondentium, usque dum velocitas illa in nihilum diminuta evanuerit; hoc est, sector totus ADt est ut tempus totum ascendendi ad locum summum. *Q. E. D.*

Cas. 2. Agatur DQV abscindens tum sectoris DAV, tum trianguli DAQ particulas quàm minimas TDV & PDQ, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DTq ad DPq, id est (si TX & AP parallelæ sint) ut (h) DXq ad DAq vel TXq ad APq, & divisim ut $DXq-TXq$ ad $DAq-APq$. (i) Sed ex naturâ hyperbolæ $DXq-TXq$ est ADq, & per hypo-

(h) * *Ut* DX^2 *ad* DA^2, ob triangula DTX, DPA similia (*per prop.* 2. *lib.* 6. *Elem.*)

(i) * *Sed ex natura hyperbola &c.* Quoniam (*per theor.* 2. *de hyperb.*) rectangulum $\overline{2AD+AX}\times AX$, est ad quadratum ordinatæ TX, ut latus transversum est ad latus rectum, hæc verò Hyperbola est æquilatera, erit (*per theor.* 5. *de hyperb.*) $TX^2=\overline{2AD+AX}\times AX$. Sed est $\overline{2AD+AX}\times AX=DX^2-DA^2$ (*per prop.* 6. *lib.* 2. *Elem.*) ergò $TX^2=DX^2-DA^2$, ac proinde $DX^2-TX^2=DA^2$.

(k) hypothesin APq est $AD \times AK$. Ergo particulæ sunt ad invicem ut ADq ad $ADq - AD \times AK$; id est, ut AD ad $AD - AK$ seu AC ad CK: ideoque sectoris particula TDV est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; atque ideo (l) ob datas AC & AD, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est, ut incrementum velocitatis directè, utque vis generans incrementum inversè; atque ideo ut particula temporis incremento respondens. Et componendo fit summa particularum temporis, quibus omnes velocitatis AP particulæ PQ generantur; ut summa particularum sectoris ATD, id est, tempus totum ut sector totus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si AB æquetur quartæ parti ipsius AC, spatium quod corpus tempore quovis cadendo describit, erit ad spatium, quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area $ABNK$, quâ spatium cadendo descriptum exponitur, ad aream ATD, quâ tempus exponitur. Nam cùm sit AC ad AP ut AP ad AK, erit (*per corol.* 1. *lem.* 11. *hujus*) LK ad PQ ut 2 AK ad AP, hoc est, ut 2 AP ad AC, & inde LK ad $\frac{1}{2}$ PQ ut AP ad $\frac{1}{4}$ AC vel AB; est & KN ad AC vel AD ut (m) AB ad CK; itaque ex æquo $LKNO$ ad DPQ ut AP ad CK. (n) Sed erat DPQ ad DTV ut CK ad AC. Ergo rursus ex æquo $LKNO$ est ad DTV ut AP ad AC; hoc est, ut velocitas corporis cadentis ad velocitatem maximam quam corpus cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum $ABNK$ & ATD momenta $LKNO$ & DTV sunt ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ (†) ut spatia simul descripta, ideoque areæ totæ ab initio geni-

(k) * *Et per hypothesim* AP^2 *est* $AD \times Ak$, seu $AC \times Ak$ (*per construct. prop.* 8.)

(l) * *Ob datas* AC & AD. Est enim $PDQ = \frac{1}{2} AD \times PQ$, & ideò $TDV = \frac{\frac{1}{2} AD \times AC \times PQ}{CK}$.

(m) * *Ut* AB *ad* CK (per theor. 90. 4. de hyperb.

(n) * *Sed erat* DPQ *ad* DTV &c. Suprà cas. 2.

(†) * *Ut spatia simul descripta* (11).

genitæ *A B N K* & *A T D* ut ſpatia tota ab initio deſcenſus deſcripta. *Q. E. D.*

Corol. 2. (o) Idem conſequitur etiam de ſpatio quod in aſcenſu deſcribitur. Nimirum quòd ſpatium illud omne ſit ad ſpatium, uniformi cum velocitate *A C* eodem tempore deſcriptum, ut eſt area *A B n k* ad ſectorem *A D t*.

Corol. 3. Velocitas corporis tempore *A T D* cadentis eſt ad velocitatem, quam eodem tempore in ſpatio non reſiſtente acquireret, ut triangulum *A P D* ad ſectorem hyperbolicum *A T D*.

(o) * *Idem conſequitur* &c. Eadem eſt prorſus demonſtratio, ſi loco A K & Q P ſubſtituantur A k & q p, & ad primum demonſtrationis caſum attendatur.

91. *Cor.* Velocitas A p corporis in medio reſiſtente aſcendentis ad maximam altitudinem A B n k, eſt ad velocitatem A P corporis in eodem medio è quiete deſcendentis per æquale ſpatium A B N K, ut ſecans anguli A D p ad radium, aut quod idem eſt, ut tangens A p anguli A D p, ad ejuſdem ſinum. Quoniam enim (*per hyp.*) area A B N K, æqualis eſt A B n k, erit (380. *Lib.* 1.) $Ck : AC = AC : CK$, & dividendo $Ak : AC = AK : CK$, & alternando, $Ak : AK = AC : CK = Ck$ (ſive $AC + Ak$) $: AC$, & ideò $Ak \times AC : AK \times AC = AC^2 + Ak \times AC : AC^2$; Sed (*per conſtruct. prop.* 8.) $AC \times Ak = Ap^2$, & $AC \times AK = AP^2$. Quare $Ap^2 : AP^2 = AC^2 + Ap^2$ ſeu $Dp^2 : AC^2$, & hinc $Ap : AP = Dp : AC$, ſeu A D. Q. E. D.

ATD. Nam velocitas in medio non resistente (p) foret ut tempus *ATD*, & in medio resistente est ut *AP*, id est, ut triangulum *APD*. Et (q) velocitates illæ initio descensus æquantur inter se, perinde ut areæ illæ *ATD*, *APD*.

Corol. 4. (r) Eodem argumento velocitas in ascensu est ad velocitatem, quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum *ApD* ad sectorem circularem *AtD*; sive ut recta *Ap* ad arcum *At*.

Corol. 5. Est igitur tempus, quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem *AP*, acquirit, ad tempus, quo velocitatem maximam *AC* in spatio non resistente cadendo acquirere posset, (s) ut sector *ADT* ad triangulum *ADC*: & tempus,

(p) * *Foret ut tempus A T D.* Cresceret enim uniformiter, ideóque ut tempus (21. *lib.* 1.)

(q) * *Et velocitates illæ initio descensûs æquantur inter se* ob resistentiam respectu gravitatis nullam, ubi velocitas nascitur. Cùm igitur velocitates in medio non resistente sint semper inter se ut areæ A T D, & in medio resistente sint ut triangula A P D, erit velocitas in medio resistente tempore finito A T D acquisita ad velocitatem initio descensûs in eo medio resistente ut triangulum finitum A P D, ad triangulum nascens A P D, & erit velocitas initio descensûs in medio non resistente ad velocitatem in eodem medio tempore finito A T D acquisitam, ut area nascens A T D (æqualis areæ nascenti A P D) ad aream finitam A T D; Quare (ex æquo) velocitas corporis tempore finito A T D cadentis in medio resistente est ad velocitatem quam eodem tempore in medio non resistente cadendo acquireret ut triangulum A P D ad sectorem hyperbolicum A T D.

(r) * *Eodem argumento.* Nam velocitas in medio non resistente foret ut tempus A t D, & in medio resistente est ut A p, id est, ut triangulum a p D ob datam A D, & velocitates illæ in fine ascensûs, ubi evanescunt, æquantur inter se, perindè ut areæ evanescentes A t D, A p D; est autem triangulum A p D $= \frac{1}{2}$ A D × A p, & sector circularis A t D, $= \frac{1}{2}$ A D × A t. Quarè A p D est ad A t D, ut A p ad A t. 91.

92. Hinc si velocitas ascensûs A p in medio resistente velocitati maximæ A C æqualis fuerit, erit velocitas A p seu A C, ad velocitatem quâ corpus eodem tempore in spatio non resistente omnem suum ascendendi motum amittere posset, ut triangulum A C D, ad octantem circuli, sive ut radius ad octavam partem peripheriæ, aut quod idem est, ut quadratum circulo circumscriptum ad circuli aream. Dum enim fit A p = A C, triangulum A p D æquatur triangulo A C D, & sector A t D, octanti circuli, ideóque arcus A t est pars octava peripheriæ; & triangulum A C D est ad sectorem A t D, ut A C ad arcum A t, ac prætereà triangulum A C D, ob A C = A D; est pars octava quadrati circulo circumscripti.

(s) * *Ut sector A D T ad triangulum A D C.* Cùm enim A P exponat velocitatem tempore A T D in medio resistente acquisitam, sumatur A Y talis ut exponat velocitatem tempore eodem in medio non resistente productam, & erit per Coroll. 3. A P ad A Y ut A P D, ad A T D, cùmque etiam A C exponat velocitatem maximam,

pus, quo velocitatem *Ap* in medio resistente ascendendo possit amittere, ad tempus quo velocitatem eandem in spatio non resistente ascendendo posset amittere, ut (ᵗ) arcus *At* ad ejus tangentem *Ap*.

Corol. 6. Hinc ex dato tempore datur spatium ascensu vel descensu descriptum. Nam corporis in infinitum descendentis datur velocitas maxima (*per corol.* 2. & 3. *theor.* VI. *lib.* II.) inde-

ximam, erit A Y ad A C ut tempus quo prior celeritas A Y in medio non resistente acquiri potest, ad tempus quo velocitas maxima A C in medio etiam non resistente acquireretur, & cùm tempus quo celeritas A Y acquiritur, exprimatur per aream A T D, erit A Y ad A C ut A T D ad aream quæ exponet tempus quo velocitas maxima in medio non resistente acquiritur, itaque cùm sit A P : A Y = A P D : A T D & A Y : A C = A T D : ad hanc aream, erit ex æquo A P : A C = A P D, ad hanc aream, sed sumptâ communi altitudine D A est A P ad A C = Tri. A P D ad Tri. A D C; ergo area quæ exponet tempus quo maxima velocitas in medio non resistente acquiritur, est area A D C. Undè sequitur quòd corpus in medio resistente, velocitatem maximam A C acquirere cadendo non potest nisi tempore infinito. Cùm enim sit A P = A C, coincidit D T cum Hyperbolæ A T V asimptoto DC, & sector A D T fit infinitus.

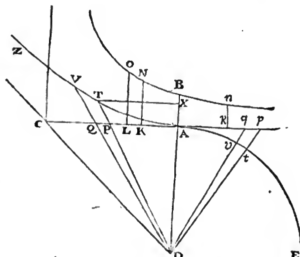
(ᵗ) * *Ut arcus At, ad ejus tangentem Ap.* Siquidem (*per cor.* 4.) velocitas A p in medio resistente tempore A t D extinguenda, est ad velocitatem eodem tempore in spatio non resistente extinguendam ut triangulum A p D ad sectorem A t D; & etiam ut tempus quo velocitas A p in spatio non resistente extingueretur ad tempus A t D quo altera velocitas in spatio non resistente extinguitur, quod idem est cum eo quo velocitas A p in spatio resistente extinguitur. Quare tempus quo velocitas A p, in spatio non resistente evanesceret est ad tempus A t D quo in spatio resistente extingueretur ut triangulum A p D, ad sectorem A t D, sive tangens A p ad ejus arcum A t. Patet ergò propositum.

93. Hinc tempus quo corpus velocitatem A p in medio resistente ascendendo amittere potest, est ad tempus quo velocitatem maximam A C in spatio non resistente ascendendo amitteret, vel descendendo acquireret, ut sector circularis A t D, ad triangulum A D C, seu ut arcus A t ad radium A D. Nam in medio non resistente velocitas A p est ad velocitatem A C, ut tempus A p D, quo generatur vel extinguitur velocitas A p, ad tempus quo generatur vel extinguitur velocitas A C, quod proindè erit $\frac{A\,C \times A\,p\,D}{A\,p}$, seu $\frac{1}{2}$ A D × A C, hoc est, triangulum A D C.

Cùm igitur tempus quo velocitas A p, in medio resistente extinguitur, exponatur per sectorem A t D, patet propositum.

94. Tempus quo corpus in medio resistente descendendo acquirit velocitatem A P, vel ascendendo amittit velocitatem A p, est ad tempus quo eandem velocitatem in medio non resistente acquirit vel amittit, ut sector A D T, vel A D t, ad triangulum A D P, vel A D p, respectivè. Etenim (*per cor.* 5. & *not.* 93.) tempus quo in medio resistente generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas maxima A C, ut A D T vel A D t, ad A D C; Et tempus quo in spatio non resistente generatur vel extinguitur velocitas A C, est ad tempus quo generatur vel extinguitur in eodem spatio non resistente, velocitas A P vel A p, ut A C ad A P vel A p, & sumptâ communi altitudine D A ut A D C ad A P D vel A p D. Quarè (ex æquo) tempus quo in medio resistente ge-

(u) indeque datur tempus quo corpus velocitatem illam in spatio non resistente cadendo posset acquirere. Et sumendo secto-



rem *ADT* vel *ADt* ad triangulum *ADC* in ratione temporis dati ad tempus modo inventum; (x) dabitur tum velocitas *AP*

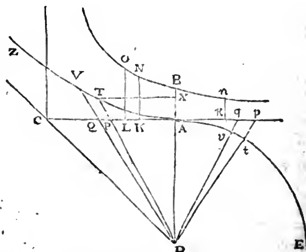
generatur velocitas A P, vel extinguitur velocitas A p, est ad tempus quo velocitas eadem in spatio non resistente producitur vel amittitur, ut A D T ad A D P, vel A D p. Q. E. D.

95. Si celeritas A p corporis in medio resistente ascendentis maximæ A C æqualis fuerit, erit A D p = A D C, & sector A D t, circuli octans. Quare tempus quo corpus in medio resistente ascendendo amittere potest velocitatem maximam A C est ad tempus quo eandem in spatio non resistente amitteret, ut circuli octans ad triangulum A D C, hoc est, ut area circuli ad quadratum circumscriptum, seu etiam ut 8a. pars peripheriæ ad radium.

(u) 96. *Indéque datur tempus.* Cùm enim vires acceleratrices uniformes, sint ut velocitates quas generant directè & tempora quibus illas generant inversè (13. *lib.* 1.) datâ vi acceleratrice uniformi quâ corpus in medio quovis sollicitatur, seu datâ vis illius ratione ad notam quamlibet aliam vim v. gr. ad corporum terrestrium gravitatem, datâque simul velocitate quam vis illa acceleratrix produxit, dabitur tempus quo velocitas illa data genita est. Sit enim vis acceleratrix data ad vim notam gravitatis, ut a ad b, velocitas datâ vi illâ acceleratrice tempore x genita c, & velocitas quam vis gravitatis tempore quovis dato t generat C, erit $a : b = \frac{c}{x} : \frac{C}{t}$. Undè invenitur tempus $x = \frac{bct}{aC}$. 96.

(x) * *Dabitur tum velocitas* A P, vel A p. (Per cor. 5. & not. 92).

A P vel *Ap*, (y) tum area *ABNK* vel *A B n k*, (z) quæ eſt ad ſectorem *A D T* vel *A D t* ut ſpatium quæſitum ad ſpatium, quod tempore dato, cum velocitate illâ maximâ jam ante inventâ, uniformiter deſcribi poteſt.



Corol. 7. (a) Et regrediendo, ex dato aſcenſûs vel deſcenſûs ſpatio *AB n k* vel *ABNK*, dabitur tempus *A D t* vel *ADT*.

PRO-

(y) * *Tum area ABNK vel AB n k.* Eſt enim (*per conſtruct. prop.* 8.) A C : A P = A P : A K, & A C : A p = A p : A k, & ideò datis A C & A P vel A p dabuntur A K vel A k , & ... correſpondentes A B N K, A B n k, quæ per tabulas Logarithmorum inveniri poſſunt (384. *lib.* 1.).

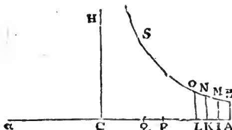
(z) * *Quæ eſt ad ſectorem A D T, vel A D t.* (per cor. 1. & 2.).

(a) 97. *Et regrediendo.* Nimirum capienda eſt area A B n k, vel A B N K ad triangulum ADC in datâ ratione ſpatii dati aſcenſûs vel deſcenſûs ad duplum ſpatii, quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit ut velocitatem maximam A C acquirat, atque ità dabitur A k vel A K. Et hinc dabitur A p vel A P, ſeu velocitas; ex his autem dabitur ſector A D t vel A D T, ſeu tempus (*per cor.* 5.). Nam ſpatium quod corpus in medio non reſiſtente cadendo deſcribit, ut velocitatem maximam A C acquirat, dicatur *A*, tempus quo ſpatium illud deſcribitur *T*, ſpatium quod in medio reſiſtente deſcribit ut acquirat velocitatem A P, vel amittat velocitatem A p dicatur *s*, tempus *t*, & ſpatium quod corpus tempore illo *t* & velocitate maximâ A C uniformiter progrediendo deſcribit ſit *S*, & quia (29. *lib.* 1.) corpus velocitate maximâ A C uniformiter

ter progrediendo, tempore T, describit spatium $2A$, erit (5. *lib.* 1.) $S : 2A = s : T$. Sed (*per cor.* 5. *& not.* 93.) $s : T =$ A D T vel A D t : A D C, ideóque $S : 2A =$ A D T vel A D t : A D C, & (*per cor.* 1. *ac* 2.) $s : S =$ A B N K vel A B n k : A D T vel A D t, respectivè. Quarè (ex æquo) $s : 2A =$ A B N K vel A B n k : A D C. Q. E. D.

98. Si corpus cum velocitate quæ æqualis sit maximæ A C, verticaliter projiciatur deorsum, æquabili motu descendet, ob resistentiam gravitati æqualem & contrariam (*per cor.* 2. *prop.* 8.) si minori cum velocitate projiciatur, exponatur velocitas illa per lineæ A C partem A P, & motus corporis projecti idem erit ac si è quiete descendendo velocitatem datam A P, jam acquisivisset & deindè pergeret moveri; Quare motus projecti in hoc casu ex superioribus facile determinabitur.

98.



99. Verùm si projectionis velocitas terminali A C major est, constructiones propositionum 8 & 9 mutandæ erunt. Et quidem constructio propositionis 8æ. sic mutanda. Descripta inter asymptotos orthogonales A C, C H Hyperbolâ quâlibet S O N B, producatur asymptotus A C in a, & exponatur vis gravitatis per datam lineam a C, resistentia initio motûs per lineam a A, resistentia elapso quovis tempore per lineam indefinitam a K. Velocitas corporis per lineam a P quæ sit media proportionalis inter a K & a C, ideóque in subduplicatâ ratione resistentiæ. Decrementum resistentiæ datâ temporis particulâ factum per lineolam K L & contemporaneum velocitatis decrementum per lineolam P Q. Quoniam a K est ut a P^2, erit hujus momentum K L, ut illius momentum 2 a P Q, id est, ut a P in K C. Nam velocitatis decrementum P Q, (*per mot. Leg.* 2.) proportionale est vi generanti K C, quæ est excessus resistentiæ a K, suprà vim gravitatis a C. Componatur ratio ipsius K L cum ratione ipsius K N, & fiet rectangulum K L × K N ut a P × K C × K N, hoc est, ob datum rectangulum K C × K N, ut a P, ergò rectangulum evanescens K N × K L, hoc est, area hyperbolica K N O L, est ut a P. Componitur igitur area tota hyperbolica A B O L, ex particulis K N O L, velocitati a P semper proport[illegible] propterea spatio velocitate istâ descripto proportionalis est. Dividatur jam area illa in partes æquales A B M I, I M N K, K N O L, &c. & vires absolutæ A C, I C, K C, L C, &c. erunt in progressione geometricâ. Si spatium descriptum exponatur per aream Hyperbolicam A B N K, exponi possunt vis gravitatis, velocitas corporis & resistentia medii per lineas a C, a P, a K.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.

Propositionis 5[æ]. constructio in hanc abit. Cæteris ut in figurâ & constructione superiori manentibus, capiatur a F media proportionalis inter a C & a A, & ideò velocitatem projectionis initialem exponens, completo quadrato a C E D, centro D describatur hyperbola rectangula E G T V, semiaxem transversum habens D E, verticem principalem E, & asymptotum D C. Jungantur D F, D P Hyperbolæ occurrentes in G & T, & erit sector hyperbolicus G D T ut tempus descensûs per spatium A B N K. Agatur enim D V Q abscindens tum sectoris G D V tum trianguli F D Q particulas quam minimas T D V, P D Q, & erunt hæ particulæ ad invicem ut DT^2 ad DP^2, id est, si T X & a P parallelæ sint, ut DX^2 ad Da^2, vel TX^2 ad aP^2, & divisim ut $TX^2 - DX^2$ ad $ap^2 - aD^2$, sed (*ex natu â Hyperb.*) $TX^2 - DX^2$ est aD^2, & (*per Hyp.*) ap^2 est $aD \times aK$; ergò particulæ T D V, P D Q, sunt ad invicem ut aD^2, ad $aD \times aK - aD^2$, id est, ut a D ad $aK - aD$, seu ut a C ad C K, ideóque sectoris particula T D V, est $\frac{PDQ \times aC}{CK}$, atque ideo ob datas a C & a D, ut $\frac{PQ}{CK}$, id est ut decrementum velocitatis directè utque vis generans decrementum inversè, atque ideò ut particula temporis decremento velocitatis respondens, & componendo, fit summa particularum temporis quibus omnes velocitatis F P particulæ P Q extinguuntur, ut summa particularum sectoris G D T, id est, tempus totum ut sector totus. Q. E. D.

100. *Coroll.* 1. Quoniam coincidente puncto P cum C, coincidit etiam K cum C, & D T cum asymptoto D C, liquet corporis projecti velocitatem a P nonnisi descripto spatio infinito, elapsoque infinito tempore, fieri posse velocitati terminali a C æqualem.

101. *Coroll.* 2. Si dignitas hyperbolæ BNO seu rectangulum $CA \times AB$, sit $\frac{1}{2} aC^2$, spatium quod corpus tempore quovis describit, erit ad spatium quod corpus velocitate terminali a C eodem tempore uniformiter progrediendo describere potest, ut area A B N K quâ spatium descriptum exponitur ad aream G D T quâ tempus exponitur. Nam cùm sit a C ad a P, ut a P ad a K, erit (*per cor. 1. Lem. 2. lib. 2.*)

2.) L K ad P Q ut 2 a K ad a P, hoc est, ut 2 a P ad a C, & indè L K ad $\frac{1}{2}$ P Q, ut a P ad $\frac{1}{4}$ a C. (*ex naturâ hyperb. & per hyp*) K N × C K est C A × A B, seu $\frac{1}{4}$ a C², ideóque K N ad a C seu a D, ut $\frac{1}{4}$ a C ad C K. Itaque (ex æquo) L K N, ad D P Q, ut a P, ad C K; sed erat D P Q, ad D T V, ut C K ad a C, ergò rursùs (ex æquo), LKN, est ad D T V, ut a P, ad a C, hoc est, ut velocitas corporis projecti est ad velocitatem maximam quam corpus è quiete cadendo potest acquirere. Cùm igitur arearum A B N K & G D T, momenta L K N & D T V sint ut velocitates, erunt arearum illarum partes omnes simul genitæ ut spatia simul descripta, ideóque areæ totæ ab initio genitæ A B N K & G D T, ut spatia tota ab initio projectionis descripta.

102. *Coroll.* 3. Velocitas a P corporis projecti in fine temporis G T D, est ad velocitatem quam corpus velocitate initiali a F projectum eodem tempore in medio non resistente cadendo haberet, ut triangulum a P D ad summam trianguli a F D & sectoris hyperbolici G T D. Nam velocitatis incrementum tempore G T D in spatio non resistente genitum est ut tempus G T D, & velocitas projectionis ut a F, sive ut triangulum A F D, atque adeò velocitas tota in fine temporis G T D ut G T D + a F D, & velocitas in fine temporis ejusdem G T D in medio resistente est ut a P, id est, ut triangulum a P D, & velocitates illæ initio projectionis æquantur inter se, perindè ut areæ illæ G T D + a F D & a P D, ob sectorem G T D evanescentem, & a P æqualem a F initio descensûs.

103. *Coroll.* 4. Tempus quo corpus in medio resistente projectum acquirit velocitatem a P, seu quo amittit velocitatem P F, est ad tempus quo velocitatem maximam a C, in spatio non resistente è quiete cadendo acquirere posset, ut sector G D T ad triangulum a D C. Sit a F + V, recta velocitatem exponens quam corpus in medio non resistente cum velocitate initiali a F projectum elapso tempore G D T haberet, & erit (102) a P ad a F + V, seu multiplicando per $\frac{1}{2}$ A D, a P D ad a F D + $\frac{1}{2}$ a D × V, ut a P D ad a F D + G T D, idéoque $\frac{1}{2}$ a D × V = G T D, & $V = \frac{G\ T\ D}{\frac{1}{2}\ a\ D}$; sed V est velocitas quam corpus è quiete cadendo in medio non resistente acquireret tempore G T D, & velocitates in medio non resistente acquisitæ, sunt ut tempora quibus acquiruntur, ideóque velocitas V seu $\frac{G\ T\ D}{\frac{1}{2}\ a\ D}$, est ad velocitatem a C, in medio non resistente acquisitam ut tempus G T D ad tempus quo corpus velocitatem a C acquirit; Quarè hoc tempus erit $\frac{1}{2}$ a D × a C, seu per triangulum a D C exponetur. 103.

104. *Coroll.* 5. Hinc ex dato tempore datur spatium descriptum. Capiatur enim sector G D T ad triangulum a D C, ut tempus datum ad tempus quo corpus in medio non resistente acquirit velocitatem terminalem a C, & dabitur tum velocitas a P, tum area A B N K, quæ est ad sectorem G D T, ut spatium quæsitum ad spatium quod tempore dato cum velocitate illâ terminali a C uniformiter describi potest (101) & regrediendo ex dato spatio A B N K, dabitur tempus G D T, si capiatur area A B N K, ad triangulum a D C in ratione spatii dati ad duplum spatii quod corpus in medio non resistente cadendo describit ut velocitatem terminalem a C acquirat. Id demonstratur ex not. 103. & 101) eodem prorsus modo quo factum est (97).

105. *Scholium*. Superiores constructiones definiendis corporum motibus sufficiunt, licet medii resistentia partim constans partim velocitatis quadrato proportionalis. Nam si corpus solâ vi insitâ moveatur, recta A C, quæ in constructionibus prop. 8. & 9. vim gravitatis uniformem exponebat, partem resistentiæ constantem quæ vi alicui centripetæ uniformi æqualis censeri potest, cæteris manentibus, exponet. Sed si corpus in medio prædicto gravitate uniformiter agente sollicitatum rectâ ascendat vel descendat, linea A C, in constructionibus pro ascensu vim gravitatis & partem resistentiæ datam simul exhibebit, in constructionibus verò pro descensu excessum gravitatis suprà partem resistentiæ datam repræsentabit; & linea illa A C, ità determinata vim gravitatis uniformem exponet, quâ corpus urge-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect II. Prop. IX. Theor. VII.

ritur in medio cujus esset resistentia ut velocitatis quadratum. Si verò pars illa resistentiæ quæ uniformis manet vi gravitatis æqualis fuerit & corpus deorsum projiciatur, idem erit illius motus ac si solâ vi insitâ ferretur in medio quod resisteret in ratione quadrati velocitatis, atquè ideò in hoc casu usurpanda erit constructio propositionis 5æ. Jam verò omissis constructionibus per Logarithmicam quas (*ex demonstr.* 44. 45:) facile deducere, aut in Monumentis Academiæ Regiæ an. 1709. & etiam in Phoronomiâ *Hermanni* Lector videre poterit, duo quæ sequuntur generalia problemata analyticè solvemus.

PROBLEMA.

Definire motum corporis, uniformi gravitate urgente, rectà descendentis vel ascendentis in medio similari, quod in ratione quâlibet multiplicatà velocitatis resistit.

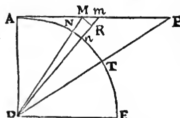
106. Sit vis gravitatis $= g$, velocitas corporis sub initio motûs $= e$, spatium descriptum $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas hoc tempore acquisita vel residua $= v$, resistentia medii $r = \frac{v^n}{a^{n-1}}$, & a quantitas data. Corpore descendente erit (19) $g\,ds - \frac{v^n\,ds}{a^{n-1}} = v\,dv$, ideoque $ds = \frac{a^{n-1}\,v\,dv}{g a^{n-1} - v^n}$, & quia (13) $dt = \frac{ds}{v}$, erit $dt = \frac{a^{n-1}\,dv}{g a^{n-1} - v^n}$. Simili modo pro corporis ascensu, invenitur $ds = \frac{-a^{n-1}\,v\,dv}{g a^{n-1} + v^n}$ & $dt = \frac{-a^{n-1}\,dv}{g a^{n-1} + v^n}$. Cùm igitur in his quatuor æquationibus variabiles separatæ sint, poterunt illæ, saltem concessis figurarum quadraturis, construi.

107. Si resistentia velocitati proportionalis fuerit, erit $n = 1$, & ideò corpore descendente $ds = \frac{v\,dv}{g-v}$ & divisione numeratoris $v\,dv$ per $-v+g$ peractâ, est $ds = -dv + \frac{g\,dv}{g-v}$, & sumptis fluentibus $s = Q - v - g \times L.\overline{g-v}$. Quia verò ubi evanescit spatium s, fit $v = e$ (*per hyp.*) erit constans $Q = e + g\,L.\overline{g-e}$, ac proindè $s = e - v + L.\frac{g-e}{g-v}$. Tempus habetur per æquationem $dt = \frac{dv}{g-v}$ cujus fluens $t = Q - L.\overline{g-v} = L.\frac{g-e}{g-v}$. Simili modo pro corporis ascensu invenitur $s = e - v + g\,L.\frac{g+v}{g+e}$, & $t = L.\frac{g+e}{g+v}$.

108. Si resistentia sit ut velocitatis quadratum, erit $n = 2$ & (106) $r = \frac{v^2}{a}$. Sit b velocitas terminalis, & quia resistentia gravitati æqualis est ubi corpus velocitatem maximam habet, erit $g = \frac{bb}{a}$, & $bb = ag$. Sit e spatium quod corpus vi gravitatis constante g cadendo in medio non resistente describit ut acquirat velocitatem b, & erit $2ge = bb = ag$ (23) ideoque $a = 2e$. His positis, corpore descendente erit (106) $ds = \frac{av\,dv}{ag-vv} = \frac{2ev\,dv}{bb-vv}$. Ponatur $bb - vv = xx$, & proindè sumptis fluxionibus $v\,dv = -x\,dx$, atquè ideo $ds = -\frac{2ex\,dx}{xx} = -\frac{2e\,dx}{x}$, & sumptis fluentibus $s = Q - 2e\,L.x = Q - e\,L.x^2 = Q - e\,L.\overline{bb-vv}$. Ponatur $s = 0$, & ideò $v = e$, & indè habebitur $Q = e\,L.\overline{bb-ee}$, ac proptereà $s = e\,L.\frac{bb-ee}{bb-vv}$. Sit $L.h = 1$ & erit $s\,L.h = e\,L.\frac{bb-ee}{bb-vv}$; $\frac{s}{e} \times L.h = L.h^{\frac{s}{e}} = L.\frac{bb-ee}{bb-vv}$, ideóque $h^{\frac{s}{e}} = \frac{bb-ee}{bb-vv}$; undè eruitur $vv = \frac{bb\,h^{\frac{s}{e}} + ee - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus obtinetur per æquationem (106) $dt = \frac{a\,dv}{ag-vv} = \frac{2e\,dv}{bb-vv} = \frac{\frac{e}{b}\,dv}{b+v} + \frac{\frac{e}{b}\,dv}{b-v}$; quod patet, si duæ postremæ fractiones ad communem denominatorem reducantur, &, sumptis fluentibus $t = Q + \frac{e}{b}L.\overline{b+v} - \frac{e}{b}L.\overline{b-v}$

$-v = Q + \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$. Ponatur $t = o$, & ideò $v = c$, & invenietur $Q = -\frac{e}{b} L. \frac{b+c}{b-c}$. Quarè erit $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v \times b-c}{b-v \times b+c}$. Si corpus è quiete cadat, erit $c = o$, & ideò $s = e L. \frac{bb}{bb-vv}$; $vv = \frac{bbh^{\frac{s}{e}} - bb}{h^{\frac{s}{e}}}$ & $t = \frac{e}{b} L. \frac{b+v}{b-v}$.

Si in hâc ultimâ æquatione loco $h^{\frac{e}{s}}$ scribatur m & loco v ipsius valor $b\sqrt{1-\frac{1}{m}}$, habebitur $t = \frac{e}{b} \times \frac{L\,1+\sqrt{1-\frac{1}{m}}.}{1-\sqrt{1-\frac{1}{m}}}$.



Simili modo ascendente corpore invenietur $s = e\,L \frac{bb+cc}{bb+vv}$, & $vv = \frac{bb+cc-bbh^{\frac{s}{e}}}{h^{\frac{s}{e}}}$. Tempus autem reperitur per æquationem $dt = -\frac{a\,dv}{ag+vv} = -\frac{e\,dv}{bb+vv}$. Centro D, radio DA $= b$, describatur circuli quadrans A N E, velocitas c, sub initio ascensûs exponatur per datam tangentem A P, velocitas residua v, per tangentis illius partem A M, & dv per M m, jungantur DP, DM, D m, circulo occurrentes in T, N, n, & ex puncto M, demissum sit ad D n perpendiculum M R, triangula similia D N n, D M R, dant D M : D N vel D A $=$ M R : N n, & triangula similia m R M, M A D, dant D M : D A $=$ M m : M R, ideóque (ex æquo) D M^2 : D A^2 $=$ M m : N n, hoc est, $bb+vv : bb = dv$: N n $= \frac{bb\,dv}{bb+vv}$; undè fit $\frac{e \times Nn}{bb} =$
$\frac{e\,dv}{bb+vv}$; & hinc habebitur $dt =$ 108.
$-\frac{e \times Nn}{bb}$, sumptisque fluentibus $t = Q - \frac{e \times AN}{bb}$. Ponatur $t = o$, & fiet A M $=$ A P, & A N $=$ A T, ideóque Q $= \frac{e \times AT}{bb}$. Quarè erit $t = \frac{e \times TN}{bb} = \frac{TN}{2g}$, (ob $bb = 2ge$).

PROBLEMA.

Definire motum corporis in lineâ rectâ AC, vi quâlibet centripetâ ad punctum C tendente sollicitati in medio cujus resistentia est ut densitas medii & dignitas quævis velocitatis corporis conjunctim.

109\. Corpus è loco dato A vel a, datâ cum velocitate projectum ascendat per spatium a P vel descendat per spatium A P, dicanturque velocitas projectionis in a vel A $= c$, spatium descriptum a P vel A P $= s$, tempus quo descriptum est $= t$, velocitas corporis in loco P $= v$, vis centripeta ibidem $= g$, densitas medii in eodem loco $= k$, resistentia $r = kv^n$, distantia C P $= x$, & data C a vel C A $= b$, erit (22) pro corporis ascensu, $g\,dx + kv^n dx = -v\,dv$, & pro descensu $g\,dx - kv^n dx = -v\,dv$, quarum æquationum alterutram resolvere satis est, cum altera in alteram abeat, mutato signo $+$ vel $-$ quantitati k præfixo. Quia verò corpore ascendente est a P $= s = x - b$, & proindè $ds = dx$; at eodem descendente A P $= s = b - x$, & ideo

A
P
p
a
C

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. II. Prop. IX. Theor. VII.

$ds = -dx$, erit pro corporis ascensu (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx}{v}$, & pro descensu $dt = -\frac{dx}{v}$. His positis breviter exponimus præcipuos casus in quibus superiorum æquationum variabiles separari & æquationes proindè per curvarum quadraturas construi possunt.

110. Si in æquatione generali $g\,dx \pm kv^n dx = -v\,dv$, quæ est pro ascensu & descensu simul. Sit g quantitas constans, & densitas k, ut distantiæ dignitas $x^{\frac{1}{2}n}$ reciprocè, hoc est, $k = \frac{1}{ax^{\frac{1}{2}n}}$, variabiles separari possunt. Nam æquatio generalis in hanc mutabitur $g\,dx \pm \frac{v^n dx}{ax^{\frac{1}{2}n}} = -v\,dv$. Ponatur $v^2 = xz$, ideoque $v^n = x^{\frac{1}{2}n} z^{\frac{1}{2}n}$, & $v\,dv = \frac{x\,dz + z\,dx}{2}$, & æquatio evadet $g\,dx \pm \frac{z^{\frac{1}{2}n} dx}{a} = \frac{-x dz - z dx}{2}$, undè eruitur $\frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{2ag + az \pm 2z^{\frac{1}{2}n}}$. In quâ variabiles sunt separatæ.

111. Si densitas k constans fuerit, vis centripeta g ut distantia x à centro & resistentia ut velocitas, variabiles separari possunt. Nam si ponatur $g = ax$, k constans & $n = 1$, æquatio generalis fiet $ax\,dx \pm kv\,dx = -v\,dv$, in quâ neglectis coefficientibus datis a & k, termini omnes sunt homogenei seu ejusdem dimensionis. Ponatur itaque $v = zx$, & proindè $dv = z\,dx + x\,dz$, & æquatio evadet $ax\,dx \pm kzx\,dx = -z^2 x\,dx - zx^2 dz$, & terminis omnibus per x divisis, iisque ordinatis invenitur $\frac{dx}{x} = -\frac{z\,dz}{a \pm kz + z^2}$, quæ æquatio, concessâ Hyperbolæ vel circuli quadraturâ semper construi potest.

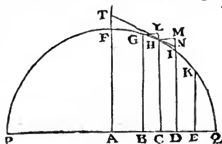
112. Si, cæteris paribus, medii resistentia sit ut quadratum velocitatis, id est, $n = 2$, & densitas medii k visque centripeta g sint ut functiones quælibet distantiæ x, variabiles in superioribus æquationibus (109.) separationem admittunt. In hâc Hypothesi æquatio pro corporis ascensu fit $g\,dx + kv^2 dx = -v\,dv$, seu $v\,dv + kv^2 dx = -g\,dx$. Ponatur $k\,dx = \frac{dz}{2z}$, ut sit $2zv\,dv + v^2 dz = -2gz\,dx$, & sumptis fluentibus erit $zv^2 = Q - S.\,2gz\,dx$, & $v^2 = \frac{Q - S.\,2gz\,dx}{z}$. Quia verò $k\,dx = \frac{\frac{1}{2}dz}{z}$, erit $S.\,k\,dx = \frac{1}{2}L.\,z$ & $S.\,2k\,dx = L.\,z$. Atquè ideò si fuerit $L.\,h = 1$, $h^{S.\,2k\,dx} = z$ undè fit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{S.\,2k\,dx}\,dx}{h^{S.\,2k\,dx}}$ pro corporis ascensu; & pro descensu loco $+k$, scribendo $-k$, erit $v^2 = \frac{Q - S.\,2gh^{-S.\,2kdx}\,dx}{h^{-S.\,2k\,dx}} = Qh^{S.2kdx} - h^{S.2kdx}\,S.\,2gh^{-S.\,2k\,dx}\,dx$ in quibus æquationibus variabiles sunt separatæ, quia (*per Hyp.*) quantitates k & g, sunt ut functiones variabilis x. Constans Q determinatur ex eo quod ubi $x = b$, fit $v = c$, tempus verò definitur per æquationem $dt = \frac{dx}{v}$ pro corporis ascensu, & per æquationem $dt = -\frac{dx}{v}$ pro corporis descensu, in quibus æquationibus, si loco v substituatur ipsius valor per x inventus, variabiles erunt separatæ. Sed de his vide Mechanicam Clar. *Euleri*.

PRO-

PROPOSITIO X. PROBLEMA III.

Tendat uniformis vis gravitatis directè ad planum horizontis, ſitque reſiſtentia ut medii denſitas & quadratum velocitatis conjunctim: requiritur tum medii denſitas in locis ſingulis, quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ moveatur; tum corporis velocitas & medii reſiſtentia in locis ſingulis.

Sit *PQ* planum illud plano ſchematis perpendiculare; *PFHQ* linea curva plano huic occurrens in punctis *P* & *Q*; *G*, *H*, *I*, *K* loca quatuor corporis in hâc curvâ ab *F* ad *Q* pergentis; & *GB*, *HC*, *ID*, *KE* ordinatæ quatuor parallelæ ab his punctis ad horizontem demiſſæ, & lineæ horizontali *PQ* ad puncta *B*, *C*, *D*, *E* inſiſtentes; & ſint *BC*, *CD*, *DE* diſtantiæ ordinatarum inter ſe æquales. A punctis *G* & *H* ducantur rectæ *GL*, *HN* curvam tangentes in *G* & *H*, & ordinatis *CH*, *DI* ſurſum productis occurrentes in *L*

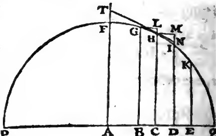


& *N*, & compleatur parallelogrammum *HCDM*. Et (b) tempora, quibus corpus deſcribit arcus *GH*, *HI*, erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum *LH*, *NI*, quas corpus temporibus illis deſcribere poſſet, à tangentibus cadendo; & (c) velocitates erunt ut longitudines deſcriptæ *GH*, *HI* directè & tempora

(b) 113. * *At tempora quibus corpus deſcribit arcus* evaneſcentes GH, HI, *erunt in ſubduplicatâ ratione altitudinum* LH, NI. Eodem enim temporis momento quo corpus vi motûs inſiti in G, deſcriberet tangentem GL, vi gravitatis uniformi caderet per altitudinem LH qualem in medio non reſiſtente percurreret eo ipſo tempore; reſiſtentiæ enim effectus altitudinem eam minuit quantitate ejus ipſius reſpectu infinitè parvâ, quæ itaque hic non eſt ſpectanda, itaque corpus arcum GH deſcribere cenſendum eſt vi compoſitâ ex vi motus inſiti & vi gravitatis. Et ſimili modo, tempore eodem quo deſcribit arcum HI, vi gravitatis caderet per altitudinem NI. Quare (per Lem. 10. Lib. 1.) tempora quibus corpus deſcribit arcus GH, HI, ſeu quibus cadit per altitudines LH, NI, ſunt in ſubduplicatâ ratione harum altitudinum. 113.

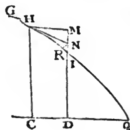
(c) * *Et velocitates erunt* (11).

pora inversè. Exponantur tempora per T & t, & velocitates per $\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$; & (d) decrementum velocitatis tempore t factum exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ corpus retardante, & gravitate corpus accelerante. Gravitas, in corpore cadente & spatium *NI* cadendo describente, generat velocitatem, quâ duplum illud spatium eodem tempore describi potuisset, ut (e) *Galilæus* demonstravit; id est velocitatem $\frac{2NI}{t}$: (f) at in corpore arcum *HI* describente au-



(d) * *Et decrementum velocitatis.* Nam si velocitas per arcum H I, eadem esset ac velocitas per arcum G H, exponeretur per $\frac{GH}{T}$, est autem illa $\frac{HI}{t}$. Quarè si velocitas decrescat, illius decrementum tempore t factum, exponetur per $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Si verò crescat, exponetur per $\frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$; hoc decrementum vel incrementum oritur à resistentia corpus retardante ejusque motui secundum directionem tangentis H N vel arcûs H I directè contraria (1) & à gravitate motum corporis descendentis accelerante, vis enim gravitatis in vires duas videlicet normalem & tangentialem divisa (24) corporis in curvâ descendentis motum per vim tangentialem accelerat, quem vis normalis nec accelerat, nec retardat. Quarè si resistentia vi gravitatis tangentiali major est, motus retardatur, si minor acceleratur, si æqualis nec acceleratur nec retardatur.

(e) * *Ut Galilæus demonstravit.* (Vid. dem. not. 29. lib. 1.).



(f) * *At in corpore &c.* Nam solâ vi insitâ, corpus tempore t describeret tangentem H N, & vi gravitatis solâ altitudinem N I, viribus verò conjunctis describit arcum H I. Quarè gravitas spatium à corpore secundùm directionem H N vel H I, describendum auget solâ longitudine H I − H N. Est autem $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Si enim centro H & radio H N, descriptus intelligatur arcus circularis N R, secans H I in R, duo triangula I R N, I M H similia erunt, ob angulum M I H utri-

auget arcum illum solâ longitudine $HI - HN$ seu $\frac{MI \times NI}{HI}$; ideoque generat tantum velocitatem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Addatur hæc velocitas ad decrementum prædictum, ([a]) & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; ([b]) resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad $2NI$.

Jam pro abscissis CB, CD, CE scribantur ([c]) $-o$, o, $2o$. Pro

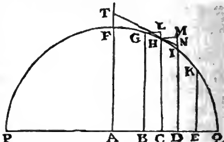
utrique triangulo communem, & angulos IRN, IMH rectos, ideoque æquales, undè erit $HI : MI = NI : RI$ seu $HI - HN$; & propterea $HI - HN = \frac{MI \times NI}{HI}$. Cùm igitur RI sit spatium tempore t vi gravitatis tangentiali descriptum (113) velocitas illa quam vis illa tempore t generat, exponetur (19. *lib.* 1.) per $\frac{2RI}{t} = \frac{2MI \times MI}{t \times HI}$.

([a]) * *Et habebitur decrementum velocitatis ex solâ resistentiâ oriundum, nempe* $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, non solùm in eo casu quo resistentia vim gravitatis tangentialem superat, sed etiam in eo casu quo ab istâ superatur. Sit enim velocitatis decrementum ex solâ resistentiâ oriundum V, cùm incrementum velocitatis vi gravitatis tangentiali genitum sit $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$, erit in primo casu $V - \frac{2MI \times NI}{t \times HI} = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$ (113), ideoque $V = \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$; at in secundo casu erit (113) $\frac{2MI \times NI}{t \times HI} - V = \frac{HI}{t} - \frac{GH}{T}$, & proinde $V = \frac{2MI \times NI}{t \times HI} + \frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$, quæ eadem est expressio ac prius. 113.

([b]) * *Resistentia erit ad gravitatem &c.* Vires enim acceleratrices vel retardatrices sunt ut velocitatum elementa quæ dato temporis momento generant aut extinguunt, (13. *lib.* 1.).

([c]) * *Scribantur* $-o$, o, $2o$. Si enim abscissæ CD, CE affirmativè capiantur, abscissæ CB, &c. in contrariam partem sumptæ negativè debent exprimi.

Pro ordinata CH ſcribatur P, & pro (d) MI ſcribatur ſeries quælibet $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Et ſeriei termini omnes poſt primum, nempe $Roo + So^3 +$ &c. (e) erunt NI, & (f) ordinatæ DI, EK, & BG erunt $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivè. Et quadrando differentias ordinatarum $BG - CH$ & $CH - DI$, & ad quadrata prodeuntia addendo quadrata ipſarum BC, CD, (g) habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. Quorum radices $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſunt arcus GH & HI. Præterea ſi ab ordinatâ CH ſubducatur ſemiſumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinatâ DI ſubducatur ſemiſumma ordinatarum CH & EK,



(d) * *Et pro MI ſcribatur ſeries quælibet.* Nam ordinatarum CH, DN differentia fluxionalis MI exprimi poteſt per ſeriem infinitam $Qo + Roo + So^3 +$ &c. in quâ Q, R, S, &c. ſunt quantitates finitæ hic generaliter ſumptæ & poſtea in ſingulis caſibus determinandæ, & o eſt incrementum naſcens & conſtans abſciſſæ (552, 556. *lib.* 1.).

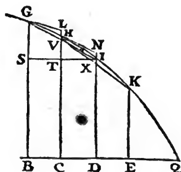
(e) * *Erunt NI &c.* (552. *lib.* 1.)

(f) * *Et ordinatæ &c.* Eſt enim $DI = DM - MI = CH - MI = P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. (*per hyp.*); & quia $CE = 2o$, ſi in valore ordinatæ DI loco o ſcribatur $2o$, abibit DI in $EK = P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c; & ſimili modo quia $CB = -o$, ſi in valore ordinatæ DI loco $+o$ ſcribatur $-o$, fiet $DI = BG = P + Qo - Roo + So^3 -$ &c.

(g) * *Habebuntur arcuum GH, HI quadrata &c.* Eſt enim, ob angulum HMI rectum $HI^2 = HM^2 + MI^2$; & $HM = CD = o$, ac $MI = CH - DI = Qo + Roo + So^3 +$ &c. ideoque $HM^2 = oo$, $MI^2 = Q^2o^2 + 2QRo^3 + R^2o^4 + 2QSo^4 +$ &c.; unde $HI^2 = o^2 + QQo^2 + 2QRo^3 +$ &c. Negliguntur autem termini in quibus eſt o^4, o^5, &c. quod præ cæteris antecedentibus evaneſcant & ad rem nihil faciant. Quare extrahendo radicem quadratam fit $HI = o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$, neglectis cæteris terminis negligendis: & ſimili modo invenitur $GH = o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$.

EK, ([h]) manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et ([k]) hæ sunt lineolis LH & NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t: & ([l]) inde ratio $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$ seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI valores jam inventos, ([m]) evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$. Et cùm $2NI$ sit $2Roo$, resistentia jam erit

113.



(h) * *Manebunt arcuum* GI *&* HK *sagittæ &c.* Jungatur chorda GI secans CH in V, & ex puncto I demittatur ad BG perpendiculum IS secans CH, in T. Erit, ob triangulorum ITV, ISG similitudinem IT ad IS, seu DC ad DB, id est, 1 ad 2, ut TV ad GS, & ideo $GS = 2VT$, & $GB = 2VT + SB = 2VT + DI$, & $GB + DI = 2VT + 2DI$, quare semisumma ordinatarum GB ac DI est $VT + DI$, seu VC, quæ si ab ordinatâ CH subducatur, remanebit arcûs GI sagitta VH. Et simili ratiocinio patet arcûs HK sagittam IX æqualem esse differentiæ inter ordinatam DI & semisummam ordinatarum CH & EK.

(k) * *Et hæ sunt lineolis* LH *&* NI *proportionales.* Nam coeuntibus punctis B, C, D, E & G, H, I, K figuræ $NHIXH$, $LGHVG$ similes fiunt, & propterea latera homologa HV & IX, LH & NI proportionalia; sunt autem (*ex demonstr.*) lineolæ LH, NI ut quadrata temporum Tt, quibus describuntur arcus GH, HI.

(l) * *Et inde ratio* $\frac{t}{T}$ *est &c.* Nam (*ex demonst.*) $\frac{t^2}{T^2} = \frac{IX}{HV} = \frac{Roo + 3So^3}{Roo} = \frac{R + 3So}{R}$, & ideò $\frac{t}{T} = \sqrt{\frac{R + 3So}{R}} = \sqrt{\frac{RR + 3SRo}{RR}} = \frac{\sqrt{RR + 3SRo}}{R}$; sed $\sqrt{RR + 3SRo} = R + \frac{3SRo}{2R}$, neglectis terminis negligendis: quare erit $\frac{t}{T} = \frac{R + \frac{3}{2}So}{R} = 1 + \frac{3So}{2R}$.

(m) * *Evadit* $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1 + QQ}$. Est enim $\frac{t \times GH}{T} = o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}} + \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$, neglecto termino in quo reperitur o^3, qui præ cæteris evanescit. Unde fit $\frac{t \times GH}{T} - HI = \frac{\frac{3}{2}Soo\sqrt{1+QQ}}{R}$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECOND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

erit ad gravitatem ut $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ ad $2Roo$, id est, ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$.

Velocitas autem ea est, quâcum corpus de loco quovis H, secundum tangentem HN egrediens, in parabolâ diametrum HC & latus rectum $\frac{HNq}{NI}$ seu $\frac{1+QQ}{R}$ habente, (n) deinceps in vacuo moveri potest.

Et resistentia est ut medii densitas & quadratum velocitatis

$-\frac{2QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$; sed $2MI = 2Qo$, & $NI = Roo$ neglectis cæteris seriei terminis evanescentibus, ideoque $2MI \times NI = 2QRo^3$, atque proinde $\frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{2QRo^2}{\sqrt{1+QQ}}$, neglecto in valore arcus HI termino evanescente $\frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$. Quare erit $\frac{2 \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI} = \frac{3Soo\sqrt{1+QQ}}{2R}$.

(n) * *Deinceps in vacuo moveri potest.* Cùm enim velocitas per arcum HI, seu pèr tangentem nascentem HN, æquabilis censeri possit (5), & corpus eodem temporis momento quo vi insitâ describeret HN, vi gravitatis uniformi, omissa resistentia quæ hic ut nulla haberi debet (113), cadit per altitudinem NI; arcus nascens HI, quem corpus viribus conjunctis describit, usurpari potest pro arcu parabolæ, cujus est diameter HC (40. lib. 1.), tangens HN ordinatis parallela, & NI parallela & æqualis abscissæ cui responderet ordinata æqualis HN. Quare hujus parabolæ latus rectum erit $\frac{HN^2}{NI}$ (*per Theor.* 1. *de parab.*), *seu* (*per Lemma* 7. *lib.* 1.) $\frac{HI^2}{HI} = \frac{oo+QQoo}{Roo} = \frac{1+QQ}{R}$, neglectis terminis negligendis. Si itaque corpus in vacuo deinceps moveretur, hanc parabolam describeret (40. *lib.* 1.).

tatis conjunctim, & propterea medii densitas est ut resistentia directè & quadratum velocitatis inversè, id (o) est, ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{1+QQ}{R}$ inversè, hoc est, ut $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. *Q. E. I.*

Corol. 1. Si tangens HN producatur utrinque donec occurrat ordinatæ cuilibet AF in T: (p) erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis

(o) * *Id est, ut &c.* Quia enim resistentia est ad gravitatem constantem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, erit resistentia ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$. Velocitas autem est ut $\frac{HI}{t}$, & illius quadratum ut $\frac{HI^2}{t^2}$; & HI^2 est $oo+QQoo$, neglectis negligendis, t^2 verò est ut NI, seu ut Roo (ex demonstr.); adeoque velocitatis quadratum ut $\frac{1+QQ}{R}$. Quare medii densitas erit ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4R(1+QQ)}$, & ob datum numerum $\frac{3}{4}$, ut $\frac{S.\sqrt{1+QQ}}{R(1+QQ)} = \frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$.

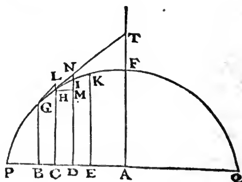
114. Si resistentia esset ut medii densitas & velocitatis V dignitas quælibet V^n conjunctim; cùm sit V^n ut $\frac{HI^n}{t^n}$, sive ut $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$, medii densitas foret ut $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directè & $\frac{(1+QQ)^{\frac{n}{2}}}{R^{\frac{n}{2}}}$ inversè, id est, directè ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}}}{(1+QQ)^{\frac{n-1}{2}}}$.

(p) * *Erit $\frac{HT}{AC}$ æqualis &c.* Ex punctis H & I demittantur ad AF & CH perpendicula HS & IR; & ob triangula IRH, HST similia, erit HT ad HS seu AC ut HI ad IR vel CD, ideoque $\frac{HT}{AC} = \frac{HI}{CD} = \frac{o\sqrt{1+QQ}}{o} = \sqrt{1+QQ}$. 114

115. Hinc si resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas V^n conjunctim, erit resistentia ad gravitatem, ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitatis dignitas n, ut $\frac{HT^n}{AC^n \times R^{\frac{n}{2}}}$, & medii densitas ut $\frac{SR^{\frac{n-4}{2}} \times AC^{n-1}}{HT^{n-1}}$, sive ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}|^{n-1}$ (114).

$\sqrt{1+QQ}$, ideoque in superioribus pro $\sqrt{1+QQ}$ scribi potest. Quâ ratione resistentia erit ad gravitatem ut $3S \times HT$ ad $4RR \times AC$, velocitas erit ut $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$, & medii densitas erit ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$

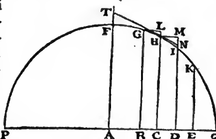
Co-



116. Superiores formulæ non solùm pro corporis descensu per arcum F Q, sed etiam pro ejusdem ascensu per arcum P F usurpari possunt. Corpore ascendente per arcum P F à P ad F, eadem fiat quæ pro descensu per arcum F Q constructio; & tempora quibus describuntur arcus G H, H I exponantur per T & t. Decrementum velocitatis tempore t factum erit $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Hoc decrementum oritur à resistentiâ & gravitate corporis ascendentis motum simul retardantibus. Gravitas in corpore cadente & spatium N I cadendo describente, generat velocitatem $\frac{2NI}{t}$; at in corpore arcum H I describente, minuit arcum illum solâ longitudine H N — H I seu $\frac{MI \times NI}{HI}$, ideoque extinguit tantum velocitatem tangentialem $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Auferatur hæc velocitas à decremento prædicto, & habebitur decrementum velocitatis ex resistentiâ solâ oriundum, nempe $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HL}$. Proindeque cùm gravitas eodem tempore in corpore cadente generet velocitatem $\frac{2NI}{t}$; resistentia erit ad gravitatem ut $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} - \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ ad $\frac{2NI}{t}$, sive ut $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$ ad 2 N I.

Jam si pro abscissis B C, C D, C E scribantur $-o, o, 2o$, & pro ordinata C H scribatur P; M I & N I erunt $Qo - Roo - So^3 -$ &c., & $Roo + So^3 +$ &c. Nam in arcu F Q (vide fig. Newt.) D I, seu

Corol. 2. Et hinc, si curva linea $PFHQ$ definiatur per relationem inter basem seu abscissam AC & ordinatim applicatam CH, ut moris est; & valor ordinatim applicatæ resolvatur in seriem convergentem: Problema per primos seriei terminos expeditè solvetur, ut in exemplis sequentibus.



Exempl. 1. Sit linea $P\ F\ H\ Q$ semicirculus super diametro $P\ Q$ descriptus, & requiratur medii densitas quæ faciat ut projectile in hâc lineâ moveatur.

Bisecetur diameter $P\ Q$ in A; dic $A\ Q$, n; AC, a; CH, e; & CD, o: & (q) erit $D\ I\ q$ seu $A\ Q\ q - A\ D\ q = nn - aa - 2ao - oo$, seu $ee - 2ao - oo$, & (r) radice per methodum no-

seu CH — MN — NI, erat $P - Qo - Roo - So^3$ &c., ideoque MN erat Qo (552. *lib.* 1.), & NI erat $Roo + So^3$; at in arcu PF est $DI = CH + MN - NI$, proindeque $DI = P + Qo - Roo - So^3$ &c., & hinc MI est $Qo - Roo - So^3$ &c. & NI est $Roo + So^3$. Et si in serie quæ valorem ordinatæ DI exprimit, loco o scribantur abscissæ CE, BC, sive $2o$, $-o$, habebuntur ordinatæ EK & BG, nempe $P + 2Qo - 4Roo - 8So^3$ &c., & $P - Qo - Roo + So^3$ &c. respectivè. Et quadrando differentias ordinatarum CH—BG & DI—CH, & ad quadrata producta addendo quadrata ipsarum BC, CD, habebuntur arcuum GH, HI quadrata $oo + QQoo + 2QRo^3$, & $oo + QQoo - 2QRo^3$; quorum radices $o\sqrt{1 + QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1 + QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ sunt arcus GH & HI. Præterea si ab ordinatâ CH subducatur semisumma ordinatarum BG ac DI, & ab ordinata DI subducatur semisumma ordinatarum CH & EK, manebunt arcuum GI & HK sagittæ Roo & $Roo + 3So^3$. Et hæ sunt lineolis LH NI proportionales, ideoque in duplicatâ ratione temporum infinitè parvorum T & t, & inde ratio $\frac{t}{T}$ est, $\sqrt{\frac{R + 3So}{R}}$, seu $\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}$; 116.

& $\frac{t \times GH}{T} - HI - \frac{2MI \times NI}{HI}$, substituendo ipsorum $\frac{t}{T}$, HI, GH, MI & NI valores jam inventos, evadit $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1 + QQ}$. Et cùm 2 NI sit $2Roo$, resistentia erit ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$. Quemadmodum pro descensu inventum est; & corollaria eadem quoque manent.

(q) * *Erit DIq seu &c.* Est enim radius $AI = AQ$, & ideo, ob angulum ADI rectum, $DI^2 = AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo = ee - 2ao - oo$, ob $CH^2 = ee = AQ^2 - AC^2 = nn - aa$.

(r) * *Et radice per methodum nostram extractâ*, seu per formulam generalem (550. *lib.* 1.).

nostram extractâ, fiet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aaoo}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} -$ &c. Hic scribatur nn pro $ee + aa$, & evadet $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5} -$ &c.

Hujusmodi series distinguo in terminos successivos in hunc modum. Terminum primum appello, in quo quantitas infinitè parva o non extat; secundum, in quo quantitas illa est unius dimensionis; tertium, in quo extat duarum; quartum, in quo trium est; & sic in infinitum. Et (s) primus terminus, qui hic est e, denotabit semper longitudinem ordinatæ CH insistentis ad initium indefinitæ quantitatis o. Secundus (t) terminus, qui hic est $\frac{ao}{e}$, denotabit differentiam inter CH & DN, id est, lineolam MN, quæ abscinditur complendo parallelogrammum $HCDM$, (u) atque ideo positionem tangentis HN semper determinat; ut in hoc casu capiendo MN ad HM ut est $\frac{ao}{e}$ ad o, seu a ad e. Terminus tertius, qui hic est $\frac{nnoo}{2e^3}$ designabit lineolam IN, quæ jacet inter tangentem & curvam, (x) ideoque determinat angulum contactus IHN seu cur-

(s) * *Et primus terminus* (552. lib. 1).

(t) * *Secundus terminus* (ibidem).

(u) 117. * *Atque ideo positionem tangentis H N semper determinat.* Producatur tangens H N ut diametro A Q occurrat in T; & propter triangulorum H M N, T C H similitudinem, erit C T : H C = H M : MN. Est verò generatim H M = o, & M N = Qo, ac Q coefficiens secundi termini seriei generalis pro curvâ quâcumque (ex demonstr. prop. X.): quare si capiatur C T ad H C ut est 1 ad Q habebitur subtangens C T.

(x) 118. * *Ideoque determinat angulum contactûs seu curvaturam &c.* Sit O cen-

curvaturam quam curva linea habet in *H*. Si (y) lineola illa *IN* finitæ est magnitudinis, designabitur per terminum tertium unà cum sequentibus in infinitum. At si lineola illa minuatur in infinitum, termini subsequentes evadent infinitè minores tertio, ideoque negligi possunt. (z) Terminus quartus determinat variationem curvaturæ, quintus variationem variationis, & sic deinceps. Unde obiter patet usus non contemnendus harum serierum in solutione problematum, quæ pendent à tangentibus & curvaturâ curvarum.

Conferatur jam series $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{anno^3}{2e^5}$ — &c. cum serie $P - Qo - Roo - So^3$ — &c. & perinde pro P, Q, R & S scribatur e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$, & $\frac{ann}{2e^5}$, & pro $\sqrt{1+QQ}$ scribatur $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ (a) seu $\frac{n}{e}$, & prodibit medii densitas ut $\frac{a}{ne}$; hoc

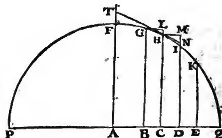
centrum circuli curvam F H Q osculantis in H; OH, OI radii, HPI chorda arcûs HI, NP arculus circularis centro H & radio HN descriptus. Duo triangula IPN, IMH similia erunt, ob angulos ad P & M rectos & angulum ad I utrique triangulo communem, & ideo HI est ad HM ut NI ad NP, ac proinde $NP = \frac{HM \times NI}{HI}$. Anguli NHI, quem tangens HN cum subtensa HPI constituit, mensura est dimidius arcus HI, & anguli ad centrum HOI mensura est arcus totus HI (ex natura circuli); unde NP seu $\frac{HM + NI}{HI}$ est ad HN seu HI (*Lem.* 7. *lib.* 1.) ut $\frac{1}{2}$HI ad HO, & ideo radius osculi $HO = \frac{HI^3}{2HM \times NI}$. Et quia (ex demonst. prop. X.) $HI = o\sqrt{1+QQ}$, $HM = o$, ac $NI = Roo$; erit $HO = \frac{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}{2R}$. Sed angulus contactus & curvatura curvæ lineæ FHQ in H est ut radius osculi HO inverse (121. *lib.* 1.), id est, ut $\frac{2R}{(1+QQ)^{\frac{3}{2}}}$. Quare angulus ille, seu curvatura in H, datis secundo & tertio termino seriei in quam valor ordinatim applicatæ resolvitur, determinabitur. 118.

(y) * *Si lineola illa I N &c.* (552. 553. *lib.* 1.).

(z) * *Terminus quartus determinat variationem curvaturæ.* Quoniam differentia lineolarum LH & NI quarto seriei termino proportionalis est (554) & per lineolam NI determinatur angulus contactus seu curvatura curvæ in puncto H (118) & per lineolam LH curvatura in puncto G; per harum linearum differentiam seu per quartum seriei terminum determinabitur differentia seu variatio curvaturæ, ductâque aliâ tangente similiter determinabitur variatio variationis, & sic deinceps.

(a) * *Seu* $\frac{n}{e}$. Est enim $1 + \frac{aa}{ee} = \frac{ee + aa}{ee} = \frac{nn}{ee}$.

hoc est (ob datam n) ut $\frac{a}{e}$, seu $\frac{AC}{CH}$, id est, (b) ut tangentis longitudo illa HT, quæ ad semidiametrum AF ipsi PQ normaliter insistentem terminatur: & resistentia erit ad gravitatem ut $3\,a$ ad $2\,n$, id est, ut $3\,AC$ ad circuli diametrum PQ: (c) velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$. Quare si corpus justâ cum velocitate secundùm lineam ipsi PQ parallelam exeat de loco F, & medii densitas in singulis locis H sit ut longitudo tangentis HT, & resistentia etiam in loco aliquo H sit ad vim gravitatis ut $3\,AC$ ad PQ, corpus illud describet circuli quadrantem FHQ. *Q.E.I.*



At

(b) * *Id est, ut tangentis longitudo illa HT &c.* Jungatur radius A H, & ob angulum rectum quem tangens T H cum radio A H constituit, parallelasque A T, C H, triangulum A H C simile erit triangulo A T H, & inde est T H ad H A, ut A C ad H C, id est, $\frac{AC}{HC}$ est ut $\frac{HT}{AH}$, seu ut H T ob datum radium A H.

(c) * *Velocitas autem erit ut $\sqrt{CH}$.* Nam (ex demonstr. prop. X.) velocitas est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, id est, ut $\sqrt{2\,e}$, vel $\sqrt{2\,CH}$ ideoque ut $\sqrt{CH}$.

119. Quoniam igitur velocitas est ut $\sqrt{CH}$, medii densitas ut tangens H T, & resistentia ut A C, (quia gravitas & circuli diameter P Q data sunt) corpore perveniente ad punctum Q lineæ horizontalis, velocitas ejus nulla erit, medii densitas infinita, resistentia finita. Si verò ponatur C H negativa, ut corpus infra horizontalem P. Q pergat; fiet velocitas ut $\sqrt{-CH}$, quantitas imaginaria; & ideo corpus non potest infra horizontalem P Q descendere. At dum corpus est in F., velocitas ejus est ut $\sqrt{AF}$, medii densitas nulla, & resistentia nulla.

At si corpus idem de loco P, secundum lineam ipsi $P\,Q$ perpendicularem egrederetur, & in arcu semicirculi $P\,F\,Q$ moveri inciperet, sumenda esset $A\,C$ seu a ad contrarias partes centri A, & propterea signum ejus mutandum esset & (d) scribendum $-\,a$ pro $+\,a$. Quo pacto prodiret medii densitas ut $-\frac{a}{e}$. Negativam autem densitatem, hoc est, quæ motus corporum accelerat, natura non admittit: & propterea naturaliter fieri non potest, ut corpus ascendendo à P describat circuli quadrantem $P\,F$. Ad hunc effectum deberet corpus à medio impellente accelerari, non à resistente impediri.

Exempl. 2. Sit linea $P\,F\,Q$ parabola, axem habens $A\,F$ horizonti $P\,Q$ perpendicularem, & requiratur medii densitas, quæ faciat ut projectile in ipsâ moveatur.

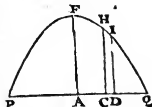
Ex

(d) * *Scribendum* $-\,a$ *pro* $+\,a$. Nam formula quæ densitatem medii exponit, corporis ascensui, & descensui communis est, sicut & aliæ formulæ quæ resistentiam & velocitatem exponunt (116); & idcirco ut quantitas quæ densitatem medii corpore descendente exponit eamdem exponat pro corporis ascensu per eumdem vel similem & æqualem arcum, substituendus est in illâ quantitate valor abscissæ, quæ corpore descendente hic positiva est, ascendente negativa.

110. Atque hinc generatim colligitur eumdem curvæ arcum, vel similes & æquales utrinque ab axe arcus, non posse ascensu & descensu describi in uno medio densitatis utcumque variabilis, id est, si arcus unus ascensu describi potest, descensu describi non posse, & contra. Nam si in solutione problematis hujusce pro corporis descensu per arcum F Q, origo abscissæ positivæ 110.
A C statuatur in A, & pro C B, C D, C E scribantur $-\,o$, o, $2\,o$, erit resistentia ut $\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$. Pro ascensu per eumdem arcum à Q ad F, abscissa eadem A C sumenda erit negativè, cùmque sit o abscissæ fluxio, loco C B, C D, C E scribendum erit o — o — $2\,o$ in valoribus linearum M I, N I, D I, E K & B G; & absoluto calculo, ut in eâdem pro descensu solutione, resistentia pro ascensu invenietur proportionalis quantitati $-\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ negativa est, si prior $+\frac{S\sqrt{1+QQ}}{RR}$, quæ pro descensu erat, positiva sit; & contra.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

(e) Ex naturâ parabolæ, rectangulum PDQ æquale est rectangulo sub ordinatâ DI & rectâ aliquâ datâ: hoc est, si dicantur recta illa b; PC, a; PQ, c; CH, e; & CD, o; rectangulum $a + o$ in $c - a - o$ seu $ac - aa - 2ao + co - oo$ æquale est rectangulo b in DI, ideoque DI æquale $\frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b}o - \frac{oo}{b}$. Jam scribendus esset hujus seriei secundus terminus $\frac{c - 2a}{b}o$ pro Qo, tertius item terminus $\frac{oo}{b}$ pro Roo. Cum verò plures non sint termini, debebit quarti coefficiens S evanescere, & propterea quantitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, cui medii densitas proportionalis est, nihil erit. Nullà igitur medii densitate movebitur projectile in parabolâ, (f) uti olim demonstravit *Galilæus*. *Q. E. I.*



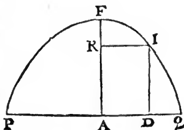
Exempl. 3. Sit linea AGK hyperbola, asymptoton habens NX plano horizontali AK perpendicularem; & quæratur medii densitas, quæ faciat ut projectile moveatur in hâc lineâ.

Sit MX asymptotos altera, ordinatim applicatæ DG productæ occurrens in V; & ex naturâ hyperbolæ, (g) rectan-

(e) * *Ex natura parabolæ, rectangulum &c.* Ex puncto I ad axem parabolæ FA demissum sit perpendiculum IR, sitque axis latus rectum $= b$; erit (*per theor.* 1. *de parab.*) $b \times FR = RI^2 = AD^2$, & $b \times FA = AQ^2$. Quare $b \times FA - b \times FR$, seu $b \times RA$, vel $b \times DI = AQ^2 - AD^2 = \overline{AQ + AD} \times \overline{AQ - AD} = PD \times DQ$. Q. E. D.

(f) * *Uti olim demonstravit Galilæus.* Vide demonstrationem n. 40. lib. 1.

(g) * *Rectangulum X V in V G dabitur*, per theor. 4. de hyp.



tangulum XV in VG dabitur. (h) Datur autem ratio DN ad VX, & propterea datur etiam rectangulum DN in VG. Sit illud bb: & completo parallelogrammo $DNXZ$; dicatur BN, a; BD, o; NX, c; & ratio data VZ ad ZX vel DN ponatur esse $\frac{m}{n}$. Et erit DN æqualis $a-o$, VG æqualis $\frac{bb}{a-o}$, VZ æqualis $\frac{m}{n}\overline{a-o}$, & GD seu $NX-VZ-VG$

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

æqualis $c-\frac{m}{n}a+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{a-o}$. Resolvatur terminus $\frac{bb}{a-o}$ (i) in seriem convergentem $\frac{bb}{a}+\frac{bb}{aa}o+\frac{bb}{a^3}oo+\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & fiet GD æqualis $c-\frac{m}{a}a-\frac{bb}{a}+\frac{m}{n}o-\frac{bb}{aa}o-\frac{bb}{a^3}o^2-\frac{bb}{a^4}o^3$ &c. (k) Hujus se-

(h) * *Datur autem ratio* DN *ad* VX, quæ eadem est cum ratione data MN ad MX, ob parallelas DV, NX,

(i) * *In seriem convergentem*, divisione in infinitum producta. 110.

(k) * *Hujus seriei &c.* Est enim hæc series æqualis seriei $P-Qo-Roo-So^3-$ &c., & singuli illius termini singulis terminis

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

feriei terminus fecundus $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ ufurpandus eft pro Qo, tertius cum figno mutato $\frac{bb}{a^3}o^2$ pro Ro^2, & quartus cum figno

etiam mutato $\frac{bb}{a^4}o^3$ pro So^3, eorumque coefficientes $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ $\frac{bb}{a^3}$ & $\frac{bb}{a^4}$ fcribendæ funt in regula fuperiore pro Q, R & S. Quo

hujus æquantur; id eft, $e - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a}$ eft P, feu ordinata quæ per punctum B ad hyperbolam duceretur; $+\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ eft $-Qo$, & ideo $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa} = -Q$; fed quia in expreffionibus refiftentiæ, denfitatis, & velocitatis femper reperitur quadratum QQ, quod idem manet, feu radix illius Q affirmativè fumatur, feu negativè, nihili intereft fcribere $\frac{bb}{aa} - \frac{m}{n}$, aut $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$ pro Q. Secundus autem feriei terminus $\frac{-bb}{a^3}o^2$ eft $-Ro^2$, & ideo, mutatis fignis, fit $\frac{bb}{a^3} = R$; tertius terminus $\frac{-bb}{a^4}o^3$ eft $-So^3$, atque proinde $\frac{bb}{a^4} = S$,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Quo facto prodit medii densitas ut $\dfrac{\dfrac{bb}{a^4}}{\dfrac{bb}{a^3}\sqrt{1+\dfrac{mm}{nn}-\dfrac{2mbb}{naa}+\dfrac{b^4}{a^4}}}$

seu (l) $\dfrac{1}{\sqrt{aa+\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}}}$ id (m) est si in VZ sumatur VY æqualis VG, ut $\dfrac{1}{XY}$. Namque aa & $\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}$ sunt ipsarum XZ & ZY quadrata. (n) Resistentia autem invenitur in ratione ad gravitatem quam habet $3\,XY$ ad $2\,YG$; & (o) velocitas ea est, quácum corpus in parabolâ pergeret verticem G, diametrum DG, & latus rectum $\dfrac{XY\ quad.}{VG}$ habente. Ponatur itaque quod medii densitates in locis singulis G sint reciprocè ut distantiæ XY, quodque resistentia in loco aliquo G sit ad gravitatem ut $3\,XY$ ad $2\,YG$; & corpus de loco A, justâ cum velocitate emissum, describet hyperbolam illam AGK. *Q. E. I.*

Exempl.

(l) * *Seu*, numeratore & denominatore in $\dfrac{a^4}{bb}$ ductis.

(m) * *Id est, si in V Z sumatur &c.* Est enim $VG=\dfrac{bb}{a-o}=\dfrac{bb}{a}$, & $VZ=\dfrac{m}{n}\overline{a-o}=\dfrac{m}{n}a$, ubi evanescit BD, seu o. Quare $VY-VZ=ZY=\dfrac{bb}{a}-\dfrac{m}{n}a$; & quia $ZX=DN=a$, & $YX^2=YZ^2+ZX^2$ erit $YX^2=aa+\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}$; ideoque medii densitas ut $\dfrac{1}{XY}$.

(n) * *Resistentia autem &c.* Resistentia est ad gravitatem ut $3S\sqrt{1+QQ}$ ad $4RR$, id est, $\dfrac{bb}{4}$ ... 110 $\sqrt{1+\dfrac{mm}{nn}-\dfrac{2mb^2}{naa}+\dfrac{b^4}{a^4}}$ ad $\dfrac{4b^4}{a^6}$, sive dividendo per $\dfrac{bb}{a^3}$, ut $3\sqrt{aa+\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}}$ ad $\dfrac{4bb}{a}$, seu ut $3\,XY$ ad $4\,VG=2\,YG$.

(o) * *Et velocitas &c.* Hujus parabolæ latus rectum est $\dfrac{1+QQ}{R}=\dfrac{1+\dfrac{mm}{nn}-\dfrac{2mbb}{naa}+\dfrac{b^4}{a^4}}{\dfrac{bb}{a^3}}=\dfrac{aa+\dfrac{mm}{nn}aa-\dfrac{2mbb}{n}+\dfrac{b^4}{aa}}{\dfrac{bb}{a}}=\dfrac{YX^2}{VG}$. Velocitas autem est ut $\sqrt{\dfrac{1+QQ}{R}}$ ut $\dfrac{YX}{\sqrt{VG}}$

Exempl. 4. Ponatur indefinitè, quod linea AGK hyperbola sit, centro X, asymptotis MX, NX eâ lege descripta, ut constructo rectangulo $XZDN$ cujus latus ZD secet hyperbolam in G & asymptoton ejus in V, fuerit VG reciprocè ut ipsius ZX vel DN dignitas aliqua DN^n, (p) cujus index est numerus n: & quæratur medii densitas, quâ projectile progrediatur in hâc curvâ.

Pro BN, BD, NX scribantur A, O, C respective, sitque VZ ad XZ vel DN ut d ad e, & VG æqualis $\frac{bb}{DN^n}$, & erit DN æqualis A—O, $VG = \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, $VZ = \frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD seu $NX-VZ-VG$ æqualis $C - \frac{d}{e}A + \frac{d}{e}O - \frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$. (q) Resolvatur terminus ille $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$ in seriem infinitam $\frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}}O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. ac fiet GD æqualis $C - \frac{d}{e}A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e}O - \frac{nbb}{A^{n+1}}O - \frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$

$+n^3$

(p) * *Cujus index est numerus n*; positivus. Hanc autem hyperbolam, dum producitur; ad lineas X M, X N etiam productas continuo accedere, easque non nisi in distantiâ infinitâ contingere posse manifestum est. Cùm enim sit V G ut $\frac{1}{DN^n}$, ubi D N = o, hyperbola rectam X N attingit, & distantia V G infinita evadit; & ubi D N infinita fit, V G est nihil, & ideo hyperbola alteram asymptoton X M tangit, in distantia infinita ab Asymptoto X N.

(q) * *Resolvatur terminus ille* $\frac{bb}{\overline{A-O}|^n}$, seu $bb\times\overline{A-O}^{-n}$, in seriem infinitam per formulam generalem (548. *lib.* 1.), & invenietur $bb\times\overline{A-O}^{-n} = bbA^{-n} + \frac{n}{1}bbA^{-n-1}O + \frac{n\times\overline{n+1}}{1.2}\times bbA^{-n-2}O^2 + \frac{n\times\overline{n+1}\times\overline{n+2}}{1.2.3}bbA^{-n-3}O^3 +$ &c. $= \frac{bb}{A^n} + \frac{nbbO}{A^{n+1}} + \frac{\overline{nn+n}\times bbO^2}{2A^{n+2}} + \frac{\overline{n^3+3n^2+2n}}{6A^{n+3}}\times bbO^3 +$ &c.; Quo enim modo quo in n. 551. demonstravimus formulam ad potentias, quorum exponentes sunt fracti, applicari posse, eodem ferè modo eam ad potentias quorum exponens negativus est, applicari debere constabit.

$-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ &c. Hujus feriei terminus fecundus $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ ufurpandus eft pro Qo, tertius $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$ pro Ro^2, quartus $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ pro So^3. Et inde medii denfitas $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$, in (r) loco quovis G, fit $\frac{n+2}{3\sqrt{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$, ideoque fi in VZ capiatur VY æqualis $n\times VG$, denfitas illa eft reciprocè ut XY.

(r) * *In loco quovis G fit &c.* Invenitur enim $\frac{S}{R}=\frac{n+2}{3A}$, & $\sqrt{1+QQ}=\sqrt{1+\frac{dd}{ee}-\frac{2dnbb}{Ae^{n+1}}+\frac{nnb^4}{A^{2n+2}}}$; & ideo, ob datum numerum $\frac{n+2}{3}$, $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ eft ut $\frac{1}{\sqrt{AA+\frac{dd}{ee}AA-\frac{2dnbbA}{eA^n}+\frac{n^2b^4}{A^{2n}}}}$. 120.

XY. Sunt enim A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n}A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$ (s) ipsarum XZ & ZY quadrata. Resistentia autem in eodem loco G (t) fit ad gravitatem ut $3S$ in $\frac{XY}{A}$ ad $4RR$, id est, ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et velocitas ibidem ea ipsa est, quâcum corpus projectum in parabolâ pergeret, verticem

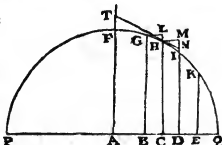
(s) * *Ipsarum XZ & ZY quadrata.* Nam $XZ = DN = A$ (hyp.), & $ZY = VY - VZ = n \times VG - \frac{d}{e}A = \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$; aut $ZY = VZ - VY = \frac{d}{e}A - \frac{nbb}{A^n}$, prout YV major vel minor est quam VZ. Quare cùm sit $XY^2 = XZ^2 + ZY^2$, densitas erit ut $\frac{1}{XY}$.

(t) * *Fit ad gravitatem ut &c.* Quoniam (ex dem.) $\frac{XY}{A} = \sqrt{1+QQ}$, erit $3S\sqrt{1+QQ} = \frac{3S \times XY}{A}$, & inde resistentia ad gravitatem ut $\frac{3S \times XY}{A}$ ad $4RR$, vel ut XY ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn+n^2} \times b^4}{A^{2n+1}}$, & $3S = \frac{\overline{nn+n} \times \overline{n+2}\,bb}{2A^{n+1}}$, ideoque $\frac{4RRA}{3S} = \frac{\overline{2nn+2n} \times bb}{\overline{n+2} \times A^n} = \frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

cem G, diametrum GD & (u) latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ seu $\frac{2\,XY\,quad.}{nn+n \text{ in } VG}$ habente. *Q. E. I.*

Scholium.

Eâdem ratione quâ prodiit densitas medii ut $\frac{S \times AC}{R \times HT}$ in corollario primo, si resistentia ponatur ut velocitatis V dignitas quælibet V^n, (x) prodibit densitas medii ut $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \overline{\frac{AC}{HT}}|^{n-1}$. Et (y) propterea si curva inveniri potest eâ lege, ut data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\overline{\frac{HT}{AC}}|^{n-1}$,



vel $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$: corpus movebitur in hâc curvâ in uniformi medio cum resistentia quæ sit ut velocitatis dignitas V^n. Sed redeamus ad curvas simpliciores. Quo-

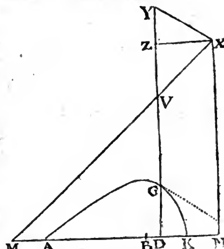
ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Quare resistentia est ad gravitatem ut XY ad $\frac{2nn+2n}{n+2} \times VG$.

(u) * *Et latus rectum &c.* Est enim $\frac{XY^2}{A^2} = 1 + QQ$, & hinc $\frac{1+QQ}{R} = \frac{2\,XY^2 \times A^n}{nn+n \times bb} = \frac{2\,XY^2}{nn+n \times VG}$, ob $VG = \frac{bb}{A^n}$. Unde velocitas quæ est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}}$, erit ut $\frac{YX}{\sqrt{VG}}$, ob datam numerum $\frac{2}{nn+n}$. 120

(x) * *Prodibit densitas ut medii ut &c.* (115).

(y) * *Et propterea &c.* Si enim fuerit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$ in ratione a ad b, erit $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} = \frac{a}{b} \times \frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, & $\frac{S \times AC^{n-1}}{R^{\frac{4-n}{2}} \times HT^{n-1}} = \frac{a}{b}$, id est densi-

Quoniam motus non fit in parabolâ nisi in medio non resistente, in hyperbolis verò hic descriptis fit per resistentiam perpetuam; perspicuum est quod linea, quam projectile in medio uniformiter resistente describit, propius (z) accedit ad hyperbolas hasce quàm ad parabolam. Est utique linea illa hyperbolici generis, sed (a) quæ circa verticem magis distat ab asymptotis; in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedit quàm pro ratione hyperbolarum quas hic descripsi. Tanta verò non est inter has & illam differentia, quin illius loco possint hæ in rebus practicis non incommodè adhiberi. Et utiliores forsan futuræ sunt hæ, quàm hyperbola magis accurata & simul magis composita. Ipsæ verò in usum sic deducentur.



Com-

tas medii ut quantitas data $\frac{a}{b}$, & proinde uniformis. Est autem (*per cor.* 1. *prop.* X.) $\frac{HT}{AC} = \sqrt{1+QQ}$: quare si data fuerit ratio $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ad $\frac{HT^{n-1}}{AC^{n-1}}$, data quoque erit ratio quadratorum $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ad $\overline{1+QQ}|^{n-1}$, & contra.

(z) * *Accedit ad hyperbolas hasce*, cum iis tamen perfectè convenire nunquam potest, quod in hisce hyperbolis densitas medii reciprocè proportionalis sit rectæ variabili XY, & præterea non satis manifestum sit curvam, quam projectile in medio uniformi describit in hypothesi resistentiæ velocitatis quadrato proportionalis, habere asymptotum verticalem ut XN: cùm præsertim in hâc resistentiæ hypothesi spatium motu horizontali infinito descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop.* V). Verum tamen inveniri possunt hyperbolæ in quibus pro parte illâ exiguâ curvæ AGK, quæ in rebus practicis necessaria est, recta XY sit quam proximè constans, & proindè medii densitas quam proxime uniformis; quo fit ut curvæ illæ in rebus practicis non incommodè adhiberi possint.

(a) * *Sed quæ circa verticem &c.* Hæc demonstrabuntur infra in notâ *k*.

Compleatur parallelogrammum $XYGT$, & (b) recta GT tanget hyperbolam in G, ideoque densitas medii in G, est reciprocè ut tangens GT, & velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GTq}{GV}}$, resistentia autem ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in GV.

(b) * *Et recta G T tanget hyperbolam in G.* Ex puncto G ad ordinatam B F per B ductam, & ex puncto T ad ordinatam D G demissa sint perpendicula G R & T S, sitque G T tangens in G. Erit F R ad R G seu B D, ut G S ad S T, ob triangula similia F R G, G S T. Sed F R est Qo seu $\frac{nbbO}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}O$, B D est O, & S T = Z X = A. Quare erit $\frac{nbb}{A^{n+1}} - \frac{d}{e}$ ad 1, seu $\frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$ ad A, ut G S ad Z X seu A. Supra invenimus Z Y $= \frac{nbb}{A^n} - \frac{d}{e}A$. 120.
Ergo Z Y = G S; & ideo tangens G T æqualis est & parallela rectæ Y X. Est autem (*ex demonstr.*) densitas medii in G reciprocè ut Y X: quare densitas medii in G est reciprocè ut tangens G T, velocitas ibidem ut $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$, & resistentia ad gravitatem ut GT ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ G V.

Proinde si corpus de loco *A* secundùm rectam *A H* projectum describat hyperbolam *A G K*, & *A H* producta occurrat asymptoto *N X* in *H*, actaque *A I* eidem parallela occurrat alteri asymptoto *M X* in *I*: erit (c) medii densitas in *A* reciprocè ut *A H*, & corporis velocitas ut $\sqrt{\frac{AHq}{AI}}$, ac resistentia ibidem ad gravitatem ut *A H* ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ in *A I*. Unde prodeunt sequentes regulæ.

Reg. (d) 1. Si servetur tum medii densitas in *A*, tum velocitas quâ-

(c) * *Erit medii densitas &c.* Coincidente puncto G cum A, tangens G T cum tangente A H congruit, & recta V G cum A I, proindeque *medii densitas in A est reciprocè ut A H, & corporis &c.*

(d) * *Reg.* 1. Manentibus indice hyperbolæ n & densitate medii in A, manet tangentis longitudo A H quæ densitati reciprocè proportionalis est. Manente velocitate quâcum corpus è loco A projicitur, manet linea $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$ quæ est ut velocitas; & ideo cùm data sit A H, datur & A I. Ob parallelas G T, Y X, est $TX = GY = GV + VY = GV + n \times GV$ (*Exemp.* 4.), & quia coincidente puncto G cum A, fit $GV = AI$, & $TX = HX$; erit $HX = AI + n \times AI$. Quare ob datas quantitates A I & *n*, datur & H X. Unde si longitudines illæ A H, A I, & H X in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo N A H expedite determinari potest. His enim datis, dantur puncta A, H & I. Per H ducatur

X H N

quâcum corpus projicitur, & mutetur angulus *N A H*; manebunt longitudines *A H*, *A I*, *H X*. Ideoque si longitudines illæ in aliquo casu inveniantur, hyperbola deinceps ex dato quovis angulo *N A H* expeditè determinari potest.

Reg. (e) 2. Si servetur tum angulus *N A H*, tum medii densitas in *A*, & mutetur velocitas quâcum corpus projicitur; servabitur longitudo *A H*, & mutabitur *A I* in duplicatâ ratione velocitatis reciprocè.

Reg. (f) 3. Si tam angulus *N A H*, quàm corporis velocitas in *A*, gravitasque acceleratrix servetur, & proportio resistentiæ in *A* ad gravitatem motricem augeatur in ratione quâcunque; augebitur proportio *A H* ad *A I* in eâdem ratione, manente parabolæ prædictæ latere recto, eique proportionali longitudine $\frac{AH^q}{AI}$: & propterea minuetur *A H* in eâdem ratione, & *A I* minuetur in ratione illâ duplicatâ. (g) Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus, ubi vel gravitas specifica sub

X H N recta horizontali A N Verticalis, & dabitur punctum N; & quia data est H X, dabitur etiam punctum X; datis verò punctis duobus X & I, dabitur recta X I M cum puncto M ubi horizontalem M N secat. Unde ductâ quâvis rectâ V D ad horizontalem A N normali, si in ea capiatur V G ad A I, ut est A N^n ad D N^n, vel ut X I^n ad X V^n, dabitur punctum G in trajectoria A G K. Est enim (*Exemplo* 4.) ordinata quævis V G ad alteram ordinatam I A, ut A N^n ad D N^n, seu ut X I^n ad X V^n.

(e) * *Reg.* 2. Servatâ medii densitate in A, servabitur tangentis longitudo A H, quæ est ut densitas inversè. Et quia velocitas in A est ut $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & velocitatis quadratum ut $\frac{AH^2}{AI}$, id est, ut $\frac{1}{AI}$ ob datam A H; erit A I velocitatis quadrato reciprocè proportionalis.

(f) * *Reg.* 3. Datâ corporis velocitate & gravitate acceleratrice in A, datur longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ tum velocitatis quadrato, tum lateri recto parabolæ (*Exemp.* 4.) proportionalis. Est autem resistentia motrix, si ita loqui fas est, ad gravitatem motricem, ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ × A I (*Exemp.* 4.). Quare si proportio resistentiæ motricis in A ad gravitatem motricem augeatur in ratione quacumque, augebitur proportio A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A I, seu, ob datum numerum $\frac{2nn+2n}{n+2}$ augebitur proportio A H ad A I in eâdem ratione; & quia longitudo $\frac{AH^2}{AI}$ constans est, ac proinde $\frac{AH}{AI}$ est ut $\frac{1}{AH}$, & A I ut A H^2, necessum est ut A H minuatur in ratione quâ augetur $\frac{AH}{AI}$, & ut A I minuatur in ratione illâ duplicatâ.

(g) 121. * *Augetur verò proportio resistentiæ ad pondus &c.* Corpus specificè gravius vel levius dicitur, quod sub æquali

120.

ſub æquali magnitudine fit minor, vel medii denſitas major, vel reſiſtentia, ex magnitudine diminutâ diminuitur in minore ratione quàm pondus.

Reg. (h) 4. Quoniam denſitas medii prope verticem hyperbolæ major eſt quàm in loco A; ut habeatur denſitas mediocris, debet ratio minimæ tangentium HT ad tangentem AH inveniri, & denſitas in A augeri in ratione paulo ma-

li volumine majus vel minus pondus habet quàm alterum corpus quocum comparatur; & ideo gravitas ſpecifica corporis, volumine dato, eſt ut ipſius pondus abſolutum, id eſt, datâ gravitate acceleratrice, ut corporis maſſa (*per defin. 7. & not. 3. lib. 1.*). At, dato volumine, maſſa eſt ut denſitas (2. *lib.* 1.); quare gravitas ſpecifica corporis eſt ipſius denſitati proportionalis. Augetur itaque proportio reſiſtentiæ ad gravitatem motricem ſeu ad corporis pondus, tum ubi manentibus corporis volumine, figurâ & velocitate ac medii denſitate, manenteque proinde reſiſtentiâ, gravitas ſpecifica fit minor; tum ubi, cœteris paribus, medii denſitas augetur, quo caſu medii reſiſtentia creſcit cum denſitate, & corporis pondus in fluido denſiori & ſpecificè graviori magis ſublevati minuitur; tum ubi reſiſtentia ex magnitudine corporis diminutâ, diminuitur in minori ratione quàm pondus. Ex quibus liquet tertiam regulam determinandis motibus corporum variæ magnitudinis & denſitatis accommodatam eſſe.

122. *Lemma.* Datâ curvâ A G K, invenire minimam tangentium G T. Quoniam (ex dem. in Exemp. 4.) $XY^2 = GT^2 = A^2 + \frac{dd}{ee}A^2 - \frac{2dnbb}{eB^{n-1}} + \frac{nnb^4}{A^{2n}}$; hujus quantitatis, in quâ ſi detur curva A G K, ſola eſt variabilis A, fluxio ponenda eſt nihilo æqualis (48). Brevitatis causâ dicantur $1 + \frac{dd}{ee} = f$, $\frac{2dnbb}{e} = 2g$, $nnb^4 = h$, & $A = x$; erit $GT^2 = fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}$; & ſumptis fluxionibus, $0 = 2fxdx + \overline{n-1} \times 2gx^{-n}dx - 2nhx^{-2n-1}dx$. Dividatur æquatio tota per $2xdx$, & fiet $0 = f + \overline{n-1}gx^{-n-1} - nhx^{-2n-2}$; & multiplicando per x^{2n+2}, $fx^{2n+2} + \overline{n-1}gx^{n+1} = nh$, unde eruitur, ut fit in reſolutione æquationum ſecundi gradus,

$$x^{n+1} = \frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f},$$

& hinc habetur

$$x = \left(\frac{\sqrt{(n-1)^2gg + 4nhf} - (n-1)g}{2f}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Quare ſi loco x ſubſtituatur, hic ipſius valor in æquatione $GT = \sqrt{fxx - 2gx^{1-n} + hx^{-2n}}$, obtinebitur minima tangentium. Q. E. I.

123. *Cor.* Si curva A G K ſit hyperbola conica, erit index $n = 1$, & ideo $n - 1 = 0$, & $x = \sqrt[4]{\frac{h}{f}}$. Unde invenitur $GT^2 = f\sqrt[2]{\frac{h}{f}} - 2g + \frac{h}{\sqrt{\frac{h}{f}}} = 2\sqrt[2]{hf} - 2g = \frac{2bb}{e}\sqrt{ee+dd} - \frac{2dbb}{e} = 2bb \times \frac{[\sqrt{ee+dd} - d]}{e}$. Quia vero (*Exemp.* 4.) $d : e = VZ : XZ = XN : MN$, ac proinde $dd : ee = XN^2 : MN^2$, & componendo $dd + ee : ee = XN^2 + MN^2$, ſeu $MX^2 : MN^2$, atque adeo $\frac{\sqrt{ee+dd}}{e} = \frac{MX}{MN}$, & $\frac{d}{e} = \frac{XN}{MN}$; erit $\frac{\sqrt{ee+dd} - d}{e} = \frac{MX - XN}{MN}$. Præterea (*Exemp.* 4.) eſt $VG = \frac{bb}{DN}$, $AI = \frac{bb}{AN}$, & hinc $2AI \times AN = 2bb$. Erit igitur minimæ tangentium quadratum $GT^2 = \frac{2AI \times AN}{MN} \times \overline{MX - XN}$.

(h) * *Reg.* 4. Quoniam denſitas in loco quovis G eſt reciprocè ut tangens G T, quæ prope verticem hyperbolæ minor eſt quàm in loco A, manifeſtum eſt denſitatem medii prope verticem hyperbolæ majorem eſſe quàm in loco A. Denſitas

jore quàm semisummæ harum tangentium ad minimam tangentium GT.

(i) *Reg.* 5. Si dantur longitudines AH, AI, & describenda

sitas in loco A dicatur K, in loco G per quem ducitur tangentium minima G T, dicatur B; & erit $K : B =$ GT : AH, & hinc $K+B : K =$ GT + AH : GT, & $\frac{K+B}{2} : K = \frac{GT+AH}{2} : GT$. Esset autem $\frac{K+B}{2}$ densitas mediocris, si tangens A H foret omnium maxima, sicuti G T (hyp.) est omnium minima; & ideo, ut medii densitas ferè tanquam uniformis haberi posset, augenda esset densitas in A in ratione semisummæ tangentium $\frac{GT+AH}{2}$ ad minimam tangentium G T. Verùm quia tangens A H non est omnium maxima, sed tangentes aliæ ad partes curvæ versus K ductæ majores sunt; densitas in A augenda est in ratione paulo majore quàm semisummæ $\frac{GT+AH}{2}$ ad G T, ut medium tanquam uniforme ferè censeatur. Atque hoc pacto errores oriundi ex eo quod medium in loco A densius supponatur, corrigentur ferè aliis erroribus qui nascuntur ex eo quod in G medium rarius fingatur quam pro ratione curvæ A G K. 123.

Interim liquet veram trajectoriam quam corpus in medio uniformi describit, circa verticem magis distare ab asymptotis, & in partibus à vertice remotioribus propius ad ipsas accedere quàm pro ratione hyperbolarum in medio non uniformi descriptarum. Nam si e loco A, cum velocitate $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & directione A H projiciatur corpus in medio cujus densitas uniformis æqualis sit densitati mediocri medii in quo describitur hyperbola A G K; ob majorem medii uniformis densitatem in A, qua corporis velocitas impressa magis minuitur, trajectoria intra hyperbolam continebitur, adeoque prope verticem ab asymptotis magis distabit; & quia prope verticem est magis depressa, in partibus versus K à vertice remotioribus ad asymptotum N X propius accedet quàm hyperbola A G K; cum præsertim in medio uniformi spatium motu horizontali descriptum, semotâ gravitate, infinitum evadat (*per cor.* 1. *prop. V.*

(i) * *Reg.* 5. Si dentur longitudines AH,

da sit figura AGK: produc HN ad X, ut sit HX ad AI ut $n+1$ ad 1, centroque X & asymptotis MX, NX per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n.

Reg. (k) *6.* Quò major est numerus n, eò magis accuratæ sunt hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A, & minus accuratæ in ejus descensu ad K; & contra. Hyperbola conica mediocrem rationem tenet, estque cæteris simplicior. Igitur si hyperbola sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis.

Reg. 7. Et hinc liquet methodus expedita determinandi hanc hyperbolam ex phænomenis. Projiciantur corpora duo similia & æqualia, eâdem velocitate, in angulis diversis HAK, hAk, inci-

AH, AI cum angulo HAN, & describenda sit figura AGK: ex puncto H ad horizontalem AN demitte perpendiculum HN; produc HN ad X, ut sit HX æqualis facto sub $n+1$ & AI (demonstravimus enim in notâ ad reg. 1. esse HX æqualem facto $\overline{n+1}\times AI$) centroque X & asymptotis MX, NX per punctum A describatur hyperbola, eâ lege, ut sit AI ad quamvis VG ut XV^n ad XI^n: est enim (*per hyp. Exemp.* 4.) VG ad AI, ut AN^n ad DN^n, seu ut XI^n ad XV^n.

(k) * *Reg. 6.* Quo major est numerus n, eo magis hæ hyperbolæ in ascensu corporis ab A accedunt ad trajectorias in medio uniformi descriptas, & eo minus in descensu ad K accuratæ sunt; & contra. Nam quò major est numerus n, eò minus tangens GT, quæ densitati reciprocè proportionalis est, in ascensu corporis ab A variatur; & eo magis in descensu ad K mutatur, quippe data sit medii densitas in A cum angulo projectionis HAN, & quantitas $\frac{n+2}{AH}$ densitati in A (*Exemp.* 4.) proportionalis, data erit, ideoque tangens AH eo longior erit quò major fuerit numerus n; & quia dato angulo HAN, datur specie triangulum rectangulum HNA, ratioque proinde laterum AH, AN, HN etiam datur, liquet quod crescente AH aut numero n, crescant quoque latera AN & HN. Ex demonstratis in Exemplo 4°. corpore ascendente tangentis GT quadratum $GT^2 = DN^2 + [ZV - nVG]^2$, & corpore descendente est $GT^2 = DN^2 + [nVG - ZV]^2$. Ex natura hyperbolæ AGK, est $DN^n : AN^n = AI : VG$, ideoque $nVG = \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$. Ex demonstratione regulæ 1æ, $HX = \overline{n+1}\times AI$, & proinde $NX = HN + \overline{n+1}\times AI$, & $NX - AI = HN + nAI$. Sed ob triangula XZV, MNX, MAI similia, ZX seu DN est ad ZV, ut MN ad NX, & ut MA ad AI, & divisim DN est ad ZV, ut AN ad $NX - AI$ seu $HN + nAI$; unde fit $ZV = \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}$.

Quarè in corporis ascensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN} \; \frac{nAI \times AN^n}{DN^n}\right)^2$,

&

ncidantque in planum horizontis in K & k; & notetur proportio AK ad Ak. Sit ea d ad e. Tum erecto cujusvis lon-

gitudinis perpendiculo AI, assume utcunque longitudinem AH vel Ah, & (1) inde collige graphicè longitudines AK;

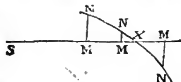
Ak,

& in descensu $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{nAI \times AN^n}{DN^n} \frac{DN \times HN + nAI \times DN}{AN}\right)^2$. Jam verò si numerus n satis magnus fuerit, lineæ AH, AN, HN tam in ascensu quam in descensu corporis longiores sunt, & in ascensu ab A est fere DN æqualis AN, in descensu verò DN quantum libet minor ipsâ AN. Unde in ascensu ab A est fere $\frac{nAI \times DN}{AN} = nAI$ & ideo $GT^2 = DN^2 + \left(\frac{DN \times HN}{AN}\right)^2 = DN^2 + HN^2$ ferè. Est autem $AH^2 = AN^2 + HN^2$: quare ratio GT ad AH in ascensu corporis ab A est fere æqualitatis, dum numerus n satis magnus supponitur, ac proinde non multum variatur densitas: In descensu verò ad K, fit DN quantumlibet exigua respectu datæ AN, & ideo quantitas $\frac{nAI \times AN^n}{DN^n}$ vehementer crescit, & hinc tangens GT multum variatur ubi numerus n magnus est. Contra fit, si numerus ille sit admodum exiguus. Porro cùm numerus n possit esse quilibet integer vel fractus, & in hyperbola conica sit n æqualis unitati, quæ veluti medium locum tenet inter numeros omnes integros & fractos, satis manifestum est hyperbolam conicam inter superiores omnes & inferiores hyperbolas mediocrem rationem tenere, & quia etiam cæteris simplicior est, posse loco veræ trajectoriæ in medio uniformiter denso adhiberi. Si igitur hyperbola AGK sit hujus generis, & punctum K, ubi corpus projectum incidet in rectam quamvis AN, horizontalem vel horizonti obliquam, per punctum A transeuntem, quæratur: occurrat producta AN asymptotis MX, NX, in M & N, & sumatur NK ipsi AM æqualis, & habebitur punctum K (per theor. 2. de conicis).

(1) * *Et inde collige graphicè &c.* Datâ enim tangente AH, tum magnitudine tum positione, datur verticalis HN

cum

Ak; per reg. 6. Si ratio *AK* ad *Ak* sit eadem cum ratione *d* ad *e*, (m) longitudo *AH* rectè assumpta fuit. Sin minus cape in rectâ infinitâ *SM* longitudinem *SM* æqualem assumptæ *AH*, & erige perpendiculum *MN* æquale rationum differentiæ $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ ductæ in rectam quamvis datam. Simili methodo ex assumptis pluribus longitudinibus *AH* invenienda sunt plura puncta *N*, & per omnia agenda (n) curva linea regularis *NNXN*, secans rectam *SMMM* in *X*. Assumatur demum *AH* æqualis abscissæ *SX*, & inde denuo inveniatur longitudo *AK*; & longitudines, quæ sint ad assumptam longitudinem *AI* & hanc ultimam *AH*, ut longitudo *AK* per experimentum cognita ad ultimo inventam longitudinem *AK*, erunt veræ illæ longitudi-



cum puncto N; & quia assumitur etiam A I, & est H X = 2 A I (per dem. reg. 1[a].) ob *n* = 1; dabitur hyperbolæ centrum X, & inde ob datum punctum I dabitur asymptotus altera X I M cum puncto M in horizontali M N; & capiendo N K æqualem datæ M A, dabitur punctum K, & hinc longitudo A K obtinebitur. Eodemque modo invenietur altera longitudo A k.

(m) * *Longitudo A H rectè assumpta fuit.* Datâ medii densitate in A cum velocitate corporis sub diversis angulis H A K, h A k projecti, manet perpendiculum A I, & tangens A H æqualis est tangenti A h (*per regulam 1am*). Datis tangente A H, angulo H A K & perpendiculo A I, hyperbola A G K describi potest (*per reg. 6am, & notam præced.*) & ideo data est tum specie, tum magnitudine. Unde si dentur tantum angulus H A K & ratio tangentis H A ad A I, hyperbola A G K specie tantum dabitur, id est, omnes hyperbolæ, quæ ex his duobus datis describentur, similes erunt. Quare si in hyperbolâ A G K, quæ in chartâ descripta supponitur, tangens assumpta A H sit ad perpendiculum A I, ut tangens hyperbolæ quam corpus sub angulo æquali H A K projectum in medio resistente describit, est ad suum perpendiculum A I; hyperbola A G K in charta descripta similis erit hyperbolæ quæ in medio resistente describitur. Et eodem argumento altera hyperbola, cujus est amplitudo A k, & tangens A h, manente perpendiculo A I, similis erit hyperbolæ illi quam corpus sub angulo æquali h A k, projectum in secundo experimento describit. Quà propter, ob figurarum in chartâ & in medio resistente descriptarum similitudinem, amplitudines A K, A k erunt inter se ut homologæ amplitudines hyperbolarum quæ in experimentis descriptæ sunt, id est, A K : A k = d : e.

(n) * *Curva regularis.* Vide notam 75. lib. hujus.

tudines AI & AH, (o) quas invenite oportuit. Hisce verò datis dabitur & resistentia medii in loco A, (p) quippe quæ sit ad vim gravitatis ut AH ad $\frac{4}{3}$ AI. Augenda est autem densitas medii per reg. 4. & resistentia modo inventa, si (q) in eâdem ratione augeatur, fiet accuratior.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND.' SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

Reg. 8. Inventis (r) longitudinibus AH, HX; si jam deside-

(o) * *Quas invenire oportuit.* Cùm enim abscissa S M longitudini assumptæ A H æqualis sit, & rationum differentia $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ exponatur per ordinatam M N; ubi fit S M = S X & proinde M N = o, est etiam $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e} = o$, & ideo $\frac{AK}{Ak} = \frac{d}{e}$, atque S X æqualis veræ longitudini assumendæ A H (*per not. præced.*). Si itaque ex datis perpendiculo A I & verâ longitudine inventâ A H cum angulo H A N quæratur, ut supra, longitudo A K; ob similitudinem figurarum in medio resistente & in charta descriptarum, erit longitudo A K experimento cognita ad longitudinem A K ultimo inventam in charta, ut longitudo A H in medio resistente ad longitudinem A H in chartâ ductam, atque etiam ut perpendiculum A I in medio resistente ad perpendiculum A I in charta assumptum. Quibus inventis, describi poterit hyperbola similis & æqualis hyperbolæ, quam corpus in medio resistente descripsit. 123.

(p) * *Quippe quæ sit ad vim gravitatis &c.* Ex demonstratis in hoc scholio ante regulam 1am. resistentia est ad gravitatem ut A H ad $\frac{2nn+2n}{n+2}$ A I, hoc est, ut A H ad $\frac{4}{3}$ A I, ob $n = 1$ (per hyp.).

(q) * *Si in eadem ratione augeatur.* Nam datâ velocitate, resistentia est ut medii densitas.

(r) * *Inventis longitudinibus* AH, HX *&c.* Inventis enim (*per reg.* 7.) lineis A I & A H, datur linea H X, ut pote quæ æqualis est 2 A I, ob $n = 1$, (*reg.* 5.).

ſideretur poſitio rectæ *AH*, ſecundum quam projectile, datâ illâ cum velocitate emiſſum incidit in punctum quodvis *K*: ad puncta *A* & *K* erigantur rectæ *A C*, *K F* horizonti perpendiculares, quarum *AC* deorſum tendat, & æquetur ipſi *A I* ſeu $\frac{1}{2}$ *HX*. Aſymptotis *A K*, *K F* (s) deſcribatur hyperbola, cujus conjugata tranſeat per punctum *C*, centroque *A* & intervallo *AH* deſcribatur circulus ſecans hyperbolam illam in puncto *H*; & projectile ſecundum rectam *AH* emiſſum incidet in punctum *K*. *Q. E. I.* Nam punctum *H*, (t) ob datam longitudinem *AH*, locatur alicubi in circulo deſcripto. Agatur *CH* occurrens ipſis *AK* & *KF*, illi in *E*, huic in *F*; & (u) ob parallelas *CH*, *MX* & æquales *AC*, *AI*, erit *AE* æqualis

(s) * *Deſcribatur hyperbola* (346. lib. 1.)

(t) * *Ob datam longitudinem AH*, per reg. 1am.

(u) * *Et ob parallelas CH, MX &c.* Nam ſi ſupponamus H eſſe punctum quæſitum, per quod ducenda eſt recta AH, erit (*per conſtr.*) HX æqualis & parallela IC, & ideo CH parallela IX ſeu MX, ac triangula CAE, IAM ſimilia proindeque cum ſit CA = AI (*per conſtr.*) erit etiam AE = MA = KN, (*per theor. 1. de Conicis*). Sed ob triangula ſimilia CAE, HNE, & ob parallelas KF, NH, eſt CE : AE = EH : EN = FH : KN. Cum igitur ſit AE = KN, erit quoque CE = FH; ac proinde incidit punctum H in hyperbolam (*per theor. 1. de hyp.*)

ſis AM, & propterea etiam æqualis KN. Sed CE eſt ad AE ut FH ad KN, & propterea CE & FH æquantur. Incidit ergo punctum H in hyperbolam aſymptotis AK, KF deſcriptam, cujus conjugata tranſit per punctum C, atque ideo reperitur in communi interſectione hyperbolæ hujus & circuli deſcripti. *Q. E. D.* Notandum eſt autem, quòd hæc operatio perinde ſe habet, ſive recta AKN horizonti parallela ſit, ſive ad horizontem in (x) angulo quovis inclinata: (y) quodque

(x) * *In angulo quovis inclinata.* Demonſtratio enim lineam M A K N per puncta data A & K ductam horizonti parallelam eſſe minime ſupponit, eademque prorſus manet ſi linea illa ad horizontem inclinata fuerit.

(y) * *Quodque ex duabus interſectionibus.* Quoniam punctum H per interſectionem circuli cum hyperbola determinatur (*ex dem.*), & circulus hyperbolam in duobus punctis interſecare poteſt, ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli, ſeu duæ ſunt poſitiones tangentis A H ſecundum quam projectile datâ velocitate emiſſum incidit in punctum K.

124. *Problema.* Inventis longitudinibus A I & A H, maximam altitudinem G D, ad quam corpus ſub angulo dato H A N projectum pertingere poteſt, definire.

Sit, ut in exemplo 3°. (*vid. fig. pag. 93.*) B N $= a$, B D $= o$, N X $= c$, ratio data V Z ad Z X, ſeu A I ad A M $= \frac{m}{n}$, V G $= \frac{bb}{a}$, ideoque A I $= \frac{bb}{AN}$, & $bb =$ A I × A N. Et erit (*Exemp.* 3°.) G D $= c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ &c.; & $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{a}o = Qo$. Eſt autem Qo ut ordinatæ G D fluxio, quæ, ut habeatur ordinata omnium maxima, nihilo æquanda eſt (48): quare erit $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$, & $aa = \frac{nbb}{m}$, ſive DN^2 $= \frac{AM \times AI \times AN}{AI} =$ A N × A M. Si ergo capiatur D N media proportionalis inter A N & A M, ducaturque per D ordinata G D, hæc erit omnium maxima. Quoniam verò $\frac{m}{n} = \frac{bb}{aa}$ & proinde $\frac{m}{n}a = \frac{bb}{a}$, erit maxima ordinata G D ſeu $c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} = c - \frac{2bb}{a} = \text{NX} - \frac{2\text{AI} \times \text{NA}}{\text{DN}}$. 124

Quare G D ordinata maxima æqualis eſt differentiæ inter verticalem N X & quartam proportionalem ad D N, A N & 2 A I. Q. E. I.

125. *Problema.* Datis longitudinibus A I & A H, angulum projectionis H A N maximæ omnium amplitudini A K convenientem invenire. Dicantur A H $= a$, A I $= b$, H X $= 2$ A I $= 2b$, A K $= e$, A N $= x$, H N $= y$, & erit $x - e =$ K N $=$ M A $=$ A E, ac $b =$ A I $=$ A C (*per reg.* 8), proindeque E N $=$ A K $= e$. Triangula ſimilia E A C, E N H hanc proportionem ſuppeditant, A E ($x - e$) : E N (e) $=$ A C (b) : H N (y), & componendo $x : e = b + y : y$, unde habetur $e = \frac{xy}{b+y}$, $x = \frac{be + ey}{y}$, & $xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$. Eſt etiam, ob angulum A N H rectum, $aa - yy = xx = ee\frac{[b+y]^2}{yy}$, & hinc $aayy - y^4 = ee[b+y]^2$. Capiatur hujus æquationis fluxio, & amplitudinis maximæ e fluxione nihilo æquatâ (48), erit illa $2a^2ydy - 4y^3dy = 2ee[b+y]dy$, &, dividendo per $2dy$, $aay - 2y^3 = ee[b+y]$. Erat autem $e = \frac{xy}{b+y}$, & ideo $ee = \frac{xxyy}{[b+y]^2}$.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

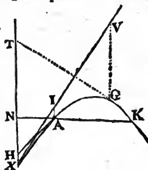
que ex duabus interſectionibus H, h duo prodeunt anguli NAH, NAh; & quod in praxi mechanicâ ſufficit circulum ſemel deſcribere, deinde regulam interminatam CH ita applicare ad punctum C, ut ejus pars FH, circulo & rectæ FK interjecta, æqualis ſit ejus parti CE inter punctum C & rectam AK ſitæ.

Quæ

$= \frac{aayy - y^4}{[b+y]^2}$, ac proinde $ee(b+y)$ $= \frac{aayy - y^4}{b+y}$. Quare erit $aay - 2y^3$ $= \frac{aayy - y^4}{b+y}$, ſive $aaby + aay^2$ $- 2by^3 - 2y^4 = aay^2 - y^4$, unde, reductione factâ & diviſis terminis per y, eruitur $aab = 2byy + y^3$. Hâc igitur æquatione reſolutâ, invenitur y ſeu H N ſinus anguli H A N, exiſtente ſinu toto A H. Q. E. D.

126. *Cor.* Manifeſtum eſt in æquatione ne $aab = 2byy + y^3$, quantitatem $2byy$ minorem eſſe quantitate aab, & proinde quadratum yy, ſeu H M², minus dimidio quadrato $\frac{1}{2}aa$ vel $\frac{1}{2}$ A H²; unde ſequitur angulum quæſitum H A N ſemirecto minorem eſſe, qui, ſi medium non reſiſteret, foret ſemirectus. *Sit* medii denſitas, adeoque & reſiſtentia, admodum parva, & erit ferè $y = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, atque $aab = 2byy + ayy\sqrt{\frac{1}{2}}$, & hinc $yy = \frac{aab}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}$, ac $y = a\sqrt{\frac{b}{2b + a\sqrt{\frac{1}{2}}}}$, quàm proximè.

Quæ de hyperbolis dicta sunt facilè applicantur ad parabolas. Nam si $XAGK$ parabolam designet quam recta XV tangat in vertice X, sintque ordinatim applicatæ IA, VG ut quælibet abscissarum XI, XV dignitates XI^n, XV^n; agantur XT, GT, AH; quarum XT parallela sit VG & GT, AH parabolam tangant in G & A: & corpus de loco quovis A, secundum rectam AH productam, justâ cum velocitate projectum, describet hanc parabolam, si modò densitas medii, in locis singulis G, sit reciprocè ut tangens GT. Velocitas autem in G ea erit quâcum projectile pergeret, in spatio non resistente in parabolâ conicâ verticem G, diametrum VG deorsum productam, & latus rectum $\frac{2GTq}{nn - n \times VG}$ habente. Et resistentia in G erit ad vim gravitatis ut GT ad $\frac{2nn - 2n}{n-2} VG$. Unde si NAK lineam horizontalem designet, & manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, mutetur utcunque angulus NAH; manebunt longitudines AH, AI, HX, & inde datur parabolæ vertex X, & positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dantur omnia parabolæ puncta G, (z) per quæ projectile transibit.



(z) *Per quæ projectile transibit.* Producatur V G ut horizontalem N K secet in D, & rectam X Z horizonti parallelam in Z. Pro B N, B D, N X scribantur *A*, *O*, *e*, respectivè; sitque M intersectio linearum X V, N K; & X N ad N M, sive ob 126

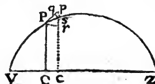
ob triangulorum X N M, V Z X similitudinem, V Z ad Z K vel D N ut d ad e; ideoque D N $= A + O$, & V Z $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O}$. Quia vero V G est ut X V^n (per hypoth.), & V X est ad X Z, seu D N, in datâ ratione X N ad N M; erit etiam V G ut D N^n. Ponatur ergo V G $= \frac{DN^n}{bb} = \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{A^n}{bb} + \frac{nA^{n-1}O}{bb} + \frac{n.\overline{n-1}}{1.\,2}\frac{A^{n-2}}{bb}O^2 + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.\,2.\,3.}\frac{A^{n-3}}{bb}O^3 +$ &c., & erit G D $=$ V Z $-$ N K $-$ V G $= \frac{d}{e} \times \overline{A+O} - e - \frac{\overline{A+O}^n}{bb} = \frac{d}{e}A - e - \frac{A^n}{bb} + \frac{d}{e}O - \frac{nA^{n-1}}{bb}O - \frac{(nn-n)A^{n-2}}{2bb}O^2 - \frac{(n^3-3nn+2n)A^{n-3}}{6bb}O^3 -$ &c. Quare erit $Q = \frac{nA^{n-1}}{bb} - \frac{d}{e}$; $R = \frac{\overline{nn-n}A^{n-2}}{2bb}$, & $S = \frac{\overline{n^3-3nn+2n}A^{n-3}}{6bb}$. Per punctum B ducatur ordinata B g, ad quam demittatur ex G perpendiculum G r, sitque X Y æqualis & parallela tangenti G T; & ob triangula G r g, X Z Y similia, erit G r^2 ad G g^2 ut X Z^2 seu D N^2 ad X Y^2 vel G T^2; est autem G $r^2 = O^2$, $rg^2 = QQOO$, & ideo G $g^2 = OO \times \overline{1+QQ}$: quare cum sit etiam B N seu D N $= A$, erit G $T^2 = AA \times \overline{1+QQ}$, G T $= A\sqrt{\overline{1+QQ}}$, & $\frac{GT}{A} = \sqrt{\overline{1+QQ}}$. Per coroll. 1. prop. X. medii densitas in loco G est ut $\frac{S \times A}{R \times GT}$, & (*ex demonstratis*) $\frac{S}{R} = \frac{n-2}{3A}$, ideoque $\frac{S \times A}{R \times GT}$ est ut $\frac{n-2}{3GT}$; quare, ob datum numerum $\frac{n-2}{3}$, densitas est reciprocè ut tangens G T. Velocitas in G (*per prop.* X.) ea est, quâ cum projectile pergeret, in spatio non resistente, in parabolâ conicâ verticem G, diametrum G D, & latus rectum $\frac{1+QQ}{R}$ habente; & ideò cum sit $\frac{1+QQ}{R} = \frac{GT^2}{A^2 R} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times \frac{A^n}{bb}} = \frac{2GT^2}{\overline{nn-n} \times VG}$ (*ex dem.*), parabolæ latus rectum erit $\frac{2GT^2}{\overline{nn-n}.\,VG}$. Resistentia in G (*per cor.* 1. *prop.* X.) est ad vim gravitatis, ut $3S \times$ G T ad $4RR \times$ D N, id est, ut G T ad $\frac{4RR \times A}{3S}$; sed $4RR \times A = \frac{\overline{nn-n}^2 \times A^{2n-3}}{b^4}$, & $3S = \frac{\overline{nn-n} \times \overline{n-2}}{2} \times \frac{A^{n-3}}{bb}$, atque ideo $\frac{4RR \times A}{3S} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times \frac{A^n}{bb} = \frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. Erit igitur resistentia ad gravitatem, ut G T

ad

ad $\frac{2nn - 2n}{n-1} \times VG$. Velocitas in loco G (*per prop.* X.) est ut $\sqrt{\frac{1+QQ}{R}} = \sqrt{\frac{2GT^2}{nn - n \times VG}}$, ideoque ob datum numerum $\frac{2}{nn-n}$, ut $\frac{GT}{\sqrt{VG}}$.

Quando igitur corpus est in A, medii densitas est ut $\frac{1}{AH}$, & velocitas ut $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$; unde manente tum densitate medii in A, tum velocitate quâcum corpus projicitur, & mutato utcumque angulo NAH, manebunt AH, & $\frac{AH}{\sqrt{AI}}$, ac proinde AL. Quia porro $ZY^2 = XY^2 - XZ^2 = GT^2 - DN^2 = AA \times \overline{1+QQ} - AA = AAQQ$, & ideo $ZY = Q \times A = \frac{nA^n}{bb} - \frac{d}{e}A = nVG - VZ$, atque $ZY + VZ = VY = nVG$; erit in loco A, $Iy = n \times AI$, & hinc $Ay = XH = nAI - AI$. Quare manente AI, manebit etiam HX, ob datum numerum $n-1$. Inveniantur, uti regulâ 7â. pro hyperbolâ factum est, longitudines AH, AI & proinde HX; & inde dabitur punctum H, per quod si ducatur THX ad horizontem perpendicularis, datâ XH, dabitur positio rectæ XI, & sumendo VG ad IA ut XV^n ad XI^n, dabuntur omnia parabolæ puncta G, per quæ projectile transibit.

Problema elegantissimum de inveniendâ trajectoriâ quam corpus in medio juxta duplicatam velocitatum rationem resistente describit, in suis Principiis prætermisit NEWTONUS. Rem generaliter postea confecerunt Clarissimi Mathematici *Joannes Bernoullius*, *Hermannus*, & *Eulerus*, qui trajectoriam a projectili descriptam in medio quod in quâlibet multiplicatâ velocitatum ratione resistit, analyticè invenerunt. Horum vestigiis insistentes, tam elegans problema in nostris commentariis desiderari nolumus.



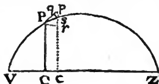
PROBLEMA.

127. 127. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis VZ, determinare curvam VPp, quam describit projectile in medio uniformi quod in multiplicatâ quâlibet velocitatum ratione resistit.

Ductis ordinatis verticalibus PC, pc infinitè propinquis, & ex puncto P ad pc perpendiculo Pr; dicantur vis gravitatis $= g$, velocitas projectilis in loco P $= v$, resistentia ibidem $= r = \frac{v^{2n}}{2a}$, ita ut sit a quantitas constans quæ determinabitur ex determinatione resistentiæ, sit Tangens Pp, arcus Ps $= ds$, VC $= x$, PC $= y$, & ideo pr $= dy$, ac Cc seu Pr $= dx$; fluxio hæc dx constans supponatur. * Resolvatur actio gravitatis quæ exprimitur per ps in actionem sq curvæ perpendicularem; & actionem pq, curvæ parallelam quæ in ascensu corporis illud retardat in descensu accelerat, erit actio tota gravitatis ad ejus actionem quâ motum in curva retardat in ascensu & accelerat in descensu ut est ps ad pq, & ob similia triangula pqs, Ppr, est ps ad pq sicut Pp sive Ps ad pr, ideoque Ps (ds) ad pr (dy) sicut gravitas tota g, ad $\frac{g\,dy}{ds}$ quæ est actio gravitatis ad retardandum corpus in ascensu, & quia in descensu est pr $= -dy$, est $\frac{-g\,dy}{ds}$ actio gravitatis ad accelerandum corpus in descensu; Unde tota retardatio corporis tam ex gravitate quam ex resistentia orta, est $r + \frac{g\,dy}{ds}$ tam in ascensu quam in descensu.

Decrementum autem velocitatis $-dv$; est semper ut vis retardans & tempus quo durante ea vis agit conjunctim, idque tempus est semper æquale arcui descripto Ps

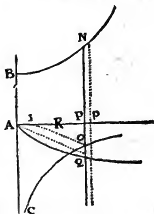
 ad



ad velocitatem v applicato, hoc est, temporis incrementum $dt = \frac{ds}{v}$ unde velocitatis decrementum $-dv = \overline{r + \frac{gdy}{ds}} \times \frac{ds}{v} = -\frac{rds + gdy}{v}$, & quia ex Hypothesi $r = \frac{v^{2n}}{2a}$, est $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$; Ut autem obtineatur valor v, & dv expressione quæ ad curvam referatur, notandum quòd lineola ps sive $-ddy$ est spatiolum urgente gravitate tempore dt percursum, ideoque est ut vis gravitatis g per temporis quadratum multiplicata, ideoque est $-ddy = gdt^2 = \frac{gds^2}{v^2}$ (cum sit $dt = \frac{ds}{v}$) unde est $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ sive $-v^2 ddy = gds^2$, & fluxionem utrinque sumendo est $-v^2 d^3y - 2vddydv = 2gdsdds$, & cum lineolâ pq designet dds sitque Pp sive Ps (ds) ad Pr (dy) sicut ps ($-ddy$) ad pq (dds) est $dsdds = -dyddy$ unde hæc ultima æquatio fit $-v^2 d^3y - 2vddydv = -2gdyddy$ & $-2vddydv = v^2 d^3y - 2gdyddy$ & $-vdv = \frac{v^2 d^3y}{2ddy} - gdy$, unde cùm inventum etiam fuerit $-vdv = \frac{v^{2n}ds}{2a} - gdy$, est $\frac{v^2 d^3y}{ddy} = \frac{v^{2n}ds}{a}$, & valorem inventum $v^2 = \frac{gds^2}{-ddy}$ substituendo, fit tandem $\frac{gds^2 d^3y}{-ddy^2} = \frac{g^n ds^{2n+1}}{-addy^n}$ sive reductione factâ $ad^3y = \frac{g^{n-1} ds^{2n-1}}{ddy^{n-2}}$.

Ut autem ex hac æquatione eruatur æquatio inter dx, & dy, & inter x & y, designet p variabiles quascumque quæ in æquatione quæsita ita multiplicant fluxionem dx ut ea fit æqualis dy, sitque $dy = pdx$ & $dy^2 = p^2dx^2$, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2$ erit $ds^2 = dx^2 + p^2dx^2 = \overline{1 + p^2} \times dx^2$, & $ds = dx\sqrt{1 + pp}$ unde $ds^{2n-1} = dx^{2n-1} \times \overline{1 - pp}^{\frac{2n-1}{2}}$.

Præterea cùm dx constans supponatur erit $dy = pdx$, $ddy = dxdp$, & sumpta fluxione erit & $d^3y = dxddp$. Et si tandem q designet variabiles quæ ita multiplicant fluxionem dx, ut ea fiat æqualis dp, sitque $qdx = dp$ erit $dxdq = ddp$ & $dx^2dq = dxddp = d^3y$, & æquatio proposita in hanc vertetur $adx^2dq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1 - pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dx\,dp^{n-2}} = \frac{g^{n-1}dx^{n+1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$, & diviso utroque termino per dx^2, erit $adq = \frac{g^{n-1}dx^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{dp^{n-2}}$. Denique loco dx posito ejus valore $\frac{dp}{q}$ erit $adq = \frac{g^{n-1}dp^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}dp^{n-2}}$ sive $adq = \frac{g^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}}{q^{n-1}} \times dp$, hoc est $aq^{n-1}dq = g^{n-1}\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, quæ est æquatio fluxionalis inter dp & dq, ex quâ per curvarum quadraturam obtinebitur æquatio inter p & q & inde inter x & y, ut id ipsum nunc exponemus, summando enim terminos æquationis $aq^{n-1}dq = g^{n-1} \times \overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$ habetur $\frac{aq^n}{n} = g^{n-1} \times \overline{S\,\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp}$, hoc est $q = \sqrt[n]{\frac{ng^{n-1}}{a}} \times S\,\overline{1 + pp}^{\frac{2n-1}{2}}dp$, unde fit curva cujus



jus abscissa qualiscumque A P sit $= p$, sitque ejus ordinata P N semper æqualis $\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}$, erit area A B P N $= S\,\overline{1+pp}^{\frac{2n-1}{2}}\,dp$, ducatur ergo ab altera parte P ordinata P O talis ut sit semper æqualis $\frac{1}{\sqrt{\frac{ang^{n-1}}{a}} \times ABPN}$ erit ea P O æqualis $\frac{1}{q}$, cùmque sit $dx = \frac{dp}{q} = \frac{1}{q} \times dp$, erit (summando) $x = S\,\frac{1}{q} \times dp$ sive æqualis area A C P O.

Denique cùm sit $dy = p\,dx = \frac{p\,dp}{q} = \frac{p}{q} \times dp$ & summando $y = S.\,\frac{p}{q} \times dp$ ideo si è puncto P versus originem A sumatur P I æqualis unitati, ductaque I O, ducatur ipsi parallela A Q ab origine curvæ quæ secet P O productam in Q, erit $1 : PO$ (sive $\frac{1}{q}$) $= AP$ (sive p) $: PQ = \frac{p}{q}$, itaque area curvæ A P Q erit $S.\,\frac{p}{q}\,dp$ ac per consequens æqualis y, ergo datis curvarum A C P O, & A P Q quadraturis datur ratio x ad y, & ex earum ordinatis ratio dx ad dy: sed ut habeatur origo a quâ sumi debent illarum arearum portiones, sumendum est id punctum in quo P O est ad P Q ut Cosinus anguli jactus cum Horizonte sub quo corpus moveri incepit ad ejus anguli sinum, quippe ea fuit ipso motus initio ratio elementorum dx & dy; sique ille cosinus dicatur c, & sinus s, erit in ea origine $c : s = \frac{1}{q} : \frac{p}{q}$, unde si sumatur A R sive $p = \frac{s}{c}$ erit ejus extremitas R origo arearum quarum valor rationem quæsitarum x & y exhibebit. † 127.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. II. PROP. X. PROBL. III.

128. *Cor.* 1. Quoniam invenimus $v^2 = \frac{-g\,ds^2}{ddy}$, $ds^2 = dx^2(1+pp)$, & $ddy = dx\,dp$; erit $v^2 = \frac{-g\,dx(1+pp)}{dp}$; sed $dp = q\,dx$; quare erit $v^2 = \frac{-g(1+pp)}{q}$. Præterea (13) $dt = \frac{ds}{v} = \frac{dx\sqrt{1+pp}}{v} = \frac{dp\sqrt{1+pp}}{q\,v}$, & $v = \sqrt{\frac{-g(1+pp)}{q}}$; quare erit $dt = \frac{dp}{\sqrt{-gq}}$, & $t = S.\,\frac{dp}{\sqrt{-gq}}$. Invenietur itaque tum velocitas corporis in loco P trajectoriæ V P p, tum tempus t quo arcus V P describitur.

129. *Cor.* 2. Si in æquatione generali supra reperta, $a\,d^{1}y = \frac{g^{n-1}ds^{2n-2}}{ddy^{n-2}}$, ponatur $n = 1$, seu resistentia velocitatis quadrato proportionalis; æquatio in hanc migrabit $a\,d^{1}y = ds\,ddy$; & ponendo $dy = p\,dx$, ac $dx = \frac{dp}{q}$, invenietur $aq = S.\,dp\sqrt{1+pp}$, $x = S.\,\frac{dp}{q} = S.\,\frac{a\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $y = S.\,\frac{p\,dp}{q} = S.\,\frac{a\,p\,dp}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, $vv = \frac{-ag(1+pp)}{S.\,dp\sqrt{1+pp}}$, & $t = S.\,\frac{a^{\frac{1}{2}}\,dp}{\sqrt{-g\,S.\,dp\sqrt{1+pp}}}$. Est autem $S.\,dp\sqrt{1+pp}$ area hyperbolæ æquilateræ, cujus abscissa est p & ordinata ducta perpendiculariter ad axem con-

conjugatum $\sqrt{1 + pp}$, semiaxis verò unitas. Unde invenietur q in p per hujus hyperbolæ aream; at abscissa x obtinebitur per aream curvæ cujus est abscissa p & ordinata $\frac{1}{q}$; & correspondens ordinata y definietur per aream curvæ, cujus abscissa est p & ordinata $\frac{p}{q}$. Ex quibus manifestum sit veræ trajectoriæ V P Z descriptionem adeo perplexam esse, ut ex illa vix quidquam ad usus philosophicos aut mechanicos accommodatum possit deduci.

130. *Coroll.* 3. Quoniam posito $n = 1$, resistentia medii est $\frac{v^2}{2a}$ (127), & ubi resistentia sit gravitati æqualis, id est, ubi v æqualis est velocitati terminali, habetur $\frac{v^2}{2a} = g$, & $u^2 = 2ag$, ideò (30. *lib.* 1.) a est altitudo ex quâ corpus in medio non resistente vi constante g sollicitatum caderet ut velocitatem terminalem acquirat.

131. *Coroll.* 4. Si in hypothesi corollarii secundi resistentia parva fuerit qualem ferè experitur globus ferreus non parvus magnitatis velocitate per aera projectus, trajectoria V P B, quam globus ille in medio resistente describit, non multùm aberrat a Parabolâ conicâ V p b, quam eâdem urgente vi gravitatis uniformi g seu 1 describeret. Quia tamen resistentia velocitatem projectionis minuit, ordinata C P, ad trajectoriam V P B, in medio resistente paulò minor erit quam ordinata C p ad parabolam conicam V p b. Porrò si abscissa V C dicatur x ordinata C p dicatur z, amplitudo V b, h & proindè C b, $h - x$, erit (ex naturâ parabolæ) rectangulum sub abscissis V C × C b, seu $hx - xx$, æquale rectangulo ordinatæ C p, vel z in datam quantitatem l, & ideò æquatio erit $z = \frac{hx}{l} - \frac{xx}{l}$. Cùm igitur ordinata C P (quæ dicatur y) paulò minor sit quam C p, seu z, ponatur $y = \frac{hx}{l} - \frac{xx}{l} - ex^3$, & æquatio ista in quâ est e quantitas exigua, naturam trajectoriæ V P B exponere poterit quam proximè; loco $\frac{h}{l}$, & $\frac{1}{l}$, scribantur b & c ut æquatio sit $y = bx - cx^2 - ex^3$. Ut jam determinentur coëfficientes b, c, e, capiantur æquationis fluxiones, prima, secunda & tertia, factâ dx constante, erunt illæ $dy = bdx - 2cxdx - 3ex^2dx$; $ddy = -2cdx^2 - 6exdx^2$, $d^3y = -6edx^3$. Coincidentibus punctis V & C, fit $x = o$, & ideo $dy = bdx$, $ddy = -2cdx^2$ & $d^3y = -6edx^3$. Ex æquatione $dy = bdx$, deducitur proportio $dx : dy = 1 : b$; & coincidente C cum V, dx est ad dy ut sinus totus V Q ad tangentem Q S, anguli projectionis T V Q; Quare si sinus totus dicatur 1, erit b tangens anguli projectionis, & ideò dato hoc angulo datur b. Si velocitas cum quâ corpus è loco V projicitur sit v, & f, altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g, in spatio non resistente cadendo acquirit velocitatem illam v, erit $2gf = vv$ (18.19.20. *hujusce lib.*) sed (30) $vv = -\frac{gds^2}{ddy}$, ideoque $2gf = -\frac{gds^2}{ddy}$, & $2f = -\frac{ds^2}{ddy}$. Est autem $ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + bbdx^2$, & $ddy = -2cdx^2$ in loco V, (ex dem.). Quarè erit $2f = \frac{1 + bb}{2c}$, & hinc $c = \frac{1 + bb}{4f}$. Cùm igitur quantitates b, & f, datæ sint, data erit c. Invenietur quantitas tertia e, per æquationem $ad^3y = ds\,ddy$ (129) & per æquationes suprà repertas $ds = dx\sqrt{1 + bb}$, $ddy = -2cdx^2$, & $d^3y = -6edx^3$; ex quibus eruitur $-6aedx^3 = -2cdx^3\sqrt{1+bb}$, & hinc $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{\overline{1+bb} \times \sqrt{1+bb}}{12af}$. Tota igitur æquatio assumpta $y = bx - cx^2 - ex^3$ fit $y = bx - x^2 \times \left(\frac{1+bb}{4f}\right) =$

$x^3 \times \left(\frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}\right)$ in quâ datâ velocitate terminali datur a, (130). Poteris etiam linea a, per experimentum reperiri; Nam si e loco V sub angulo dato T V B datâ cum velocitate projiciatur corpus in medio supposito & observetur amplitudo jactûs V B, quæ dicatur A, in æquatione ad trajectoriam V P B, loco x, scribatur A, & loco y, scribatur o, quia ordinata CP, seu y evanescit in B invenietur $o =$

$$bA - AA \times \frac{(1+bb)}{4f} - A^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af};$$

undè deducitur $a = AA \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12fb - 3A \times (1+bb)}$.

132. *Coroll.* 5. Jactûs amplitudo V B, invenitur, factâ $y = o$, undè eruitur $xx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} + x \times \frac{(1+bb)}{4f} = b$, &

$$VB = x = -\frac{3a}{2\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\left(\frac{9a^2}{4+4bb} + \frac{12afb}{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}\right)}.$$

133. *Coroll.* 6. Maxima jactûs altitudo D G reperitur, sumptâ æquationis ad trajectoriam V P B, fluxione & factâ $dy = o$ (48); fit enim $o = bdx - 2xdx \times \frac{1+bb}{4f} - 3x^2dx \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$ undè deducitur $VD = x = -\frac{a}{\sqrt{1+bb}} + \sqrt{\frac{aa}{1+bb} + \frac{4afb^{\frac{3}{2}}}{1+bb}}$. Quo valore loco x, in æquatione ad trajectoriam substituto, obtinebitur y, seu maxima altitudo D G.

134. *Coroll.* 7. Ut determinetur tangens anguli T V B, sub quo corpus datâ celeritate projectum, per datum punctum P transibit, loco x & y in æquatione ad trajectoriam scribantur datæ V C & V P, atque hinc eruatur valor tangentis b; dicatur V C $= p$, C P $= q$, & erit

$$q = bp - pp \times \frac{\sqrt{1+bb}}{af} - p^3 \times \frac{\overline{1+bb}^{\frac{3}{2}}}{12af}.$$

Si medii densitas infinitè parva esset, altitudo a foret infinita (130), & idcircò $q = bp - pp \times \frac{1+bb}{4f}$. Inveniatur per hanc æquationem valor tangentis b qui dicatur k, & in æquatione superiori loco $(1+bb)^{\frac{3}{2}}$, scribatur $(1+bb) \times \sqrt{1+kk}$ & illa in hanc abibit $q =$

$$bp - pp \times \frac{(1+bb)}{af} - p^3 \times \overline{1+bb} \times \frac{\sqrt{1+kk}}{12af},$$ 134.

quæ cum sit duarum dimensionum facilè suppeditabit valorem ipsius b, quamproximè.

135. *Coroll.* 8. Datâ celeritate jactûs, invenitur angulus maximæ omnium amplitudini conveniens, si in æquatione corollarii 5. in quâ x exponit quamlibet amplitudinem V B, sumatur tangens b variabilis & sumptis fluxionibus ponatur $dx = o$ (48). Calculo enim inito invenietur $4f \times (1 - 2bb)^2 = 3ab \times (1 - bb) \times \sqrt{1+bb}$. Quoniam verò tangens anguli projectionis est b, sinus totus 1, & proindè secans $\sqrt{1+bb}$; si ejusdem anguli sinus dicatur s, erit $\sqrt{1+bb} : b = 1 : s$, adeóque $1+bb : bb = 1 : ss$, & dividendo $1 : bb = 1 - ss : ss$, atquè ità $bb = \frac{ss}{1-ss}$, & $b = \frac{s}{\sqrt{1-ss}}$. Loco b substituatur $\frac{s}{\sqrt{1-ss}}$ in æquatione modo inventâ & illa in hanc mutabitur,

$$4f \times \frac{(1-3ss)^2}{(1-ss)^2} = 3as \times \frac{(1-2ss)}{(1-ss)^2},$$

hoc est, $4f \times (1-3ss)^2 = 3as \times (1-2ss)$. Ex quâ æquatione, si eruatur valor sinûs s dabitur angulus quæsitus. Per approximationem ità potest obtineri. Scribatur in æquatione $3as = 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; Nam si trajectoria in medio non resistente describeretur, angulus T V B foret semirectus, & proindè sinus ejus $\sqrt{\frac{1}{2}}$, cum sit sinus totus $= 1$; & ideò in medio valdè raro est ferè $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$; æquatio igitur erit $4f \times (1-3ss)^2 = (1-2ss) \times 3a\sqrt{\frac{1}{2}}$; quæ facillimè resolvetur ad instar æquationis duarum dimensionum. Hinc autem invenitur s paulò minor quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; adeòque angulus projectionis semirecto paulò minor.

136. *Coroll.* 9. Si medium esset paulò densius, assumenda foret æquatio ad tra-

trajectoriam, $y = bx - xx \times \frac{(1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bbb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - hx^4$; aut etiam alia plurium terminorum. In illâ autem ità determinatur valor coefficientis h. Pro coefficientibus datis $\frac{1+bb}{4f}$, $\frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, scribantur c, e, ut sit æquatio $y = bx - cx^2 - ex^3 - hx^4$, & sumptis ut suprà (131) fluxionibus primis, secundis & tertiis, factâ dx, constante, invenietur (129) $\frac{ad^3y}{ds\,ddy} = 1 = \frac{6ae + 24ahx}{(2c + 6ex + 12hx^2)} \times \frac{1}{\sqrt{1 + bb - 4bcx + 4ccx^2 - 6bex^2 \,\&c.}} = \frac{6ae + 24ahx}{2c + 6cx \times \sqrt{1+bb} - \frac{2bcx}{\sqrt{1+bb}}}$ neglectis terminis ubi x^2 occurrit & extracta Radice per formulam *Newtonianam*. Ut autem hæc quantitas constans sit & æqualis unitati, termini homologi in numeratore $6ae + 24ahx$, & denominatore $2c\sqrt{1+bb} + 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$ ponendi sunt æquales, id est, $6ae = 2c\sqrt{1+bb}$, & $24ahx = 6ex\sqrt{1+bb} - \frac{4bccx}{\sqrt{1+bb}}$. Ex his suppositionibus eruitur $e = \frac{c\sqrt{1+bb}}{3a} = \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$, & $h = e\frac{\sqrt{1+bb}}{4f} - \frac{bcc}{6a\sqrt{1+bb}} = \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} - \frac{b \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Quarè æquatio assumpta erit $y = bx - x^2 \times \frac{(1+bb)}{af} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af} - x^4 \times \frac{(1+bb)^2}{48a^2f} + x^4 b \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{96aff}$. Et eodem modo determinarentur coefficientes in æquationibus plurium terminorum seu ad parabolas superiorum generum.

137. *Coroll.* 10. Si resistentia medii uniformis, partim constans supponeretur & partim velocitatis quadrato proportionalis, posset etiam trajectoria V P B quamproximè definiri. Sit enim resistentiæ pars uniformis $= \frac{1}{2}kg$, & resistentia tota $r = \frac{kg}{2} + \frac{v^2}{2a}$, & erit (28) $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} + \frac{v^2 ds}{2a} = -v\,dv$ & (30) $v^2 = -\frac{g\,ds^2}{ddy}$ adeóque (127) $v\,dv = -g\,dy + \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, his valoribus loco v^2 & $v\,dv$, in priori æquatione substitutis fit $g\,dy + \frac{kg\,ds}{2} - \frac{g\,ds^3}{2a\,ddy} = g\,dy - \frac{g\,ds^2 d^3y}{2\,ddy^2}$, ideóque $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Jam si resistentia tota r, exigua fuerit, ponatur æquatio ad trajectoriam V P B, $y = bx - cx^2 - ex^3$, & factâ dx, constante, capiantur fluxiones primæ, secundæ & tertiæ quæ coincidente puncto C, cum V, erunt $dy = b\,dx$, $ddy = -2c\,dx^2$, & $d^3y = -6e\,dx^3$ (131); undè invenitur ut (in coroll. 4. 131.) b, tangens anguli projectionis, existente sinu toto 1, & $c = \frac{1+bb}{4f}$, ubi f est altitudo ex quâ corpus urgente vi constante g cadendo in spatio non resistente acquirit jactûs velocitatem. Quantitas e determinabitur per æquationem $k = \frac{ds^2}{a\,ddy} - \frac{ds\,d^3y}{ddy^2}$. Nam si in illâ loco ds, ddy, d^3y, substituantur ipsorum valores $dx \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}$, $-2c\,dx$, & $-6e\,dx^3$, erit $k = -\frac{(1+bb)}{2ac} + \frac{3e \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{2cc}$; undè eruitur $e = \frac{2kcc}{3 \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}} + \frac{c \times (1+bb)^{\frac{1}{2}}}{3a} = \frac{k \times (1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff} + \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$. Quapropter æquatio assumpta in hanc abit $y = bx - \frac{xx \times (1+bb)}{4f} - x^3 \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{12af}$,

— x^3k

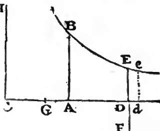
SECTIO III.

De motu corporum quibus resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ.

PROPOSITIO XI. THEOREMA VIII.

Si corpori resistitur partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione duplicatâ, & idem solâ vi insitâ in medio similari movetur: sumantur autem tempora in progressione arithmeticâ; quantitates velocitatibus reciprocè proportionales, datâ quâdam quantitate auctæ, erunt in progressione geometricâ.

Centro C, asymptotis rectangulis $CADd$ & CH, describatur hyperbola BEe, & asymptoto CH parallelæ sint AB, DE, de. In asymptoto CD dentur puncta A, G: Et si tempus exponatur per aream hyperbolicam $ABED$ uniformiter crescentem; dico quod velocitas exponi potest per longitudinem DF, cujus reciproca GD unà cum datâ CG componat longitudinem CD in progressione geometricâ crescentem.



Sit enim areola $DEed$ datum temporis incrementum quàm minimum, & (a) erit Dd reciprocè ut DE, ideoque directè ut CD. Ipsius autem $\frac{1}{GD}$ decrementum, quod (b) per hujus

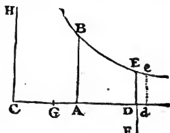
$- xik \times \frac{(1+bb)^{\frac{3}{2}}}{24ff}$, & quantitates a & k, ex phænomenis poterunt determinari ut suprà (131.).

(a) * *Et erit D d reciprocè ut D E.* Est enim areola evanescens D E e d æqualis rectangulo D E × D d, quod, ob datum temporis incrementum, erit ut quantitas data, & ideò D d, est ut quantitas data divisa per D E, id est, reciprocè ut D E; sed (*per theor. 4. de hyperb.*) datum est rectangulum C D × D E, proindè C D, est reciprocè ut D E; quarè erit D d directè ut C D. 137.

(b) * *Per hujus Lemma 2. Cas. 4.*

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XI. THEOR. VIII.

hujus lem. 11.) est $\frac{Dd}{GDq}$, erit ut $\frac{CD}{GDq}$ seu $\frac{CG+GD}{GDq}$, id est, ut $\frac{1}{GD}+\frac{CG}{GDq}$. Igitur tempore $ABED$ per additionem datarum particularum $EDde$ uniformiter crescente, decrescit $\frac{1}{GD}$ in eâdem ratione cum velocitate. Nam (c) decrementum velocitatis est ut resistentia, hoc est (per hypothesin) ut summa duarum quantitatum, quarum una est ut velocitas, altera ut quadratum velocitatis; & ipsius $\frac{1}{GD}$ decrementum est ut summa quantitatum $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GDq}$, quarum prior est ipsa $\frac{1}{GD}$, & posterior $\frac{CG}{GDq}$ est ut $\frac{1}{GDq}$: (d) proinde $\frac{1}{GD}$, ob analogum decrementum, est ut velocitas. Et si quantitas GD, ipsi $\frac{1}{GD}$ reciprocè proportionalis, quantitate datâ CG augeatur; summa CD, tempore $ABED$ uniformiter crescente, (e) crescet in progressione geometricâ. *Q.E.D.*



Corol. 1. Igitur si, datis punctis A, G, exponatur tempus per aream hyperbolicam $ABED$, exponi potest velocitas per ipsius GD (f) reciprocam $\frac{1}{GD}$.

Co-

(c) *Nam decrementum velocitatis*, dato temporis momento, *est ut resistentia* (15).

(d) * $\frac{1}{GD}$. *Ob analogum decrementum est ut velocitas.* Si enim duarum quantitatum fluentium incrementa vel decrementa dato tempusculo producta analoga sint, eorum incrementorum vel decrementorum summæ seu fluentes ipsæ ab eodem initio sumptæ, sunt analogæ (*per Cor. Lem.* 4. *lib.* 1.).

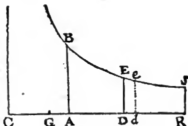
(e) * *Crescet in progressione geometricâ* (380. lib. 1.).

(f) * *Exponi potest velocitas per ipsius* GD

(f) *Corol.* 2. Sumendo autem GA ad GD ut velocitatis reciproca sub initio, ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis $ABED$, invenietur punctum G. Eo autem invento, velocitas ex dato quovis alio tempore inveniri potest.

PROPOSITIO XII. THEOREMA IX.

Iisdem positis, dico quòd si spatia descripta sumantur in progressione arithmeticâ, velocitates datâ quâdam quantitate auctæ erunt in progressione geometricâ.



In asymptoto CD detur punctum R, & erecto perpendiculo RS; quod occurrat hyperbolæ in S, exponatur descriptum spatium per aream hyperbolicam $RSED$; & velocitas erit ut longitudo GD, quæ cum datâ CG componit longitudinem CD in progressione geometricâ decrescentem, interea dum spatium $RSED$ augetur in arithmeticâ.

(h) Etenim ob datum spatii incrementum $EDde$, lineola Dd, quæ decrementum est ipsius GD, erit reciprocè ut ED, ideoque directè ut CD, hoc est, ut summa ejusdem GD & lon-

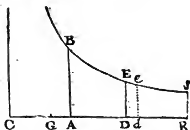
GD *reciprocam* $\frac{1}{GD}$. Undè patet velocitatem nonnisi tempore infinito extingui posse, * erit enim $\frac{1}{GD} = 0$, sive velocitas nulla ubi G D erit infinita, tunc autem area BADE quæ tempus exprimit infinita etiam est, ex naturâ Hyperbolæ.

(g) * *Coroll.* 2. Punctum A ad arbitrium assumitur in asymptoto C R & assumpto etiam quovis puncto D ut area A B E D tempus datum exponat, ità determinandum est punctum G, ut sit G A ad G D, ut velocitatis reciproca sub initio ad velocitatis reciprocam in fine temporis cujusvis A B E D, quod per coroll. 1. liquet. Invento autem puncto G, ex dato quovis alio tempore quod v. gr. sit ad tempus primò datum ut area A B S R, ad aream A B E D, dabitur velocitas quæ erit reciprocè ut G R, seu quæ erit ad velocitatem sub initio in A, ut G A ad G R datam.

(h) * *Etenim ob datum spatii incrementum*, per hypothesim quà spatia supponuntur in arithmeticâ progressione crescere,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XII. THEOR. IX.

longitudinis datæ *CG*. Sed velocitatis decrementum, tempore sibi reciprocè proportionali, quo data ſpatii particula *DdeE* deſcribitur, eſt (i) ut reſiſtentia & tempus conjunctim, id eſt directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una eſt ut velocitas, altera ut velocitatis quadratum, & inversè ut velocitas; ideoque directè ut ſumma duarum quantitatum, quarum una datur, altera eſt ut velocitas. Decrementum igitur tam velocitatis quam lineæ *GD*, eſt ut quantitas data & quantitas decreſcens conjunctim, & propter analoga decrementa, (k) analogæ ſemper erunt quantitates decreſcentes; nimirum velocitas & linea *GD*. *Q. E. D.*



Corol. 1. Si velocitas exponatur per longitudinem *GD*, ſpatium deſcriptum erit ut area hyperbolica *DESR*.

Corol. 2. Et ſi utcunque aſſumatur punctum *R*, invenietur punctum *G* capiendo *GR* ad *GD*, ut eſt velocitas ſub initio ad velocitatem poſt ſpatium quodvis *RSED* deſcriptum. (l) Invento autem puncto *G*, datur ſpatium ex datâ velocitate, & contra.

Corol. 3. Unde cùm (*per prop.* XI.) detur velocitas ex dato tempore, & per hanc propoſitionem detur ſpatium ex datâ velocitate; dabitur ſpatium ex dato tempore: & contra.

PRO-

(i) * *Eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim.* Velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia & tempus conjunctim (15), tempus verò eſt ut incrementum ſpatii directè & velocitas inversè, adeóque dato ſpatii incremento ut velocitas inversè. Quarè dato ſpatii incremento, velocitatis decrementum eſt ut reſiſtentia directè & velocitas inversè, id eſt, directè ut ſumma duarum quantitatum &c.

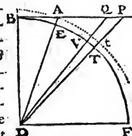
(k) * *Analogæ ſemper erunt* &c. (Per cor. lem. 4. lib. 1.).

(l) * *Invento autem puncto* G, *&c.* Si enim velocitas data, ſit ad velocitatem ſub initio ut G A ad G R, dabitur punctum A, & hinc dabitur area A B S R, ſeu ſpatium deſcriptum. Et contrà dato ſpatio, ſive datâ areâ A B S R, dabitur punctum A, & indè velocitas G A. Ex his autem patet ſpatium finitum infinito tempore deſcribi; ubi enim punctum D coincidit cum puncto G, velocitas omnis extinguitur, & ſpatium deſcriptum exponitur per aream finitam quam ordinata R S

PROPOSITIO XIII. THEOREMA X.

Posito quod corpus ab uniformi gravitate deorsum attractum rectâ ascendit vel descendit; & quod eidem resistitur partim in ratione velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ: dico quod, si circuli & hyperbolæ diametris parallelæ rectæ per conjugatarum diametrorum terminos ducantur, & velocitates sint ut segmenta quædam parallelarum à dato puncto ducta; tempora erunt ut arearum sectores, rectis à centro ad segmentorum terminos ductis abscissi: & contra.

Cas. 1. Ponamus primò quòd corpus ascendit, centroque D & semidiametro quovis $D B$ describatur circuli quadrans $B E T F$, & per semidiametri $D B$ terminum B agatur infinita $B A P$, semidiametro $D F$ parallela. In eâ detur punctum A, & capiatur segmentum $A P$ velocitati proportionale. Et cùm resistentiæ pars altera sit ut velocitas, & pars altera ut velocitatis quadratum; sit resistentia tota ut AP *quad.* $+ 2 BAP$. Jun-



RS abscindit cum alterâ ordinatâ per G ductâ; velocitas verò nonnisi infinito tempore potest evanescere (*per cor.* 1. *prop. XI.*).

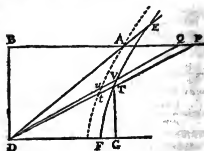
138. *Schol.* Eadem per analysim facilè inveniuntur. Dicantur resistentia r celeritas initialis c, spatium descriptum s, tempus t, velocitas residua v, ponaturque $r = \frac{av + vv}{b}$, erit (16, 17) $r\,ds = -v\,dv$, seu $av\,ds + vv\,ds = -bv\,dv$, & hinc $ds = -\frac{b\,dv}{a+v}$, atque adeò $s = Q - b \times L.\overline{a+v}$; quia verò ubi $s = 0$ fit $v = c$, invenitur constans $Q = b \times L.\overline{a+c}$, & ideò $s = b \times L.\frac{a+c}{a+v}$. Sit $L.\,h = 1$, & erit $\frac{s \times L.\,h}{b} = L.\frac{a+c}{a+v}$, ac $h^{\frac{s}{b}} = \frac{a+c}{a+v}$; undè eruitur $v = \frac{a+c}{h^{\frac{s}{b}}} - a$; Quarè dato spatio datur velocitas & contrà. Cùm autem sit 138.
(13) $dt = \frac{ds}{v} = -\frac{b\,dv}{av+vv} = \frac{b}{a} \times \frac{dv}{a+v} - \frac{b}{a} \times \frac{dv}{v}$, erit $t = Q + \frac{b}{a} \times L.\overline{a+v} - \frac{b}{a} \times L.v = Q + \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v}$, & posito $t = 0$ & $v = c$, fit $Q = -\frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, adeóque $t = \frac{b}{a} \times L.\frac{a+v}{v} - \frac{b}{a} \times L.\frac{a+c}{c}$, & hinc $t = \frac{b}{a} L.\frac{ac+cv}{av+cv}$, & $h^{\frac{at}{b}} = \frac{ac+cv}{av+cv}$; unde eruitur $v = \frac{ac}{a h^{\frac{at}{b}} + c h^{\frac{at}{b}} - c}$. Dato igitur tempore dabitur velocitas & spatium ac contrà.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. III. PROP. XIII. THEOR. X.

Jungantur DA, DP circulum secantes in E ac T, & ([m]) exponatur gravitas per DA *quad.* ita ut sit gravitas ad resistentiam in P ut DAq ad $APq + 2BAP$: & tempus ascensus totius erit ut circuli sector EDT.

Agatur enim DVQ, abscindens & velocitatis AP momentum PQ, & sectoris DET momentum DTV dato temporis momento respondens; & velocitatis decrementum illud PQ erit ut ([n]) summa virium gravitatis DAq & resistentiæ $APq + 2BAP$, id est (*per prop. 12. lib. 2. elem.*) ut DP *quad.* Proinde area DPQ, ([o]) ipsi PQ proportionalis, est ut DP *quad.* & area DTV, quæ est ad aream DPQ ut ([p]) DTq ad DPq, est ut datum DTq. Decrescit igitur area EDT uniformiter ad modum temporis futuri, per subductionem datarum particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est. *Q. E. D.*

Cas. 2. Si velocitas in ascensu corporis exponatur per longitudinem AP ut prius, & resistentia ponatur esse ut $APq + 2BAP$, & si vis gravitatis minor sit quam quæ per DAq exponi possit; capiatur BD ejus longitudinis, ut sit $ABq - BDq$ gravitati proportionale, sitque DF ipsi DB perpendicularis & æqualis, & per verticem F describatur hyperbola $FTVE$, cujus semidiametri conjugatæ sint DB & DF, quæque secet DA in E, & DP, DQ in T & V; & erit tempus ascensus totius ut hyperbolæ sector TDE.



Nam

(m) * *Et exponatur gravitas per D A q.* Corpore ascendente ratio gravitatis uniformis ad resistentiam vel major est ratione quadrati dati A B² ad quantitatem A P² + 2 BAP, vel minor vel æqualis. In 1°. casu gravitas exponi semper poterit per quadratum secantis AD quæ quantumvis magna assumi potest; In 2°. casu per differentiam A B² — BD² quæ quantumvis parva esse potest; & in 3°. casu per quadratum A B².

(n) * *Ut summa virium* (18).

(o) * *Ipsi P Q proportionalis.* Nam area D P Q est ½ B D × P Q, & ideò ob datam ½ B D est ut P Q.

(p) * *Ut D T q ad D P q.* Triangulum

Nam velocitatis decrementum PQ, in datâ temporis particulâ factum, eſt ut ſumma reſiſtentiæ $APq + 2BAP$ & gravitatis $ABq - BDq$, (q) id eſt, ut $BPq - BDq$. Eſt autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq; ideoque, ſi ad DF demittatur perpendiculum GT, ut GTq ſeu $GDq - DFq$ ad BDq, utque GDq ad BPq, & diviſim ut DFq ad $BPq - BDq$. Quare cùm area DPq ſit ut PQ, id eſt, ut $BPq - BDq$; erit area DTV ut datum DFQ. Decreſcit igitur area EDT uniformiter ſingulis temporis particulis æqualibus, per ſubductionem particularum totidem datarum DTV, & propterea tempori proportionalis eſt. $Q.\ E.\ D.$

Caſ. 3. Sit AP velocitas in deſcenſu corporis, & $APq + 2BAP$ reſiſtentia, & $BDq - ABq$ vis gravitatis, exiſtente angulo DBA recto. Et ſi centro D, vertice principali B, deſcribatur hyperbola rectangula $BETV$ ſecans productas DA, DP & DQ in E, T & V; erit hyperbolæ hujus ſector DET ut tempus totum deſcenſûs.

Nam velocitatis incrementum PQ, eique proportionalis area DPQ, eſt ut exceſſus gravitatis ſupra reſiſtentiam, id eſt, ut $BDq - ABq - 2BAP - APq$ ſeu $BDq - BPq$. Et area DTV eſt ad aream DPQ ut DTq ad DPq, ideoque ut (r) GTq ſeu $GDq - BDq$ ad BPq, utque GDq ad BDq, & diviſim ut BDq ad $BDq - BPq$. Quare cùm area DPQ ſit ut $BDq - BPq$, erit area DTV ut datum BDq. Creſcit igitur area EDT

lum evaneſcens DPQ, non differt a ſectore circuli centro D & radio DQ deſcripti, inter lineas DQ & DP; hic verò ſector eſt ad ſimilem ſectorem DTV, ut DP^2 ad DT^2, quarè area DTV, eſt ad aream DPQ, ut DT^2 ad DP^2, & permutando, area DTV eſt ad DT^2, ut area DPQ ad DP^2. Cùm igitur (*ex dem.*) area DPQ ſit ut DP^2, erit etiam area DTV ut DT^2, ſeu ut datum quadratum DB^2; ergo, tempore dato, data eſt area DTV, & ideò temporibus æqualibus *æqualiter decreſcit area EDT, ad modum temporis futuri &c.* 138.

(q) * *Id eſt ut BPq — BDb.* Eſt enim $APq + 2BAP + ABq = BPq$.

(r) *Ut GTq.* Nam ob ſimilitudinem triangulorum DGT, PBD eſt DTq ad DPq ut $GTq = GDq - BDq$ (ex conic. vid. not. in caſ. 2. prop. 9.) ad BDq, *utque GDq ad BDq, & diviſim &c.*

E D T uniformiter singulis temporis particulis æqualibus, per additionem totidem datarum particularum *D T V*, & propterea tempori descensus proportionalis est. *Q. E. D.*

PROP. XIII. THEOR. X.

Corol. Si centro *D* semidiametro *D A* per verticem *A* ducatur arcus *A t* similis arcui *E T*, & similiter subtendens angulum *A D T*: velocitas *A P* erit ad velocitatem, quam corpus tempore *E D T*, in spatio non resistente, ascendendo amittere vel descendendo acquirere posset, ut area trianguli *D A P* ad aream sectoris *D A t*; ideoque ex dato tempore datur. (ſ) Nam velocitas, in medio non resistente, tempori, atque ideo sectori huic proportionalis est; in medio resistente est ut triangulum; & in medio utroque, ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis, pro more sectoris & trianguli.

Scho-

(ſ) * *Nam velocitas in medio non resistente* (25. lib. 1.) *tempori* atque adeò sectori E D T, & proindè *sectori D A t*, *proportionalis est*; in medio resistente est ut A P, seu ob datam B D ut $\frac{1}{2}$ B D × A P; sivè ut triangulum A D P; & in medio utroque ubi quàm minima est, nempe initio descensûs è quiete vel in fine ascensûs accedit ad rationem æqualitatis ob resistentiam evanescentem, evanescente velocitate, pro more, sectoris D A t & trianguli D A P coeuntibus punctis t & P cum puncto A.

139. Quoniam ubi in corporis descensu B P fit = B D, angulus B D P semirectus evadit, & recta D P asymptotus hyperbolæ æquilateræ B E T; manifestum est quod corpus è quiete cadendo nonnisi finitam velocitatem infinito tempore possit acquirere. Erit enim velocitas tempore infinito acquisita B D — A B. Si verò corpus verticaliter deorsùm datâ cum velocitate projiciatur, vel illa velocitas maximæ seu terminali B D — A B æqualis est, & in hoc casu corpus motu uniformi descendit ob resistentiam gravitati æqualem; vel terminali minor est, & corporis cadentis motus perpetuò acceleratur, donec infinito tempore velocitatem maximam acquirat; vel tandem terminali major est, tumque corporis motus perpetuò retardatur, donec infinito tempore elapso ad velocitatem terminalem reducatur; hoc autem casu sic absolvitur constructio.

Sit A a velocitas datæ projectionis terminali major, A P velocitas perpetuò decrescens, A P² + 2 B A P resistentia, & B D² A B² vis gravitatis; existente angulo D B A recto; & si capiatur B R = BD, compleaturque quadratum D B R F, ac centro D & vertice principali F describatur hyperbola rectangula F E T V, secans rectas D a, D P & D Q, in E, T, V; tempus descensûs ab initio usquequò residua corpori velocitas sit A P, erit ut sector hyperbolicus D E T; nam velocitatis decrementum P Q, in datâ temporis particulâ factum eique proportionalis area

D P Q

Scholium.

Demonstrari (†) etiam posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis minor est quàm quæ exponi possit per DAq seu $ABq + BDq$, & major quàm quæ exponi possit per $ABq - BDq$, & exponi debet per ABq. Sed propero ad alia.

DPQ est ut excessus resistentiæ suprà gravitatem (18), id est, ut $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, seu $BP^2 - BD^2$; & area DTV est ad aream DPQ, ut DT^2 ad Dp^2, ideoque ut GT^2, (seu $GD^2 - BD^2$) ad BD^2, & ut GD^2 ad BP^2, & divisim, ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$. Quarè cum area DPQ, sit ut $BP^2 - BD^2$, erit area DTV ut datum BD^2. Crescit igitur area EDT, uniformiter singulis temporis particulis æqualibus per additionem totidem datarum particularum DTV, & propterea tempori descensûs proportionalis est. Coincidente verò puncto P, cum R, & ideò rectâ DP, cum asymptoto DR, velocitas AP terminali AR seu $BD - AB$ æqualis evadit, & sector DET infinitus, proindeque tempus etiam infinitum fit. Q. E. D.

140. Hinc etiam si centro D, semidiametro Da, per verticem a, ducatur arcus Hyperbolicus at similis arcui ET, & similiter subtendens angulum aDT; velocitas aP, in medio resistente tempore EDT, extincta, erit ad velocitatem quam corpus eodem tempore in spatio non resistente è quiete descendendo acquirere posset, ut area trianguli DaP, ad aream sectoris Dat, ideòque ex dato tempore datur, & hinc datur quoque velocitas residua AP. Nam velocitas in medio non resistente acquisita tempori, atquè ideò sectori DET, & proindè sectori simili Dat proportionalis est; velocitas in medio resistente extincta, est ut triangulum DaP, & in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis pro more sectoris Dat, & trianguli DaP. 140.

(†) 141. *Demonstrari posset casus in ascensu corporis, ubi vis gravitatis..... exponi debet per A B q.* * Velocitas in ascensu exponatur per AP ut prius, sit resistentia

ut $APq + 2BAP$, exponatur vis gravitatis per ABq capiatur BD & $DF = BA$ erectoque perpendiculo FTA erit tempus ascensus totius ut sector sive Triangulum DTA, agatur enim DVQ abscindens & velocitatis momentum PQ & sectoris DTA momentum DTV, velocitatis decrementum PQ est ut summa resistentiæ & gravitatis sive ut $APq + 2BAP + ABq$ id est (per 4. 2[1]. Elem.) ut BPq; est autem area DTV ad aream DPQ ut DTq ad DPq, sive ob Triangula similia DTF, DPB, ut DFq ad BPq, est ergo area DTV ut datum DFq. *Decrescit igitur area DTA ad modum temporis futuri per subductionem particularum DTV, & propterea tempori ascensus totius proportionalis est.* *

Si itaque resistentia ponatur esse ut $AP^2 + 2BAP$, vis autem gravitatis ut AB^2; tempus ascensus totius erit ut AT & etiam ut $\frac{AP}{BP}$. Nam triangulum DTA, ob altitudinem constantem DF, est ut basis AT & propter Triangula similia DTF, ATP est $DF : TF = AP : AT$; & jungendo terminos secundæ rationis cum terminis primæ est $DF + AP$ (sive BP) : $TF + AT$ (sive BD) $= AP : AT$, est ergo $AT = \frac{AP \times BC}{BP}$ sive ob datum BD, AT est ut $\frac{AP}{BP}$.

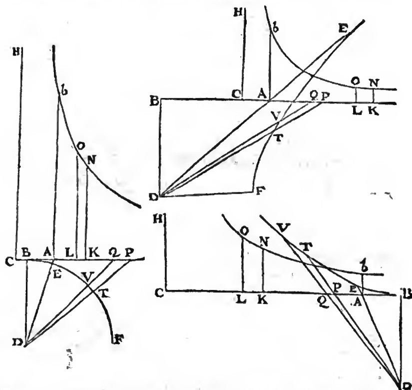
142. In isto casu velocitas AP est ad velocitatem quam corpus tempore DAT sive $\frac{AP}{BP}$, in spatio non resistente ascendendo amittere posset, ut BP ad AB. Nam velocitas in medio non resistente tempori atque ideò areæ DAT sive rectæ AT proproportionalis est; in medio resistente est ut AP, & in medio utroque ubi quàm minima est, accedit ad rationem æqualitatis; nam cum capiatur $BD = AB$, ratio linearum AP, AT, in puncto A ubi quàm minima est, accedit ad rationem linearum AF, FD quæ est æqualitatis. Quare velocitas AP, in medio resistente erit ad velocitatem in medio non resistente eodem tempore DAT amissam vel acquisitam ut AP ad AT; hoc est ob Triangula similia APT, BPD ut BP ad BD vel AB. Q. E. D.

143. Ex formulis quas (19) dedimus facilè intelligitur quomodo ad hoc Theorema X. deveniatur. Nam si dicatur gravitas g, velocitas v, resistentia $2av + vv$, & tempus t; corpore ascendente erit (16. 17) $g\,dt + 2av\,dt + vv\,dt = -dv$, & ideò $dt = \frac{-dv}{vv + 2av + g}$. Ponatur $v + a = x$, & ideò $dv = dx$, & $vv + 2av = xx - aa$, fiet $dt = \frac{-dx}{xx + g - aa}$. Undè si fuerit $g = aa$, erit $dt = \frac{-dx}{xx}$; si $g - aa = bb$, erit $dt = \frac{-dx}{xx + bb}$. Si $g - aa = -bb$ erit $dt = \frac{-dx}{xx - bb}$. Fluens quantitatis $-\frac{dx}{xx}$, est $\frac{1}{x}$, fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx + bb}$, pendet a quadraturâ sectoris circularis (107), fluens quantitatis $\frac{-dx}{xx - bb}$, à quadraturâ sectoris hyperbolici; atquè hi sunt tres casus pro corporis ascensu; pro descensu verò est (19) $g\,dt - 2av\,dt - vv\,dt = dv$, & ideò $dt = \frac{dv}{g - 2av - vv} = \frac{dx}{g + aa - xx} = \frac{dx}{bb - xx}$, ponendo $v + a = x$ & $g + aa = bb$, fluens autem quantitatis $\frac{dx}{bb - xx}$, pendet a quadraturâ hyperbolæ.

PROPOSITIO XIV. THEOREMA XI.

Iisdem positis, dico quod spatium ascensu vel descensu descriptum, est ut differentia areæ per quam tempus exponitur, & areæ cujusdam alterius quæ augetur vel diminuitur in progressione arithmeticâ; si vires ex resistentiâ & gravitate compositæ sumantur in progressione geometricâ.

Capiatur AC in (fig. tribus ultimis) gravitati, & AK resistentiæ proportionalis. Capiantur autem ad easdem partes pun-



cti A si corpus descendit, aliter ad contrarias. Erigatur Ab, quæ sit ad DB ut DBq ad $4\,BAC$: & descriptâ ad asymp-

 totos

totos rectangulas CK, CH hyperbolâ bN, erectaque KN ad CK perpendiculari, (t) area $AbNK$ augebitur vel diminuetur in progressione arithmeticâ, (u) dum vires CK in progressione geometricâ sumuntur. (x) Dico igitur quòd distantia corporis ab ejus altitudine maximâ sit ut excessus areæ $AbNK$ supra aream DET.

Nam cùm AK sit ut resistentia, id est, ut $APq + 2BAP$; assumatur data quævis quantitas Z, & ponatur AK æqualis $\frac{APq + 2BAP}{Z}$; & (*per hujus lemma* 11.) erit ipsius AK momentum KL æquale $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ seu $\frac{2BPQ}{Z}$, & areæ $AbNK$ momentum $KLON$ æquale $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ (z) seu $\frac{BPQ \times BD\ cub.}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas. 1. Jam si corpus ascendit, (a) sitque gravitas ut $ABq + BDq$ existente BET circulo (in figurâ primâ) linea (b) AC, quæ gravitati proportionalis est, erit $\frac{ABq + BDq}{Z}$, & (c) DPq seu $APq + 2BAP + ABq + BDq$ erit $AK \times Z +$

(t) * *Area AbNK augebitur vel &c.* (380. Lib. 1.).

(u) * *Dum vires CK &c.* Sunt enim vires acceleratrices vel retardatrices ut CK, siquidem in corporis ascensu vis retardatrix est $AC + AK$, seu summa virium gravitatis & resistentiæ, & in descensu vis acceleratrix est $AC - AK = CK$ seu excessus vis gravitatis supra resistentiam (18).

(x) * *Dico igitur quod distantia corporis ascendentis ab ejus altitudine maximâ* & distantia descendentis à puncto quietis & quo decidit *sit ut excessus* &c.

(z) * *Seu &c.* Nam (*per theor.* 4. *de hyp.*) est $LO : Ab = CA : CK$, & per constr.) $Ab : DB = DB^2 : 4BA \times AC$, ideoque (ex æquo) $LO : DB = DB^2 : 4BA \times CK$, & hinc $LO = \frac{DB^3}{4CK \times BA}$. Quarè momentum $KLON = LO \times KL = \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$.

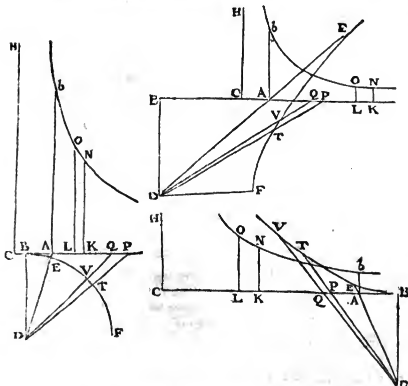
(a) * *Sitque gravitas &c.* In cas. 1°. prop. 13. gravitas erat ut $DA^2 = AB^2 + BD^2$.

(b) * *Linea AC &c.* Est enim in cas. 1°. prop. 12. gravitas ad resistentiam ut $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$, & (per hyp.) ut AC ad AK, seu $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$. Quarè erit $AB^2 + BD^2$ ad $AP^2 + 2BAP$ ut AC ad $\frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & hinc habetur $AC = \frac{AB^2 + BD^2}{Z}$, & $AC \times Z = AB^2 + BD^2$.

(c) * *Et DPq &c.* Ob angulum DBP rectum, & quia $AK \times Z = AP^2 + 2BAP$, atque $AC \times Z = AB^2 + BD^2$, ut ex superioribus patet.

$AC \times Z$ seu $CK \times Z$; (d) ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DTq vel DBq ad $CK \times Z$.

Cas. 2. Sic corpus ascendit, & gravitas sit ut $ABq - BDq$,



(e) linea AC (in figurâ secundâ) erit $\frac{ABq - BDq}{Z}$, & (f) DTq erit ad DPq ut DFq seu DBq ad $BPq - BDq$ seu $APq + 2\ BAP + ABq - BDq$, id est, ad $AK \times Z +$ $AC \times$

(d) * *Ideòque area* DTV *&c.* Nam (ex dem.) in 1°. casu prop. 13.) area DTV est ad aream DPQ, ut DT^2 vel DB^2 ad DP^2, & est $DP^2 = CK \times Z$.

(e) * *Linea* AC *&c.* Patet ut in primo casu hujus.

(f) *Et* DTq *erit ad* DPq. Patet (ex dem. in cas. 2°. prop. 13.)

143.

$AC \times Z$ ſeu $CK \times Z$. (g) Ideoque area DTV erit ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$.

Caſ. 3. Et eodem argumento, ſi corpus deſcendit, & propterea gravitas ſit ut $BDq - ABq$, & linea AC (in figurâ tertiâ) æquetur $\frac{BDq - ABq}{Z}$ (h) erit area DTV ad aream DPQ ut DBq ad $CK \times Z$: ut ſupra.

Cum igitur areæ illæ ſemper ſint in hâc ratione; ſi pro areâ DTV, quâ momentum temporis ſibimet ipſi ſemper æquale exponitur, ſcribatur determinatum quodvis rectangulum, putà $BD \times m$, erit area DPQ, id eſt, $\frac{1}{2} BD \times PQ$, ad $BD \times m$ ut $CK \times Z$ ad BDq. Atque inde fit $PQ \times BD$ *cub.* æquale $2 BD \times m \times CK \times Z$, & areæ $AbNK$ (i) momentum $KLON$ ſuperius inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. Auferatur areæ DET momentum DTV ſeu $BD \times m$, & reſtabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Eſt igitur differentia momentorum, id eſt, momentum differentiæ arearum, æqualis $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$; & propterea ob datum $\frac{BD \times m}{AB}$ ut velocitas AP, id (k) eſt, ut momentum ſpatii quod corpus aſcendendo vel deſcendendo deſcribit. Ideoque differentia arearum & ſpatium illud proportionalibus momentis creſcentia vel decreſcentia & ſimul incipientia vel ſimul evaneſcentia, (l) ſunt proportionalia. *Q. E. D.*

Co-

(g) * *Ideoque area DTV &c.* Nam (ex dem. in 2°. caſ. prop. 13.) area DTV, eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

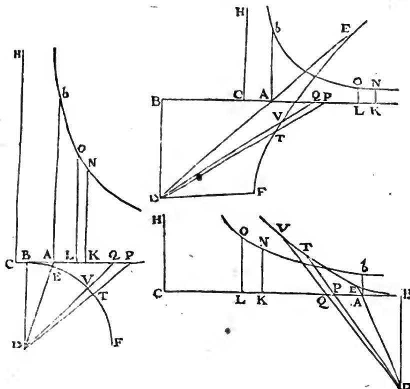
(h) * *Erit area DTV.* (Ex demonſtratis in 3°. caſ. prop. 13.) area DTV eſt ad aream DPQ, ut BD^2 ad $BD^2 - BP^2 = BD^2 - AB^2 - 2BAP - AP^2 = AC \times Z - AK \times Z = CK \times Z$.

(i) * *Momentum KLON ſuperius inventum* eſt $\frac{BPQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB} = \frac{BP \times PQ \times BD^3}{2Z \times CK \times AB}$. Quarè cum ſit $PQ \times BD^3 = 2BD \times m \times CK \times Z$, erit $KLON = \frac{BP \times BD \times m}{AB}$.

(k) * *Id eſt ut momentum ſpatii.* Nam dato temporis momento, momentum ſpatii eſt ut velocitàs (11.).

(l) * *Sunt proportionalia.* (Per coroll. Lem. 4. Lib. 1.) Dum autem evaneſcit AP, ſeu velocitas, evaneſcit quoque reſiſtentia AK, cum areâ $AbNK$, & tempore DTE.

Corol. Si longitudo, quæ oritur applicando aream DET ad lineam BD, dicatur M; & longitudo alia V sumatur in eâ ratione ad longitudinem M, quam habet linea DA ad lineam DE: spatium, quod corpus ascensu vel descensu toto in medio resistente describit, erit ad spatium, quod corpus in medio



non resistente è quiete cadendo eodem tempore describere potest, ut arearum prædictarum differentia ad $\frac{BD \times V^2}{AB}$: ideoque ex dato tempore datur. Nam spatium in medio non resisten-

stente est in duplicatâ ratione temporis, sive (m) ut V^2; & ob datas BD & AB ut $\frac{AD \times V^2}{AB}$. (n) Hæc area æqualis est areæ $\frac{DAq \times BD \times M^2}{DEq \times AB}$, & (o) ipsius M momentum est m; & propterea hujus areæ momentum est $\frac{DAq \times BD \times 2M \times m}{DEq \times AB}$. Hoc autem momentum est ad momentum differentiæ arearum prædictarum DET & $AbNK$, viz. ad $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$, ut $\frac{DAq \times BD \times M}{DEq}$ ad $\frac{1}{2} BD \times AP$, sive (p) ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET ad DAP, ideoque, ubi areæ DET & DAP quam minimæ sunt, (q) in ratione æqualitatis. Area igitur $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & differentia arearum DET & $AbNK$, quando omnes hæ areæ quam minimæ sunt, æqualia habent momenta; (r) ideoque sunt æquales. Unde cum velocitates, & propterea etiam spatia in medio utroque in principio descensûs vel fine ascensûs simul de-

(m) * *Sivè ut V^2.* Nam ob datas BD, DA, DE, longitudo quæ æquatur $DET \times \frac{DA}{BD \times DE}$ (per hyp.) est ut area DET, seu ut tempus. Spatium autem in medio non resistente est in duplicatâ ratione temporis (27. Lib. 1.) ideoque ut V^2.

(n) * *Hæc area.* Quoniam (per hyp.) $V : M = DA : DE$, erit $V = \frac{DA \times M}{DE}$ & $V^2 = \frac{DA^2 \times M^2}{DE^2}$, adeoque $\frac{BD \times V^2}{AB} = \frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$.

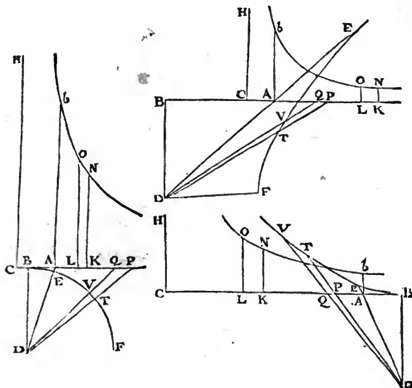
(o) * *Et ipsius M momentum est m.* Cùm enim sit (per hyp.) $M = \frac{DET}{BD}$, momentum ipsius M, erit $\frac{DTV}{BD}$, sed superiùs supponebatur $DTV = BD \times m$; Quarè momentum ipsius M, est m; Et ideò momentum quadrati M^2 est $2M \times m$ (per cas. 3. Lem. hujus) & *propterea* ob datas DA, BD, DE & AB, *hujus areæ momentum* &c.

(p) * *Sivè ut $\frac{DAq}{DEq}$ in DET &c.* Ob $M = \frac{DET}{BD}$, ideoque $M \times BD = DET$, & $\frac{1}{2} BD \times AP = DAP$.

(q) * *In ratione æqualitatis.* Ubi enim areæ DET & DAP quam minimæ sunt, fit $DET : DAP = DE^2 : DA^2$, ideóque $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET = DAP$.

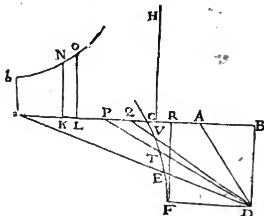
(r) *Ideóque sunt æquales.* Quandò sunt quam minimæ.

descripta accedant (f) ad æqualitatem; ideoque tunc sint ad invicem ut area $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia; & præterea cùm spatium in medio non resistente sit perpetuò ut $\frac{BD \times V^2}{AB}$, & spatium in medio resistente sit perpetuò ut arearum DET & $AbNK$ differentia: necesse est, ut spa-



(f) *Accedant ad æqualitatem.* Ob resistentiam cum velocitate nascentem vel evanescentem, manente gravitate. [n.] 144. Constructione casûs 3[i]. propositio-

spatia in medio utroque, in æqualibus quibuscunque temporibus descripta, sint ad invicem ut area illa $\frac{CD \times V^2}{AB}$, & arearum DET & $AbNK$ differentia. *Q. E. D.*



tionis hujus 14ᵉ. uti possumus ad determinandum motum corporis verticaliter deorsum projecti cum velocitate quæ terminali minor est. Nam si æqualis ipsi fuerit, motus est æquabilis; si verò celeritas projectionis terminali major sit, paulò mutanda erit casûs tertii constructio. Iisdem enim positis in not. 139. capiatur A C gravitati & A K resistentiæ proportionalis, ità ut sit C inter A & K, quod resistentia gravitate major supponatur. Sit A a velocitas projectionis terminali major; erigatur perpendicularis a b, quæ sit ad D B, ut DB^2, ad $4\,AB \times Ca$, & descriptâ ad asymptotos rectangulas C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K, perpendiculari, area a b N K augebitur in progressione arithmeticâ, dum vires C K in progressione geometrica minuuntur. Spatium autem tempore D E T descriptum erit ut excessus areæ a b N K, suprà aream D E T; nam ponatur, (*ut in demonstratione prop. 14.*) $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$, & ideò $KL = \frac{2BPQ}{Z}$ atque areæ ab N K momentum K L O N, $= \frac{2BPQ \times LO}{Z} = \frac{BPQ \times DB^2}{2Z \times AB \times CK}$. Cùm gravitas sit ut $BD^2 - AB^2$, erit $AC = \frac{BD^2 - AB^2}{Z}$, & area D T V ad aream D P Q ut BD^2 ad $BP^2 - BD^2$ (136) sive $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, sive $AK \times Z - AC \times Z$, vel $CK \times Z$. Si itaque pro areâ constante D T V, scribatur $BD \times m$, erit area D P Q, id est, $\frac{1}{2} BD \times PQ$ ad $BD \times m$, ut $CK \times Z$ ad BD^2, atquè indè fit $PQ \times BD^2 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & areæ a b N K momentum K L O N superiùs inventum fit $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$ auferatur area D E T momentum D T V seu $BD \times m$ & restabit $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. Est igitur differentia momentorum, id est, momentum differentiæ arearum ut velocitas A P, id est,

eſt, ut momentum ſpatii quod corpus deſcribit, ideòque differentia arearum ut ſpatium deſcriptum.

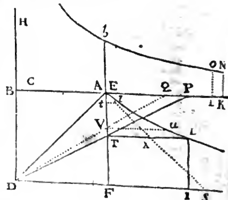
145. Hinc ſpatium tempore D E T, velocitate uniformi A a deſcriptum eſt ad ſpatium eodem tempore deſcriptum in medio reſiſtente ut factum A a × D E T ad arearum a b N K & D E T differentiam in A B ductam. Nam ſpatium tempore D E T, velocitate uniformi A a deſcriptum, eſt ut A a × D E T (5. lib. 1.) & ſpatii hujus momentum eſt ut A a × D T V; momentum autem ſpatii in medio reſiſtente deſcripti eſt ut A P × D T V, ſeu ut velocitas in momentum temporis ducta (12) & quia evaneſcente D E T, fit A P = A a, hæc momenta A a × D T V, A P × D T V, initio temporis æqualia ſunt, ſicut & ſpatia initio deſcripta. Sed A P × D T V = A P × B D × *m* & momentum differentiæ arearum a b N K & D E T; eſt $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ (144). Ergo A P × D T V æquale eſt momento differentiæ arearum a b N K & D E T per 145.
A B ducto, unde manifeſtum eſt propoſitum.

146. Si corporis aſcendentis velocitas exponatur per longitudinem A P, & reſiſtentia per A K quæ ponatur eſſe ut $AP^2 + 2BAP$, ita ut aſſumptâ datâ quâvis quantitate Z, ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$; vis autem gravitatis exponatur per A C, quæ ſit ſemper ut AB^2, ita ut ſit $AC = \frac{AB^2}{Z}$ eademque conſtructio fiat quæ (not. 141.) * & in A erigatur perpendiculum $Ab = \frac{AB^2}{4CA}$. Denique erecto perpendiculo in C deſcribatur ad Aſymptotos Rectangulos C K, C H hyperbolâ b N, erectâque K N ad C K perpendiculari, area A b N K diminuetur in progreſſione Arithmeticâ dum vires C K in progreſſione Geometricâ decreſcente ſumuntur. Et diſtantia corporis ab ejus altitudine maximâ erit ut exceſſus areæ A b N K ſupra Triangulum D E T.

Cùm enim ſit $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ erit ipſius A K momentum K L (*per lib. 2. Lem. II.*) $= \frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z} = \frac{2BPQ}{Z}$ & areæ A b N K momentum $KLON = \frac{2BPQ \times LO}{Z}$, & quia, per naturam hyp. eſt $CK : CA = Ab$ (ſive $\frac{AB^2}{4CA}$): L O, eſt $LO = \frac{AD^2}{4CK}$, ideoque K L O N =

$\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$. Est verò area DTV ad aream DPQ ut DT^2 ad DP^2, sive etiam ob Triangula similia TDF, BDP, ut DF^2 sive AB^2 ad BP^2, seu $AP^2 + 2BAP + AB^2$ (*per* 4. 2. *El.*) hoc est (quia ex hypothesi est, $AP + 2BAP = AK \times Z$, & $AB^2 = CA \times Z$) ad $CK \times Z$. Hinc si pro area DPQ scribatur ejus valor $\frac{1}{2} BD \times PQ = \frac{1}{2} AB \times PQ$, erit area $DTV = \frac{AB \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, quæ valorem constantem exprimere debet, quia momentum temporis sibi semper æquale exponit, ejus itaque loco scribatur Rectangulum $AB \times m$ in quo m erit momentum constans, est $m = \frac{AB^2 \times PQ}{2Z \times CK}$, erit ergo areæ AbNK momentum superius inventum $\frac{BP \times AB^2 \times PQ}{2Z \times CK} = BP \times m$, igitur differentia momentorum KLON & DTV, est $BP \times m - AB \times m = AP \times m$ & propterea ob datum m ut velocitas AP, id est, ut momentum spatii quod corpus ascendendo describit, & quo minuitur corporis distantia ab ejus altitudine maxima. Ideoque differentia arearum & spatium illud proportionalibus momentis decrescentia, simulque evanescentia sunt proportionalia.

Verùm in isto casu facilius quam per methodum *Newtonianam* obtinetur spatium a corpore ascendente usque ad quietem in medio resistente descriptum, & ejus relatio ad spatium in medio non resistente eodem tempore percurrendum: Etenim per punctum A asymptotis DB, DF describatur hyperbola, & ex puncto T ducatur perpendiculum TL ad Hyperbolam usque, Trilineum ATL erit ut spatium quæsitum. Ducatur Ll ad asymptotum perpendicularis, erit $Fl = TL$ & $TF = Ll$, sed ex natura Hyperbolæ est $DF : Dl = Ll$ (sive TF) : AF, & dividendo $DF : Fl$ (sive TL) $= TF : AT$, hoc est alternando $DF : TF = TL : AT$ (sed per 14 t) est $DF : TF = AP : AT$, ergo est $AP = TL$, itaque ducta ex V parallela Vu, erit VTLu, momentum areæ ATL $= VT \times TL$, est autem VT momentum temporis, & $TL = AP$ ipsa velocitas eo momento, ergo $VT \times T$ est ut momentum spatii eo momento descripti, ergo tota area ATL est ut spatium descriptum.



Ducatur præterea tangens AS & designet At ultimum temporis momentum, & ducta tl, Trilineum evanescens ATL æquale fiet Triangulo Atl, & eo ultimo momento spatia tam in medio resistente quam in non resistente descripta erunt æqualia, ideoque per idem triangulum Atl exprimentur; spatia verò in medio non resistente descripta sunt ut Quadrata temporum, ideoque spatium tempore At in medio non resistente descriptum erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum deut $\overline{At}^2$ ad $\overline{AT}^2$, sive ut area trianguli Atl ad aream ATX; spatium verò in medio resistente descriptum tempore At erit ad spatium tempore AT in eodem medio descriptum ut Atl ad trilineum ATL, unde liquet quod spatium in medio non resistente descriptum, ascendendo ad quietem usque, erit ad spatium in medio resistente descriptum, ut ATX ad ATL, existente velocitate, in medio non resistente, ut TX, & in medio resistente, ut TL.

Scholium.

(t) Resistentia corporum sphæricorum in fluidis oritur partim ex tenacitate, partim ex frictione, & partim ex densitate medii. Et resistentiæ partem illam, quæ oritur ex densitate fluidi, diximus esse in duplicata ratione velocitatis; pars altera, quæ oritur ex tenacitate fluidi, est uniformis, sive ut momentum temporis: ideoque jam pergere liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim vi uniformi seu in ratione momentorum temporis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Sed sufficit aditum patefecisse ad hanc speculationem in propositionibus VIII. & IX. quæ præcedunt, & eorum corollariis. In (u) iisdem utique pro corporis ascendentis resistentiâ uniformi, quæ ex ejus gravitate oritur, substitui potest resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii, quando corpus solâ vi insitâ movetur; & corpore rectâ ascendente addere licet hanc uniformem resistentiam vi gravitatis; eandemque subducere, quando corpus rectà descendit. Pergere etiam liceret ad motum corporum, quibus resistitur partim uniformiter, partim in ratione velocitatis, & partim in ratione duplicatâ velocitatis. Et viam aperui in propositionibus præcedentibus XIII. & XIV. in (x) quibus etiam resistentia uniformis, quæ oritur ex tenacitate medii pro vi gravitatis, substitui potest, vel cum eadem, ut prius, componi. Sed propero ad alia.

SEC-

(t) (*) *Resistentia corporum* (Vid. Lemnum. 1.)

(u) (*) *In iisdem utique* (105).

(x) * *In quibus etiam resistentia uniformis*, hoc est, si corpus solâ vi insitâ feratur, in constructionibus prop. 13. & 14., quæ sunt pro corporis ascensu, loco gravitatis substituenda est resistentia uniformis quæ oritur ex tenacitate medii; si corpus ascendens vi gravitatis etiam urgeatur, quantitas illa quæ solam gravitatem exponebat, summam gravitatis & resistentiæ uniformis in prædictis constructionibus exponet. Tandem si corpus vi gravitatis descendat, eadem quantitas quæ solam gravitatem exponebat, excessum gravitatis suprà resistentiam uniformem in constructionibus quæ sunt pro descensu repræsentabit (cæteris manentibus.) 146.

SECTIO IV.

De corporum circulari motu in mediis resistentibus (*).

(*) NEWTONUS in hâc sectione præcipuas supponit Logarithmicæ spiralis proprietates, postulat igitur instituti nostri ratio ut de illâ curvâ aliquid præmittamus.

147. Circulus P A E L, centro S, & radio quovis S P descriptus divisus sit in arcus quotlibet æquales P A, A B, B C, C D &c., sintque radiorum P S, A S, B S, C S &c., partes P S, Q S, R S, X S &c. in continuâ progressione geometricâ, puncta P, Q, R, X &c., erunt in *Spirali Logarithmicâ* in quâ proindè si radii Q S, R S, X S &c., sint numeri, arcus circuli P A, P B, P C &c., sicut & anguli P S Q, P S R, P S X &c., erunt ut illorum numerorum Logarithmi, prorsùs ut in vulgari Logarithmicâ axis partes sunt ut Logarithmi ordinatarum correspondentium.

148. Quoniam autem progressio geometrica in infinitum decrescere & crescere potest, manifestum est spiralem Logarithmicam utrinquè tam ad centrum S accedendo quàm ab eodem versùs M recedendo per gyros infinitos continuari posse, continuatâ progressione radiorum decrescentium vel crescentium circà centrum S, ad quod idcircò curva decrescentibus radiis proportionalibus, magis magisque accedit, licet numquam illud possit attingere, sive ut loqui amant, licet illud centrum non attingat nisi post infinitas revolutiones.

149. Angulus S Q R, quem radius quilibet S Q, cum curvâ ad easdem partes constituit constans est; si quidem evanescentibus arcubus æqualibus P A, A B, B C &c., triangula evanescentia P S Q, Q S R, R S X &c., similia fiunt propter latera circà æquales ad centrum angulos proportionalia (147) & ideò alii anguli homologi

gi SPQ, SQR, SRX &c., & PQS, QRS, RXS, æquales sunt.

150. Quoniam itaque spira quælibet PQRZp, pqrzπ &c., totidem triangulis PQS & qqS, QRS & qrS &c. similibus similiterque positis divisa est, spiræ omnes quæ à radio positione dato SP, ad eundem radium ductæ sunt, inter se similes radiisque correspondentibus proportionales erunt, id est PS : pS = PQRZp : pqrzπ &c. Atquè hinc sequitur (147) tam spiras omnes quàm radios ipsis correspondentes ad centrum usque in progressione geometricâ decrescere, sunt enim PS, pS, πS, &c. progressionis geometricæ termini æquidistantes ob æqualem angulorum æqualium PSQ, QSR, pSq, qSr, &c. numerum in singulis spiris comprehensum undè radiorum quoque differentiæ Pp, pπ &c. in eâdem geometricâ progressione decrescunt.

151. Ductâ rectâ PT spiralem tangente in P, & rectâ PO ad eandem perpendiculari, per centrum S erigatur ad radium SP perpendiculum TSO rectis PT & PO occurrens in T & O, longitudo spiralis PZpzπS, ad centrum usque S, æquabitur tangenti PT, eritque proindè ad radium SP in datâ ratione PT ad SP, vel OP ad OS. Nam centro S, radiis SQ, SR, SX, SV &c. infinitè propinquis descripti sint arcus circulares QF, RG, XH, VR &c., & ob angulos QFP, RGQ, XHR rectos, angulosque QPF, RQG, XRH &c. æquales (149), triangula evanescentia PFQ, QGR, RHX &c. similia sunt triangulo PST, est igitur PT : PS = PQ : PF = QR : QG = RX : RH &c. & compositè PT : PS = PQ + QR + RX &c. : PF + QG + RH &c. id est, ut longitudo spiralis ad totum radium PS. Quarè longitudo spiralis æquatur tangenti PT. Est autem ubique tangens PT ad radium correspondentem PS, in ratione datâ, ob triangulum PTS specie datum (149) & ob triangula TPS, POS, (*per constr.*) similia, est etiam OP : OS = PT : PS, seu ut longitudo spiralis ad radium.

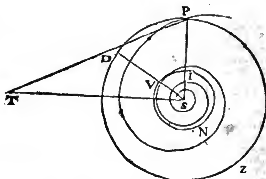
152. Hinc quoque patet quòd si centro S & radio quovis VS describatur circulus secans spiralem in V & radium PS, in I, pars spiralis PV erit ad partem PI, radii PS, ut tangens PT ad totum radium PS. Quarè si, manentibus circulorum radiis SP, SI, mutetur utcumque angulus TPS, quem spiralis seu ipsius tangens continet cum radio PS, longitudo spiralis tota ad centrum usquè S, sicut & longitudo inter duos circulos radiis SP, & SI descriptos comprehensa, erit ut spiralis tangens PT, seu ut secans anguli TPS. Ostendimus (151) longitudinem spiralis æqualem esse tangenti PT, & partem spiralis PV, inter prædictos circulos contentam, esse ad tangentem PT, in ratione PI ad PS, quæ (*per hyp.*) data est; manente autem radio seu sinu toto PS, est PT secans anguli PTS.

153. Dicantur radius constans $PS = a$, subtangens $ST = b$, arcus quilibet circuli PC vel PCLP + PC, vel 2 PCLP + PC $= x$, correspondens spiralis radius $SX = y$, qui crescente arcu x decrescit, erit ob triangulorum XKV, PST similitudinem PS : ST = XK : VK, & ob sectores SVK, SDC similes, SK sive SX : SC seu PS = VK : DC, ideoque ex æquo SX : ST = XK : DC; id est, $y : b = -dy : dx = -\frac{b\,dy}{y}$, hinc sumptis fluentibus $x = Q - bL.y$, & quia ubi $x = 0$, fit $y = a$, erit $Q = bL.a$, & ideo $x = bL.a - bL.y = bL.\frac{a}{y}$; si itaque datus fuerit radius y cum arcu circulari x, seu angulo PSC dabitur b subtangens anguli spiralis, est enim $b = \frac{x}{L.\frac{a}{y}}$.

Si verò datus sit tum arcus x tum subtangens b dabitur radius y; Ponatur enim $L.h = 1$ & erit $\frac{x}{b} \times L.h = L.\frac{a}{y}$, adeòque $h^{\frac{x}{b}} = \frac{a}{y}$; $y = \frac{a}{h^{\frac{x}{b}}}$, & hinc etiam $a = y \times h^{\frac{x}{b}}$.

154. Hinc si manentibus radiis SP seu a, & SV vel SI seu y, adeòque & $L.\frac{a}{y}$, mutetur utcumque angulus TPS, quem spiralis cum radio continet, arcus circularis PD vel x, comprehensus inter radios SP & SVD, erit semper ut subtangens spiralis ST, seu b, quæ, manente radio seu sinu toto PS, est ut anguli TPS tangens.

155.



155. Iisdem positis; hoc est, manentibus radiis S P sive a, & S I sive y, & utcumque mutato angulo T P S, numerus revolutionum spiralis inter circulos P D Z P, & I V N I centro S & radiis datis S P S V vel S I descriptos est ut tangens S T anguli T P S, quem spiralis cum medio continet. Sit enim c circumferentia circuli P T Z P, & n numerus integer vel fractus revolutionum spiralis a puncto P ad punctum V inter circulos P D Z P, & I V N I, erit (153) $nc = x = b\, L. \frac{a}{y}$; & hinc $n = \frac{b}{c} \times L. \frac{a}{y}$. Quarè ob datas c, a & y, (per hyp.) erit n ut b, id est numerus revolutionum inter circulos datos ut subtangens spiralis S T, seu ut tangens anguli T P S, quem spiralis cum radio continet.

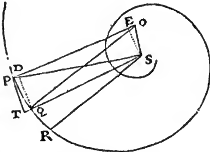
156. Spiralis post infinitos sibi superimpositos gyros comprehendit cum radio P S spatium duplum trianguli P S T. Iisdem enim positis quæ num. 153. cum sit (fig. pag. 142.) P S (a) : S T (b) = XK ($-dy$) : V K $= -\frac{b\,dy}{a}$, erit sector SVK seu SVX $= -\frac{y\,b\,dy}{2\,a}$, & sumptis fluentibus, sector S P V $= Q - \frac{b\,y^2}{4\,a}$; quia verò evanescente sectore S P V, fit $y = a$, erit $Q = \frac{b\,a^2}{4\,a}$, & hinc S P V $= \frac{b\,a\,a - b\,y\,y}{4\,a}$. Quarè ubi radius $y = o$, fiet area S P V $= \frac{b\,a}{4} = \frac{PS \times ST}{4} = \frac{1}{2}$ Triang. P S T.

LEM-

LEMMA III.

Sit P Q R *spiralis quæ secet radios omnes* SP, SQ, SR, *&c. in æqualibus angulis. Agatur recta* PT *quæ tangat eandem in puncto quovis* P, *secetque radium* S Q *in* T; *& ad spiralem erectis perpendiculis* P O, Q O *concurrentibus in* O, *jungatur* S O. *Dico quod si puncta* P *&* Q *accedant ad invicem & coeant, angulus* PSO *evadet rectus, & ultima ratio rectanguli* TQ × 2 PS *ad* P Q *quad. erit ratio æqualitatis.*

Etenim de angulis rectis *O P Q*, *O Q R* subducantur anguli æquales *S P Q*, *S Q R*, & manebunt anguli æquales *O P S*, *O Q S*. Ergo circulus qui transit per puncta O, S, P transibit (y) etiam per punctum *Q*. Coëant puncta *P* & *Q*, & hic circulus in loco coitûs *P Q* tanget spiralem, (z) ideoque perpendiculariter secabit rectam *O P*. Fiet igitur *O P* diameter circuli hujus, & angulus *OSP* in semicirculo rectus. *Q. E. D.*



Ad *O P* demittantur perpendicula *Q D*, *S E*, & (a) linearum rationes ultimæ erunt hujusmodi: *T Q* ad *P D* ut *TS* vel *PS* ad *P E*, seu 2 *P O* ad 2 *P S*; item *P D* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P O*; & ex æquo perturbatè *T Q* ad *P Q* ut *P Q* ad 2 *P S*. Unde fit *P Q q* æquale *T Q* × 2 *P S*. *Q. E. D.*

PRO-

(y) * *Transibit etiam per punctum Q.* (per prop. 21. lib. 3. Elem.)

(z) *Ideòque perpendiculariter secabit rectam* O P, quæ (*per hyp.*) perpendicularis est ad arcum Q P, fiet igitur O P diameter circuli hujus (*per prop. 19. lib. 3. Elem.*) & angulus O S P in semicirculo rectus (*per prop. 31. lib. 3. Elem.*).

(a) * *Et linearum rationes ultimæ.* Quoniam lineæ P T, D Q, E S ad P O normales, sunt parallelæ, erit (*per prop. 10. lib. 6. Elem.*) T Q : P D = T S vel P S : P E, & ob similitudinem triangulorum PSO, PES, PS : PE = PO : PS, seu 2 PO : 2 P S, ideoque T Q : P D = 2 P O : 2 PS. Quia verò radii O P, O Q sunt ad arcum 156.

eva-

PROPOSITIO XV. THEOREMA XII.

Si medii densitas in locis singulis sit reciprocè ut distantia locorum à centro immobili, sitque vis centripeta in duplicatâ ratione densitatis; dico quod corpus gyrari potest in spirali, quæ radios omnes à centro illo ductos intersecat in angulo dato.

Ponantur quæ in superiore lemmate, & producatur SQ ad V, ut sit SV æqualis SP. Tempore quovis, in medio resistente, describat corpus arcum quàm minimum PQ, & tempore duplo arcum quàm minimum PR; & decrementa horum arcuum ex resistentiâ oriunda, sive defectus ab arcubus, qui in medio non resistente iisdem temporibus describerentur, (b) erunt ad invicem ut quadrata temporum in quibus generantur: Est itaque decrementum arcûs PQ pars quarta decrementi arcûs PR. (c) Unde etiam, si areæ PSQ æqualis capiatur area QSr,

evanescentem P Q perpendiculares, punctum O est centrum, P O radius & 2 P O diameter circuli spiralem osculantis in P (121. *lib.* 1.) & (*per lem.* 7. *lib.* 1.) P Q hujus circuli arcus vel chordæ; atque adeo (ex naturâ circuli) abscissa P D est ad chordam P Q ut P Q ad diametrum 2 P O. Quare *ex æquo perturbatè* &c.

(b) * *Erunt ad invicem.* Cùm enim resistentia per arcum P R considerari possit tanquam vis retardatrix (4), decrementa arcuum minimorum P Q, P R ex resistentiâ oriunda sunt ut spatia quæ urgente vi acceleratrice resistentiæ æquali corpus describeret iisdem temporibus quibus describit arcus illos P Q, P R; Quarè decrementa illa sunt ut quadrata temporum quibus generantur (*per Lem. X. lib.* 1.).

(c) * *Undè etiam si area.* Corpus eâ velocitate quam habet in loco P, temporibus æqualibus describat arcus quàm minimos P q, q v, in medio non resistente,

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XV. Theor. XII.

QSr, erit decrementum arcûs PQ æquale dimidio lineolæ Rr; ideoque vis resistentiæ & vis centripeta sunt ad invicem ut lineolæ $\frac{1}{2}Rr$ & TQ quas simul generant. Quoniam vis centripeta, quâ corpus urgetur in P, (d) est reciprocè vt SPq, & (*per* (e) *lem.* x. *lib.* 1.) lineola TQ, quæ vi illâ generatur, est in ratione compositâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus PQ describitur (nam resistentiam in hoc casu, ut infinitè minorem quàm vis centripeta, negligo) erit $TQ \times SPq$, id est (per lemma novissimum) $\frac{1}{2}PQq \times SP$, in ratione duplicatâ temporis, (g) ideoque tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$; & (h) corporis velocitas, quâ arcus PQ illo tempore describitur, ut $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ seu $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, hoc est, in subduplicatâ ratione ipsius SP reciprocè. Et simili argumento, velocitas quâ arcus QR describitur, est in subduplicatâ ratione ipsius SQ reciprocè. Sunt autem arcus illi PQ & QR ut (i) velocitates descriptrices ad invicem, id est, in subduplicatâ ratione SQ ad SP, sive ut SQ ad $\sqrt{SP \times SQ}$;

&

te, & arcus P Q, Q R in medio resistente, & erit (*ex dem.* ☞) 4 Q q = R v, sunt autem areæ P S q & q S v æquales (*per prop.* 1. *Lib.* 1.) ideóque ob areas P S Q, & Q S r, etiam æquales (*per hyp.*) erit P S q — P S Q seu area Q S q æqualis q S v — Q S r, seu r S v — Q S q, & hinc area r S v æqualis est 2 Q S q; sed demissis ex centro S ad tangentes Q T & r t per puncta Q & r ductas perpendiculis S T & s t, area evanescens Q S q est $\frac{1}{2}$ S T × Q q, & area r S v, est $\frac{1}{2}$ S t × r v. Quarè S T × Q q æquatur $\frac{1}{2}$ S t × r v, & coeuntibus punctis P & v, fit S t = S T atquè adeo Q q = $\frac{1}{2}$ r v, & 2 Q q = r v. Cùm igitur suprà invenerimus 4 Q q = R v, erit 4 Q q — 2 Q q, seu 2 Q q = R v — r v = R r, & ideò Q q = $\frac{1}{2}$ R r. Itaque eodem tempore quo resistentia generat decrementum Q q, seu $\frac{1}{2}$ R r, vis centripeta quâ corpus à tangente P T (*vid. fig. text.*) ad punctum Q arcûs P Q retrahitur, generat decrementum T Q, & ideò vis resistentiæ est ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ R r ad T Q, (*per cor.* 4. *Lem. X.*) atque hæc omnia generaliter obtinent, quæcumque fuerit tum curva P Q R, cujus proprietates nondum adhibuimus, tum vis centripeta, tum resistentia, tum velocitas corporis. 156.

(d) * *Est reciprocè ut S P q* (per hyp.).

(e) * *Per Lem. X.* (cor. 3.).

(g) * *Ideoque tempus.* (Neglectâ fractione datâ $\frac{1}{2}$ *est ut* &c.

(h) * *Et corporis velocitas.* (14).

(i) * *Ut velocitates descriptrices ad invicem* (11), quia arcus illi P Q, & Q R, æqualibus temporibus describuntur (*per Hyp.*).

& (k) ob æquales angulos SPQ, SQr & æquales areas PSQ, QSr, est arcus PQ ad arcum Qr ut SQ ad SP. (l) Sumantur proportionalium consequentium differentiæ, & fiet arcus PQ ad arcum Rr ut SQ ad $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, seu $\frac{1}{2} VQ$. Nam punctis P & Q coeuntibus, ratio ultima $SP - \sqrt{SP \times SQ}$, ad $\frac{1}{2} VQ$ est (m) æqualitatis. Quoniam decrementum arcus PQ, ex resistentiâ oriundum, sive hujus duplum Rr, (n) est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim; (o) erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQq \times SP}$. Erat autem PQ ad Rr, ut SQ ad

(k) * *Et ob æquales angulos.* Ex centro S ad tangentes P X, Q Z demissa sint perpendicula S X, S Z, & areæ æquales P S Q & Q S r, erunt $\frac{1}{2}$ S X × P Q, & $\frac{1}{2}$ S Z × Q r, ideóque S X ad S Z ut Q r ad P Q; sed ob angulos rectos ad X & Z, & angulos æquales X P S & Z Q S (*per lem.* 3.) similia sunt triangula S X P & S Z Q, & ideò S X : S Z = S P : S Q, quare fit Q r : P Q = S P : S Q.

(l) * *Sumantur proportionalium &c.* Cùm enim sit (*per dem.*) $PQ : SQ = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, & $PQ : SQ = Qr : SP$, erit etiam $Qr : SP = QR : \sqrt{SP \times SQ}$, unde erit $PQ : SQ = Qr - QR$ seu $Rr : SP - \sqrt{SP \times SQ}$, & hinc $PQ : Rr = SQ$:

(m) * *Est æqualitatis.* Est enim $SQ = SP - VQ$, & proindè $SP \times SQ = SP^2 - SP \times VQ$, ideoque extrahendo radicem quadratam (per formulam lib. 1. 551.) fit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ - \frac{VQ^2}{8 SP}$ — &c., in infinitum; cæteri verò termini post secundum negligi possunt, quia coeuntibus P & Q, evanescunt respectu V Q, & ideò erit $\sqrt{SP \times SQ} = SP - \frac{1}{2} VQ$, ac proindè $\frac{1}{2} VQ = SP - \sqrt{SP \times SQ}$.

(n) * *Est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim.* (Per cor. 3. Lem. X. lib. 1.)

(o) *Erit resistentia &c.* Nam tempus est ut $PQ \times \sqrt{SP}$ (*ex Dem.*).

ad $\frac{1}{2} VQ$, & inde $\frac{Rr}{PQq \times SP}$ fit ut $\frac{\frac{1}{2} VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ five ut $\frac{\frac{1}{2} OS}{OP \times SPq}$. Namque punctis P & Q coeuntibus, SP & SQ coincidunt, & angulus PVQ fit rectus; & (p) ob similia triangula PVQ, PSO, fit PQ ad $\frac{1}{2} VQ$ ut OP ad $\frac{1}{2} OS$. Est igitur $\frac{OS}{OP \times SPq}$ ut resistentia, (q) id est, in ratione densitatis medii in P & ratione duplicatâ velocitatis conjunctim. Auferatur duplicata ratio velocitatis, nempe ratio $\frac{1}{SP}$, & manebit medii densitas in P ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Detur spiralis, & (r) ob datam rationem OS ad OP, densitas medii in in P erit ut $\frac{1}{SP}$. In medio igitur cujus densitas est reciprocè ut distantia à centro SP, corpus gyrari potest in hâc spirali. *Q. E. D.*

Corol.

(p) * *Et ob similia triangula PVQ; PSO*, angulus PSO (*per Lemma novissimum*) rectus est & ideò æqualis angulo etiam recto PVQ, & prætereà si ex angulis rectis QPO & VPS subducatur communis angulus QPS, remanent æquales VPQ & SPO; Quarè triangula PVQ & PSO sunt similia.

(q) * *Id est in ratione &c.* (per Hyp.

(r) * *Ob datam rationem OS ad OP.* Datâ spirali datur angulus QPS & hinc in Triangulo SPO datur angulus SPO cum isto QPS rectum faciens, datur etiam rectus PSO (*per Lem.* 3.) atquè ideò trianguli POS anguli omnes dantur, & proindè datur ratio OS ad OP.

Corol. 1. (f) Velocitas in loco quovis P ea ſemper eſt, quâcum corpus in medio non reſiſtente eâdem vi centripetâ gyrari poteſt in circulo, ad eandem à centro diſtantiam SP.

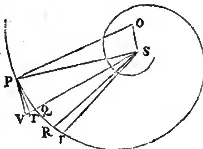
Corol. 2. Medii denſitas, ſi datur diſtantia SP, eſt ut $\frac{OS}{OP}$, ſin diſtantia illa non datur, ut $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et (t) inde ſpiralis ad quamlibet medii denſitatem aptari poteſt.

Corol. 3. Vis reſiſtentiæ in loco quovis P, eſt ad vim centripetam in eodem loco ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP. Nam vires illæ ſunt

(f) * *Velocitas in loco quovis P &c.* * Gyretur corpus in medio non reſiſtente in circulo P W radio P S deſcripto, in eoque retineatur vi centripetâ quæ ſit eadem cum illâ qua corpus urgetur in puncto P ſpiralis (*vide fig. textûs*). Sumatur in radio P S particula P X æqualis T Q, ſive ſpatio quod generatur per vim centripetam quâ corpus retinetur in ſpirali in P, ductâque tangente P Z, è puncto Y ducatur per centrum linea S Y y ad Tangentem uſque, Y y erit ſpatium quod generatur per vim centripetam quâ corpus in circulo retinetur, ſed coëuntibus punctis P & Y, linea y Y fit ultimò parallela lineæ P S, ideoque y Y fit æqualis particulæ P X, ſive T Q. Cùm ergo eadem ſit vis centripeta tam in Circulo quàm in ſpirali, & ſpatia æqualia y Y & T Q ab illâ vi centripeta generentur, æquali tempore utrinque generabuntur, unde eodem tempore quo corpus in ſpirali in Q pervenerit, eo ipſo tempore perveniet in Y in circulo, velocitas ergo in ſpirali erit ad velocitatem in hoc circulo ut eſt arcus P Q ad arcum P Y, ſed ex naturâ ſpiralis per Lemma III. eſt $PQ = \sqrt{TQ \times 2PS}$, & ex naturâ circuli eſt $PY = \sqrt{PX \times 2PS}$ & ex conſtructione cùm ſit $PX = TQ$ erit $PY = \sqrt{TQ \times 2PS}$ ergo $PQ = PY$, ergo velocitas in loco quovis ſpiralis ea eſt quâcum corpus eâdem vi centripetâ in medio non reſiſtente ad eandem à centro diſtantiam gyrari poteſt.

(t) * *Et inde ſpiralis &c.* * Fingantur duo media diverſæ denſitatis, talia tamen ut in ſingulo medio denſitas in locis diverſis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro. Sumptâ verò in utroque æquali à centro diſtantiâ S P, ſit ratio denſitatis prioris medii ad denſitatem poſterioris in eo loco ut a ad b, ea ratio eadem erit in aliâ quâcumque diſtantiâ à centro, putà in diſtantiâ S X. Nam in utroque medio denſitas in P erit ad denſitatem in X ut $\frac{1}{SP}$ ad $\frac{1}{SX}$; Itaque ſi in priore medio denſitas in P fuerit ut a, denſitas in X erit ut $\frac{a \times SP}{SX}$, & ſi in ſecundo medio denſitas in P fuerit ut

sunt ad invicem ut $\frac{1}{2} R r$ & $T Q$ sive (u) ut $\frac{\frac{1}{4} V Q \times P Q}{S Q}$ & $\frac{\frac{1}{2} P Q q}{S P}$ hoc est, ut $\frac{1}{2} V Q$ & $P Q$, seu (x) $\frac{1}{2} O S$ & $O P$. (y) Datâ igitur spirali datur proportio resistentiæ ad vim centripetam, & vice versâ ex datâ illâ proportione datur spiralis.



Corol. 4. Corpus itaque gyrari nequit in hâc spirali, (z) nisi ubi vis resistentiæ minor est quàm dimidium vis centripetæ.

ut b densitas in X erit ut $\frac{b \times SP}{SX}$, est verò $\frac{a SP}{SX}$ ad $\frac{b \times SP}{SX}$ ut a ad b, ergo in his duobus mediis densitates erunt ubique in datâ ratione a ad b, in æqualibus à centro distantiis.

Si itaque data sit spiralis quæ in medio priore describitur, inveniri poterit illa quæ in posteriore medio describi posset; nam sumpta distantia quâvis S P, fiat a ad b ut $\frac{OS}{OP}$ ad $\frac{b \times OS}{a \times OP}$ hæc erit ratio quæ in hâc novâ spirali intercedet inter lineas, lineis O S & O P correspondentes, sive quia angulus S in Triangulo O S P est rectus, hæc erit ratio inter sinum anguli quem facit linea P S cum perpendiculari ad curvam, & Radium; quo sinu dato ejusque angulo, spiralis obtinetur ad hanc medii densitatem aptata.

Ex quibus illustratur quod præcedit in hoc ipso Corollario, si duæ spirales in diversis mediis describantur, mediorum densitates in eadem distantia erunt ut $\frac{OS}{OP}$, sed si distantiæ à Centro diversæ sumantur, Ratio inversa distantiarum est huic conjungenda, eruntque ideo mediorum densitates ut $\frac{OS}{OP \times SP}$.

(u) * *Sive ut &c.* Nam (per Dem.) $PQ : Rr = SQ : \frac{1}{2} VQ$, & (per Lem. 3.) $TQ = \frac{PQ^2}{2 PS}$, & punctis Q & P coeuntibus, est $SQ = SP$. 156.

(x) * *Seu* $\frac{1}{2}$ *O S & O P.* Quia triangula P V Q, P S O similia sunt (ex Dem.) est $\frac{1}{2} VQ : PQ = \frac{1}{2} OS : OP$.

(y) * *Datâ igitur spirali.* Nam datâ spirali datur specie triangulum PSO (ex Dem.) & indè datur ratio O S ad O P, & viceversâ datâ hâc ratione, datur specie triangulum rectangulum P S O, & hinc datur angulus P O S æqualis angulo Q P S quem spiralis cum radio continet, ideóque datur spiralis. Iis enim datis & assumpto ut libet radio S P, dabitur subtangens spiralis Logarithmicæ, seu tangens anguli Q P S, & hinc dato angulo quovis P S R, dabitur radius S R cum puncto R in spirali (153).

(z) * *Nisi ubi vis resistentiæ minor est &c.* Cùm enim vis resistentiæ sit ad vim centripetam ut $\frac{1}{2}$ OS ad OP, & ad dimidium vis centripetæ ut $\frac{1}{2}$ OS ad $\frac{1}{2}$ O P, seu ut O S ad O P, sitque trianguli rectanguli P S O (Lem. 3.) crus O S minus hypothenusâ O P, manifestum est vim resistentiæ minorem esse dimidiâ vi centripetâ.

tæ. ([a]) Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ, & spiralis conveniet cum lineâ rectâ *P S*, inque hac rectâ corpus descendet ad centrum eâ cum velocitate, quæ sit ad velocitatem, quâ probavimus in superioribus in casu parabolæ (*theor.* x. *lib.* 1.) descensum in medio non resistente fieri, in ([b]) subduplicatâ ratione unitatis ad numerum binarium. ([c]) Et tempora descensûs hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideo dantur.

Corol. 5. Et quoniam in æqualibus à centro distantiis velocitas ([d]) eadem est in spirali *P Q R* atque in rectâ *S P*, & lon-

(a) * *Fiat resistentia æqualis dimidio vis centripetæ &c.* Ideóque O S æqualis O P, & puncto O in infinitum abeunte, fiet O P perpendicularis ad S P, & angulus P O S ipsique æqualis angulus Q P S quem spiralis continet, cum radio P S evanescet, convenietque proindè spiralis cum lineâ rectâ P S.

(b) * *In subduplicatâ ratione unitatis*, Nam (*in theor. X. lib.* 1.) corporis in medio non resistente rectâ cadentis velocitas in loco quovis P æqualis est velocitati quâ corpus ad distantiam dimidiam à centro, seu ad distantiam $\frac{1}{2}$ S P circulum describere potest, & (*per cor.* 1. *hujus*) corporis in medio resistente spiralem seu rectam P S cum quâ spiralis convenire supponitur describentis velocitas in eodem loco P æqualis est velocitati quâcum corpus in medio non resistente gyrari potest in circulo ad integram distantiam S P. Sed velocitates corporum diversos circulos describentium) in hypothesi quòd vires centripetæ sunt reciprocè ut quadrata radiorum) sunt inter se reciprocè in Radiorum ratione subduplicatâ (*pro convers. cor.* 6. *prop.* 4. *lib.* 1.) adeóque velocitas in circulo cujus radius S P est ad velocitatem in circulo cujus radius $\frac{1}{2}$ S P, ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ad $\sqrt{1}$, sive ut 1. ad $\sqrt{2}$, erit ergo velocitas corporis in medio resistente per rectam P S descendentis ad velocitatem descendentis in medio non resistente per rectam eandem & in eodem loco P existentis, ut 1 ad $\sqrt{2}$. Q. E. D.

* Observandum verò quòd velocitates initiales utrinque debent esse secundùm Legem quæ in reliquo motu obtinet, hoc est velocitas initialis in medio resistente esse debet æqualis celeritati quâ corpus ad eamdem à centro distantiam in medio non resistente circulum describeret, & velocitas initialis in medio non resistente æqualis esse debet velocitati quâ corpus ad dimidiam à centro distantiam in medio non resistente in circulo revolveretur.

Quoniam itaque velocitas corporis in medio non resistente descendentis datur (*per theor.* X. *lib.* 1.) dabitur etiam velocitas in medio resistente descendentis.

(c) * *Et tempora descensûs, hic erunt reciprocè ut velocitates, atque ideò dantur.* Nam momenta temporis quibus corpora duo in medio resistente & in eodem non resistente describunt spatium idem quam minimum R r, sunt ut corporum velocitates reciprocè ([illegible]) id est ut $\sqrt{2}$ & 1 directè (per modò demonstrata) adeóque in datâ ratione. Quarè (*per cor. Lem.* 4. *lib.* 1.) tempora tota quibus corpora illa idem spatium quodvis P R describunt, sunt etiam in eâdem datâ ratione $\sqrt{2}$ ad 1, seu ut velocitates reciprocè. Cùm igitur (*per prop.* 36. & 37. *lib.* 1.) detur tempus quo corpus in medio non resistente cadendo spatium quodlibet describit, dabitur quoque tempus quo corpus in medio resistente spatium quodvis datum cadendo percurrit.

P R r S

(d) *Eadem est in spirali.* (Per cor. 1. hujus.

longitudo ſpiralis ad longitudinem rectæ PS eſt in datâ ratione, (e) nempe in ratione OP ad OS; tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad tempus deſcenſûs in rectâ SP in (f) eâdem illâ datâ ratione, proindeque datur.

Corol. 6. Si centro S intervallis duobus quibuſcunque datis deſcribantur duo circuli; & manentibus hiſce circulis, mutetur utcunque angulus quem ſpiralis continet cum radio PS: numerus revolutionum quas corpus intra circulorum circumferentias, pergendo in ſpirali à circumferentiâ ad circumferentiam, complere poteſt, eſt ut (g) $\frac{PS}{OS}$, ſive ut tangens anguli illius quem ſpiralis continet cum radio PS; (h) tempus verò revolutionum earundem ut $\frac{OP}{OS}$, id eſt, ut ſecans anguli ejuſdem, vel etiam reciprocè ut medii denſitas. Co-

(e) * *Nempè in ratione* O P *ad* O S (151).

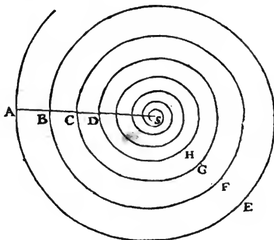
(f) * 157. *Id eâdem illâ ratione.* Spatia enim velocitatibus æqualibus & uniformibus deſcripta ſunt ut tempora quibus deſcribuntur; undè ſi ſpiralis P Q R & recta P S, diviſæ intelligantur in partes quam minimas tc: .roportionales, quod fit dum puncta ... iſionum in ſpirali & in radio P S à centro S æquidiſtant (152) tempora quibus partes illæ quam minimæ in ſpirali & in rectâ P S homologæ deſcribuntur, erunt ut eædem partes, ſeu in datâ ratione, ſiquidem velocitas in ſpirali & in recta P S in iis punctis à centro æquidiſtantibus ſunt æquales eidem, nempe celeritati corporis circa idem centrum ad eandem diſtantiam in circulo revolventis; ideóque (*per cor. lem.* 4. *lib.* 1.) totum tempus deſcenſûs in ſpirali erit ad totum tempus deſcenſûs in rectâ P S per ſpatia homologa in datâ illâ ratione longitudinis 157.
nempe ſpiralis ad longitudinem P S, ſeu in ratione O P ad O S.

(g) * *Eſt ut* $\frac{PS}{OS}$ *ſivè ut tangens anguli &c.* (155). Si autem ſinus totus ſit 1, cum ſit O S, ad P S, ut ſinus totus ad tangentem anguli P O S, ſeu anguli æqualis Q P S, erit tangens illa $\frac{PS}{OS}$.

(h) * *Tempus verò revolutionum earundem ut* $\frac{OP}{OS}$, *id eſt, ut ſecans &c.* Eſt enim tempus illud revolutionum inter circulos duos datos, ad tempus deſcenſûs per partem datam rectæ P S inter circulos contentam ut longitudo revolutionum illarum ad partem hanc rectæ P S, circulis duobus interceptam (157); ſed mutato utcumque angulo, quem ſpiralis continet cum

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IV. PROP. XV. THEOR. XII.

Corol. 7. Si corpus in medio, cujus densitas est reciprocè ut distantia locorum à centro, revolutionem in curvâ quacunque *AEB* circa centrum illud fecerit, & radium primum *AS* in eodem angulo secuerit in *B* quo prius in *A*, idque cum velocitate quæ fuerit ad velocitatem suam primam in *A* reci-



procè in subduplicatâ ratione distantiarum à centro (id est, ut *AS* ad mediam proportionalem inter *AS* & *BS*) (i) corpus illud perget innumeras consimiles revolutiones *BFC*, *CGD*, &c. facere, & intersectionibus distinguet radium *AS* in partes

cum radio PS longitudo revolutionum inter duos circulos datos comprehensa est ut secans anguli illius (152). Quarè cùm datum sit tempus descensûs per partem datam rectæ PS inter circulos datos contentam, erit tempus revolutionum inter circulos ut secans anguli quem spiralis continet cum radio PS seu ut $\frac{OP}{OS}$. Si enim sinus totus sit 1, erit OS ad OP ut 1 ad secantem anguli POS seu QPS, & ideò secans est $\frac{OP}{OS}$. Porrò datâ rectâ PS, densitas est ut $\frac{OP}{OS}$ reciprocè (*per cor.* 2. *hujus*). Ergò &c.

(i) * *Corpus illud perget &c.* Centro S & radio dato SA descripta intelligatur spiralis Logarithmica quæ primâ revolutione absolutâ, transeat per punctum B datum in radio SA (153.) & spiralis illa suis semper similibus revolutionibus distinguet radium AS in partes AS, BS, CS, DS &c. continuè proportionales (150). Fingamus etiam quòd iisdem positis quæ (*in*

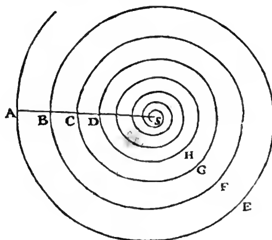
tes AS, BS, CS, DS, &c. continuè proportionales. Revolutionum verò tempora erunt ut perimetri orbitarum AEB, BFC, CGD, &c. directè, & velocitates in principiis A, B, C, inversè; id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Atque tempus totum, quo corpus perveniet ad centrum, erit ad tempus revolutionis primæ, ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, pergentium in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; id est, ut terminus ille primus $AS^{\frac{3}{2}}$ ad differentiam duorum primorum $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, sive ut $\frac{2}{3}$ AS ad AB quam proximè. Unde tempus illud totum expeditè invenitur.

Co-

(*in prop.* 15.) corpus aliquod P in medio justæ densitatis spiralem illam Logarithmicam describat, dum corpus aliud Q in alio medio describit curvam A E B F C S & in iisdem à centro S distantiis densitates duorum mediorum erunt in datâ ratione, cum in utroque medio sit (*per hyp. cor. hujus* & *per prop.* 15) densitas in loco A ad densitatem in loco B, ut S B ad S A. Simili modo velocitates corporum P & Q in loco B, erunt ut eorumdem velocitates in loco A, *per prop.* 15. & *hyp. coroll. hujus*) ideóque in datâ ratione; vires autem centripetæ quibus corpora P & Q urgentur, sunt in utroque medio iisdem in locis eædem (*per hyp.*), & tandem ob angulos datos quos tam spiralis Logarithmica, quàm curva A E B continet cum radio A S, directiones motuum in utrâque curvâ pares sunt in locis A & B; Quarè postquam corpus Q primâ revolutione A E B absolutâ, pervenit in B, per quod punctum transit etiam spiralis Logarithmica, eodem modo determinatur ad æmulandum motum corporis P secundam suam revolutionem absolventis, quo determinatum fuerat in loco A ut æmularetur motum corporis ejusdem P primam suam revolutionem perficientis; cùm (*per dem.*) omnia paria sint in locis B & A videlicet mediorum densitates, corporum velocitates, directiones, viresque centripetæ. Quoniam igitur secunda spiralis Logarithmicæ revolutio à puncto B ad punctum C priori à puncto A ad punctum B absolutæ similis est (150), necessum est ut secunda quoque curvæ revolutio B F C priori A E B sit similis; Et simili modo ostendetur revolutiones omnes B F C, C G D &c. & motus corporis Q eas absolventis esse inter se similes. Erunt igitur revolutiones A E B, B F C, C G D &c. ut radii A S, B S, C S &c. id est, continuè proportionales, & ob similitudinem motuum in similibus revolutionibus A E B, B F C &c. si ex centro S ductus intelligatur radius revolutiones illas secans in F, E, G &c. quæ erunt in revolutionibus A E B, B F C &c. loca homologa, erit velocitas corporis Q in loco E ad velocitatem ejus in loco A ut velocitas in F ad velocitatem in B, & proinde velocitas in E ad velocitatem in B, ut velocitas in A ad velocitatem in B, id est, (*per hyp. cor. hujus*) ut $BS^{\frac{1}{2}}$ ad $AS^{\frac{1}{2}}$; sed tempora quibus spatia homologa quam minima in locis E & F describuntur sunt ut spatia illa directè & velocitates inversè (12); Quare cùm spatia homologa in locis E & F sint ut radii A S & B S, & velocitates ibidem ut $AS^{\frac{1}{2}}$ & $BS^{\frac{1}{2}}$ inversè (*ex dem.*) tempus quo spatium minimum revolutionis A E B describitur est ad tempus quo describitur spatium homo- 157.

 lo-

Corol. 8. Ex his etiam præter propter colligere licet motus corporum in mediis, quorum densitas aut uniformis est, aut aliam quamcunque legem assignatam observat. Centro S, in-



tervallis continuè proportionalibus SA, SB, SC, &c. describe circulos quotcunque, & statue tempus revolutionum inter peri-

logum revolutionis similis B F C ut $AS \times AS^{\frac{1}{2}}$ ad $BS \times BS^{\frac{1}{2}}$, id est, ut $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$, ideóque in datâ ratione. Undè (*per cor. lem. 4. lib. 1.*) tempus totum quo corpus Q primam suam revolutionem A E B absolvit est ad tempus quo secundam revolutionem B F C, perficit in eâdem ratione $AS^{\frac{3}{2}}$ ad $BS^{\frac{3}{2}}$. Et simili argumento liquet tempora revolutionum B F C, C G D &c. esse inter se ut sunt $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ &c. Cùm igitur revolutionum tempora sicut quantitates $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$, &c. progressionem geometricam in infinitum decrescentem constituant, tempus totum quo corpus Q, perveniet ad centrum S erit ad tempus revolutionis primæ A E B ut summa omnium continuè proportionalium $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$, $DS^{\frac{3}{2}}$ &c. pergentium, in infinitum, ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$; porrò summa illa est ad terminum primum $AS^{\frac{3}{2}}$ ut hic terminus primus ad differentiam duorum priorum, nempè $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$. Nam scribatur sic terminorum series, $AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}} = BS^{\frac{3}{2}} : CS^{\frac{3}{2}}$ $= CS$

perimetros duorum quorumvis ex his circulis, in medio (k) de quo egimus, esse ad tempus revolutionum inter eosdem in medio proposito, ut (l) medii propositi densitas mediocris inter hos circulos ad medii, de quo egimus, densitatem mediocrem inter eosdem quàm proximè: Sed & in eadem quoque ratione esse secantem anguli quo spiralis præfinita, in medio de quo egimus, secat radium AS, ad secantem anguli quo spiralis nova secat radium eundem in medio proposito: (m) Atque etiam ut sunt eorumdem angulorum tangentes ita esse numeros revolutionum omnium inter circulos eosdem duos quam proximè. Si (n) hæc fiant passim inter circulos binos, continuabitur motus per circulos omnes. Atque hoc pacto haud difficulter imaginari possumus quibus modis ac temporibus corpora in medio quocunque regulari gyrari debebunt.

Corol. 9. Et quamvis motus excentrici in spiralibus ad (o) formam ovalium accedentibus peragantur; tamen conci-

$= CS^{\frac{3}{2}} : DS^{\frac{3}{2}}$, &c. in infinitum, & ultimo progressionis termino evanescente, erit summa antecedentium, id est, summa omnium terminorum quæ dicatur S ad summam consequentium, seu summam omnium terminorum dempto primo, ut primus ad secundum, hoc est $S : S - AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : BS^{\frac{3}{2}}$; undè habetur dividendo $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$; Est autem $BS = AS - AB$, & ideò $BS^{\frac{3}{2}} = (AS - AB)^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB + \frac{3}{8} \times \frac{AB^2}{AS^{\frac{1}{2}}} -$ &c. in infinitum (551. *lib.* 1.). Quapropter si distantia A B minima fuerit, respectu radii A S, fiet $BS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB$, quàm proximè, neglectis nimirum cæteris terminis ferè evanescentibus, erit igitur $S : AS^{\frac{3}{2}} = AS^{\frac{3}{2}} : \frac{3}{2} AS^{\frac{1}{2}} \times AB = \frac{2}{3} AS : AB$ quam proximè; Et hinc dato tempore revolutionis primæ A E B, tempus totum quo corpus pervenit ad centrum expeditè invenitur. Sit, exempli causâ, A S ad A B ut 300000 ad 1, & tempus primæ revolutionis = 1, erit tempus totum = 2000000, quàm proximè. 157.

(k) * *In medio de quo egimus.* (In prop. 15. & cor. ejus), cujus nimirum densitas est reciprocè ut distantia locorum à centro.

(l) * *Ut medii propositi densitas* (per cor. 6. hujus) supponendo spirales Logarithmicas, per puncta A, B, C, D, in utroque medio descriptas.

(m) * *Atquè etiam ut sunt &c.* Per cor. 6. hujus.

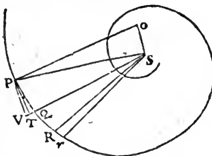
(n) * *Si hæc fiant passim inter circulos binos*, invenietur in medio regulari lex quâ motus continuabitur per circulos omnes, seu, inter circulos omnes, quemadmodum inventis prioribus seriei regularis terminis, cognoscitur lex quâ illa progreditur, *atquè hoc pacto &c.*

(o) * *Ad formam ovalium accedentibus &c.* Sunt enim spirales quarum revolutiones singulæ ferè concentricæ sunt & ad formam circulorum accedunt; aliarum revolutionis accedunt ad formam ovalium

cipiendo ſpiralium illarum ſingulas revolutiones iiſdem ab invicem intervallis diſtare, iiſdemque gradibus ad centrum accedere cum ſpirali ſuperius deſcriptâ, (p) intelligemus etiam quomodo motus corporum in hujuſmodi ſpiralibus peragantur.

PROPOSITIO XVI. THEOREMA XIII.

Si medii denſitas in locis ſingulis ſit reciprocè ut diſtantia locorum à centro immobili, ſitque vis centripeta reciprocè ut dignitas quælibet ejuſdem diſtantiæ: dico quod corpus gyrari poteſt in ſpirali quæ radios omnes à centro illo ductos interſecat in angulo dato.



Demonſtratur eâdem methodo cum propoſitione ſuperiore. Nam ſi vis centripeta in P ſit reciprocè ut diſtantiæ SP, dignitas quælibet SP^{n+1} cujus index eſt $n+1$: (q) colligetur ut ſupra, quòd tempus, quo corpus deſcribit arcum quemvis PQ; erit ut $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & reſiſtentia in P ut $\frac{Rr}{PQq \times SP^n}$, ſive ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$, ideoque ut $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, hoc eſt, ob datum $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, reciprocè ut SP^{n+1}. Et propterea, cùm velocitas ſit reciprocè ut $SP^{\frac{1}{2}n}$, denſitas in P erit reciprocè ut SP.

Co-

lium centro ſpiralis pro ellipſeos vel ovalis foco accepto.

(p) * *Intelligemus etiam* (ut in cor. 8.) *quomodò &c.*

(q) * *Colligetur ut ſuprà &c.* Quæcumque enim ſit vis centripeta, illa eſt ad vim reſiſtentiæ ut T Q ad $\frac{1}{2}$ R r (*per dem. prop. 15.*). Quoniam igitur vis centripeta quâ corpus urgetur in P, eſt reciprocè ut SP^{n+1}, & (*per cor. Lem. X. lib. 1.*) lineola T Q quæ vi illâ generatur, eſt in ratione compoſitâ ex ratione hujus vis & ratione duplicatâ temporis quo arcus P Q deſcribitur; erit $TQ \times SP^{n+1}$, id eſt, (*per Lem. 3.*) $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP^n$, in ratione duplicatâ temporis, ideóque tem-

Corol. 1. (r) Resistentia est ad vim centripetam ut $\overline{1 - \frac{1}{2}n} \times OS$ ad OP.

Corol. 2. Si vis centripeta sit reciprocè ut SP *cub.* (s) erit $1 - \frac{1}{2}n = 0$; ideoque resistentia & densitas medii nulla erit, ut in propositione nona libri primi.

Corol. 3. Si vis centripeta sit reciprocè ut dignitas aliqua radii SP cujus index est major numero 3, resistentia affirmativa (t) in negativam mutabitur.

Scho-

tempus est ut $PQ \times SP^{\frac{n}{2}}$, & corporis velocitas quâ arcus PQ illo tempore describitur ut $\frac{PQ}{PQ \times SP^{\frac{n}{2}}}$, seu $\frac{1}{SP^{\frac{n}{2}}}$; & simili argumento velocitas quâ arcus QR describitur est ut $\frac{1}{SQ^{\frac{n}{2}}}$; sunt autem arcus illi PQ & QR ut velocitates descriptrices ad invicem, id est, in ratione $SQ^{\frac{n}{2}}$ ad $SP^{\frac{n}{2}}$, & (*per dem. prop.* 15.) arcus Qr, est ad arcum PQ ut SP ad SQ; Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) $Qr : QR = SP \times SQ^{\frac{n}{2}} : SQ \times SP^{\frac{n}{2}} = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} : SP^{\frac{1}{2}n - 1}$, & sumptis terminorum differentiis $Qr : Rr = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} : SQ^{\frac{1}{2}n - 1} - SP^{\frac{n}{2} - 1}$. Quia verò $SP = SQ + VQ$, ideóque (549. *lib.* 1.) $SP^{\frac{1}{2}n - 1} = SQ^{\frac{1}{2}n - 1} + \overline{\frac{1}{2}n - 1} \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n - 2}$ + &c., neglectis reliquis terminis respectu priorum evanescentibus, erit $SQ^{\frac{1}{2}n - 1} - SP^{\frac{1}{2}n - 1} = (1 - \frac{1}{2}n) \times VQ \times SQ^{\frac{1}{2}n - 2}$, atque adeò $Qr : Rr = SQ : (1 - \frac{1}{2}n) VQ$. Erat autem $PQ : Qr = SQ : SP$; undè (ex æquo) fit $PQ : Rr = SQ^2 : (1 - \frac{1}{2}n) VQ \times SP$, & hinc $Rr = \frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ \times SP \times PQ}{SQ^2} = \frac{(1 - \frac{1}{2}n) \times VQ \times PQ}{SQ}$, ob $SP = SQ$, ubi puncta Q & P coeunt.

Quoniam decrementum arcûs PQ ex resistentiâ oriundum, sivè hujus duplum Rr, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, erit resistentia ut $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$, id est, ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$. Sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP \times SP^{n+1}}$ (quia $VQ : PQ = OS : OP$ ex dem. prop. 15.) hoc est, ob datum $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) OS}{OP}$ ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$. Et propterea cùm velocitas (*ex dem.*) sit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$, si ex resistentiâ auferatur duplicata velocitatis ratio $\frac{1}{SP^n}$, manebit medii densitas in P, ut $\frac{1}{SP}$, seu reciprocè ut SP. 157.

(r) * *Resistentia est ad vim centripetam.* Nam vires illæ sunt ad invicem ut $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, sivè ut $\frac{(1 - \frac{1}{2}n) VQ \times PQ}{2SQ}$ & $\frac{PQ^2}{2SP}$, hoc est, ut $(1 - \frac{1}{2}n) VQ$ & PQ, seu $(1 - \frac{1}{2}n) OS$ & OP.

(s) * *Erit* $1 - \frac{1}{2}n = 0$. Cùm enim (*per hyp.*) sit $n + 1 = 3$; erit $n = 2$, $\frac{1}{2}n = 1$ & $1 - \frac{1}{2}n = 0$.

(t) * *In negativam mutabitur.* Tum enim $n + 1$, erit numerus ternario major, & ideò n binario major, & hinc $1 - \frac{1}{2}n$, numerus negativus.

Co-

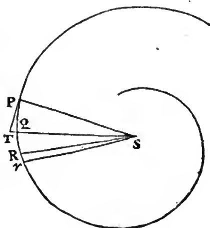
De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XVI. Theor. XIII.

Scholium.

Cæterum hæc propositio & superiores, quæ ad media inæqualiter densa spectant, intelligendæ sunt de motu corporum adeo parvorum, ut medii ex uno corporis latere major densitas quàm ex altero non consideranda veniat. Resistentiam quoque cæteris paribus densitati proportionalem esse suppono. Unde in mediis, quorum vis resistendi non est ut densitas, debet densitas eo usque augeri vel diminui, ut resistentiæ vel tollatur excessus vel defectus suppleatur.

PROPOSITIO XVII. PROBLEMA VI.

Invenire & vim centripetam & medii resistentiam, quâ corpus in datâ spirali, datâ velocitatis lege, revolvi potest.



Sit spiralis illa PQR. Ex velocitate, quâ corpus percurrit arcum quàm minimum PQ, dabitur tempus, & ex altitudine TQ, quæ est ut vis centripeta & quadratum temporis, dabitur vis. Deinde ex arearum, æqualibus temporum particulis confectarum PSQ & QSR, differentia

Coroll. 4. Medii densitas, si datur distantia SP, est ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP}$; sin distantia illa non datur ut $\frac{(1-\frac{1}{2}n)OS}{OP\times SP}$, seu ob datum numerum $1-\frac{1}{2}n$; ut $\frac{OS}{OP}$, vel $\frac{OS}{OP\times SP}$.

Coroll. 5. Quoniam (*per cor.* 1. *prop.* 15.) mutato utcumque spiralis angulo, ità ut

RSr, dabitur corporis retardatio, & ex retardatione invenietur resistentia ac (u) densitas medii.

PROPOSITIO XVIII. PROBLEMA V.

Datâ lege vis centripetæ, invenire medii densitatem in locis singulis, quâ corpus datam spiralem describet.

Ex vi centripetâ invenienda est velocitas in locis singulis, deinde ex velocitatis retardatione quærenda medii densitas; ut (x) in propositione superiore.

Methodum verò tractandi hæc problemata aperui in hujus propositione deciuâ, & lemmate secundo; & lectorem in hujusmodi perplexis disquisitionibus diutius detinere nolo. Addenda jam sunt aliqua de viribus corporum ad progrediendum, deque densitate & resistentiâ mediorum, in quibus motus hactenus expositi & his affines peraguntur.

ut etiam evanescat, & spiralis cum radio conveniat, velocitas corporis in loco quovis P ea semper est quâcum corpus in medio non resistente eâdem vi centripetâ gyrari potest in circulo ad eandem à centro distantiam S P (*per Const. 1. Cor. 7. Prop. IV. lib. 1.*) liquet (*per cor. 6. prop. 15. & 152.*) tempora descensûs à puncto dato P ad centrum usque S, fore etiam (*in hyp. prop. 16.*) ut spiralium variarum longitudines; quod observavit *Joannes Bernoullius* in Actis Eruditorum Lips. an. 1713. ubi hanc materiam eleganter tractat.

(u) * *Ac densitas medii.* Sit, exempli causâ, curva P Q R spiralis Logarithmica & velocitas in loco quovis P ut $\frac{1}{SP^{m}}$, erit tempus quo describitur arcus PQ, ut $PQ \times SP^{m}$ (12); vis autem centripeta quæ (*per cor. 4. Lem. X. lib. 1.*) est ut Lineola T Q directè & quadratum temporis inversè erit ut $\frac{TQ}{SP^{2} \times SP^{2m}}$, id est, (*per Lem. 3. hujus*) ut $\frac{1}{SP^{2m+1}}$.

Inventis tempore & velocitate, invenietur (*ut in not. ad prop. 16.*) resisten- 157
tia ut $\frac{(1-m)VQ}{SQ \times PQ \times SP^{2m}}$, sivè ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP^{2m+1}}$, & auferendo duplicatam velocitatis rationem $\frac{1}{SP^{2m}}$ erit densitas ut $\frac{(1-m)OS}{OP \times SP}$, sive ut $\frac{1}{SP}$.

(x) * *Ut in propositione superiore.* Sit vis centripeta in P ut $\frac{1}{SP^{n+1}}$ & quoniam T Q est ut vis centripeta & quadratum temporis quo describitur arcus P Q, erit $TQ \times SP^{n+1}$, id est, (*per Lem. 3.*) $PQ^{2} \times SP^{n}$ ut quadratum temporis, ideoque tempus ut $PQ \times SP^{\frac{1}{2}n}$, & corporis velocitas quâ arcum P Q illo tempore describit ut $\frac{1}{SP^{\frac{1}{2}n}}$ (11); determinatis autem tempore & velocitate, invenietur resistentia & densitas ut in notâ superiore.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. IV. Prop. XVIII. Probl. V.

PROBLEMA.

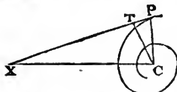
Vis centripeta tendens ad datum punctum C sit in loco quovis P ut distantiæ CP dignitas CP^n reciprocè, & medii resistentia sit ut medii densitas & velocitatis dignitas quælibet conjunctim; requiritur tum medii densitas in locis singulis quæ faciat ut corpus in datâ quâvis lineâ curvâ V P Z moveatur, tum corporis velocitas & medii resistentia in locis singulis.

158. Dicantur vis centripeta in loco P, g, resistentia r, medii densitas k, velocitas corporis v, distantia P C, y, radius P O circuli curvam osculantis in P, R, arcus V P s; perpendiculum C T in tangentem P T ductum p, & a, b, n, m, quantitates datæ, erit (*per hyp.*) $g = \frac{a}{y^n}$, & $r = \frac{kv^m}{b}$, sed est semper (27) $vv = \frac{Rpg}{y} = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$. Velocitas igitur per alterutram ex his æquationibus dabitur. Porrò (26.) $r = \frac{-vdv - gdy}{ds} = \frac{-vdv}{ds} - \frac{ady}{y^n ds}$, vel etiam (*ibid.*) $\pm r = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp} - gdy \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} = \frac{-vdv \times \sqrt{yy-pp}}{ydy} - \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}}$. Quarè si in alterutrâ harum æquationum loco vdv scribatur ipsius valor, qui reperitur capiendo fluxionem æquationis $vv = \frac{aRp}{y^{n+1}} = \frac{apdy}{y^n dp}$, obtinebitur resistentia r, seu $\frac{kv^m}{b}$, ejusque valore diviso per $\frac{v^m}{b}$ quod datum est inventâ velocitate v, dabitur medii densitas k. Q. E. I.

159. Exemplo sit spiralis Logarithmica. In illâ ob datum angulum T P C datur ratio P C ad C T seu y ad p; sit ergò $c : a = y : p$, & ideò $p = \frac{ay}{c}$; atque $dp = \frac{ady}{c}$, & erit $vv = \frac{apdy}{y^n dp} = \frac{pc}{y^n} = \frac{a}{y^{n-1}}$; Et his verò habetur $\sqrt{yy-pp} = \frac{y\sqrt{cc-aa}}{c}$, & $vdv = \frac{(1-n)ady}{2y^n}$, undè pro corporis descensu invenitur $r = \frac{(3-n)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$; & pro ascensu $r = \frac{(n-3)a\sqrt{cc-aa}}{2cy^n}$, ideoque resistentia est reciprocè ut y^n. Cùm autem) per hyp.) sit $r = \frac{kv^m}{b} = \frac{ka^{\frac{m}{2}}}{by^{\frac{mn-m}{2}}}$, erit densitas k ut $ry^{\frac{mn-m}{2}}$, seu ut $\frac{y^{\frac{mn-m}{2}}}{y^n} = y^{\frac{mn-m-2n}{2}}$, & hinc si ponatur $m = 2$; erit densitas k, ut y^{-1}, seu ut $\frac{1}{y}$, prorsus ut (*in prop.* 16.) demonstratum est.

160. *Coroll.* 1. Per superiores æquationes (158). ex datâ corporis velocitate inve-

invenitur tum vis centripeta, tum resistentia & medii densitas. Est enim $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{vvdp}{pdy}$; undè habetur vis centripeta g; datis autem vi centripetâ & celeritate, invenitur tum resistentia r, tum medii densitas k, ut supra (158).



161. Exemplum sit in spirali hyperbolicâ cujus hæc est proprietas ut si per centrum C erigatur ad radium CP, perpendicularis CX tangenti PX per P ductæ occurrens in X sit subtangens illa CX constans. Velocitas sit ut tangens PX, & resistentia r ut densitas medii & quadratum velocitatis conjunctim, hoc est $r = \frac{kv^2}{b}$, dicaturque CX, e, & ideò PX $= \sqrt{yy+ee}$, atque (*per hyp.*) $v = \frac{e\sqrt{yy+ee}}{c}$, & e, quantitas data. Erit ob triangula CPT, XPC similia, PX $(\sqrt{yy+ee})$: CX (e) = PC (y) : CT (p), & ideò $p = \frac{ey}{\sqrt{yy+ee}}$, $dp = \frac{eedy}{(yy+ee)^{\frac{3}{2}}}$, & $\sqrt{yy-pp} = \frac{yy}{\sqrt{yy+ee}}$. Quarè fiet (160) $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{e^2}{y}$; id est, vis centripeta ut distantia PC reciprocè. Quia verò $vv = \frac{ee}{cc} \times (yy+ee)$ erit $vdv = \frac{eeydy}{cc}$ & propterea pro corporis descensu $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{g\sqrt{yy-pp}}{y} = \frac{eeyy}{cc\sqrt{yy+ee}} + \frac{e^2}{\sqrt{yy+ee}} = \frac{e^2 \times yy+ee}{cc\sqrt{yy+ee}} = \frac{e^2}{c^2} \times \sqrt{yy+ee}$, adeóque resistentia ut tangens PX, seu ut velocitas. Cùm igitur sit $r = kv^2 = \frac{ke^2}{cc} \times (yy+ee) = \frac{e^2}{cc} \times \sqrt{yy+ee}$, erit densitas medii $k = \frac{1}{\sqrt{yy+ee}}$, seu reciprocè ut tangens PX sivè reciprocè ut velocitas.

162. *Coroll.* 2. Datâ medii densitate & concessis figurarum quadraturis, dabitur vis centripeta & corporis velocitas. Est enim (27. & 160.) $vdv + \frac{vvdp}{p} = -rds = \frac{kv^m ds}{b}$ (158) & dividendo per v^m, & multiplicando per p^{2-m}, fit $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = \frac{kp^{2-m}ds}{b}$, & sumptis utrinque fluentibus habetur, $\frac{1}{2-m} \times p^{2-m} \times v^{2-m} = -S.\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, ideòque $v^{2-m} = (m-2)\frac{S.kp^{2-m}ds}{b \times p^{2-m}}$. Quare si densitas medii k, sit ut functio quævis distantiæ PC à centro C, inveniri poterit fluens $S.kp^{2-m}ds$ aut algebraicè aut per figurarum quadraturas, & loco ds, scribi potest $\pm\frac{ydy}{\sqrt{yy-pp}}$ (26). Inventâ autem velocitate v, obtinetur vis centripeta g per æquationem $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{vvy}{Rp}$ (160).

163. *Corol.* 3. Si in superiori corollario sit $m = 2$, id est, resistentia ut densitas & quadratum velocitatis conjunctim, erit $2 - m = 0$, & æquatio $p^{2-m}v^{1-m}dv + v^{2-m}p^{1-m}dp = -\frac{kp^{2-m}ds}{b}$, in hanc mutabitur $\frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = -\frac{kds}{b}$; undè sumptis fluentibus, habetur $L.v + L.p = -S.\frac{kds}{b}$, & $L.v = -S.\frac{kds}{b} - L.p$;

ex quâ æquatione invenitur v, & hinc habetur g ut suprà.

164. *Cor.* 4. Sit in Hypothesi coroll. 3. densitas medii k uniformis, velocitas corporis in loco dato $v = c$, & perpendiculum p in eodem loco $= q$ datæ, erit $L.\,v = -\frac{ks}{b} L.\,p + Q$, & quia in loco V, fit $s = o$, $v = c$, $p = q$, erit $Q = L.\,c + L.\,q = L.\,cq$. Et hinc $L.\,v = L\frac{cq}{p} - \frac{ks}{p}$. Ponatur $L.\,h = 1$, ut fit $L.\,v = L.\,\frac{cq}{p} - \frac{ks}{b} \times L.\,h = L.\,\frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$. Undè deducitur $v = \frac{cq}{ph^{\frac{ks}{b}}}$, $vv = \frac{c^2q^2}{p^2h^{\frac{2ks}{b}}}$, & hinc $g = \frac{vvy}{Rp} = \frac{c^2q^2y}{Rp^3h^{\frac{2ks}{b}}}$, vel $g = \frac{vvdp}{pdy} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$.

165. *Cor.* 5. In his autem omnibus inveniri potest tempus per æquationem $dt = \frac{ds}{v}$, seu $t = S.\,\frac{ds}{v}$ (13).

166. *Cor.* 6. Datâ vi centripetâ & resistentiâ ac densitate medii, inveniri potest æquatio ad trajectoriam Z P V quam corpus projectile circà centrum virium C describit. Sit, exempli gratiâ, medium uniforme, resistentia ut quadratum velocitatis & vis centripeta $= \frac{a}{y^n}$ & (164.) erit $\frac{a}{y^n} = \frac{c^2q^2dp}{p^3h^{\frac{2ks}{b}}dy}$, ideoque $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$, & $L.\,h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{2ks}{b} = L.\,\frac{c^2q^2y^ndp}{ap^3dy}$; capiantur utrinque fluxiones, factâ dy constante, & fiet (26) $\frac{2kds}{b} \left(= \pm\frac{2kydy}{b\sqrt{yy-pp}}\right) = \frac{ndy}{y} + \frac{ddp}{dp} - \frac{3dp}{p}$ (Notum supponimus (40) quantitatis cujusvis Logarithmicæ $L.\,z$ fluxionem esse $\frac{dz}{z}$). Hinc verò habetur $\frac{2ks}{b} = L.\,y + L.\,dp - 3\,L.\,p - \frac{L.\,dy.}{Q}$, ubi $\frac{dy}{Q}$, est quantitas constans, ideoque fit $\frac{2ks}{b} = L.\,y^n + L.\frac{Qdp}{dy} - L.\,p^3 = L.\,\frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, & hinc $h^{\frac{2ks}{b}} = \frac{Qy^ndp}{p^3dy}$, æquatio ad trajectoriam.

167. *Schol.* Si curva V P Z sit sectio conica cujus umbilicus C axis major c semiaxis minor e, erit (276. lib. 1.) pro ellipsi $pp = \frac{cey}{c-y}$, pro hyperbolâ $pp = \frac{cey}{c+y}$, & pro parabolâ, si latus rectum axis dicatur $4e$, erit (per *Lem.* 14. *lib.* 1.) $pp = ey$. Undè facile est super oris problematis solutiones ad sectiones conicas transferre. Sit V P Z parabola, vis centripeta $g = \frac{a}{y^n}$, resistentia $r = \frac{kv^2}{b}$, & quæratur tum corporis velocitas tum resistentia & medii densitas in loco quovis P. Quoniam $pp = ey$, erit $2pdp = edy$, $dp = \frac{edy}{2p}$, $\frac{p}{dp} = \frac{2pp}{edy} = \frac{2y}{dy}$; undè fit (158) $vv = \frac{apdy}{y^ndp} = \frac{2a}{y^{n-1}}$; Hinc verò habetur $vdv = \frac{(1-n)ady}{y^n}$, atque ideò pro corporis descensu (158) $r = \frac{vdv\sqrt{yy-pp}}{ydy} + \frac{a\sqrt{yy-pp}}{y^{n+1}} = \frac{(2a-na)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; & pro ascensu $r = \frac{(na-2a)\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$; resistentia igitur est semper ut $\frac{PT}{PC^{n+1}}$; porrò est (per hyp.) $r = \frac{kv^2}{b} = \frac{2ak}{by^{n-1}} = (2a-na)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$, vel $= (na-2a)\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^{n+1}}$;

Quarè

SECTIO V.

De densitate & compressione fluidorum, deque hydrostaticâ. (*)

Definitio Fluidi.

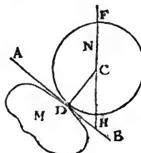
Fluidum est corpus omne, cujus partes cedunt vi cuicunque illatæ, & cedendo facilè moventur inter se.

Quarè erit medii densitas k, ut $\frac{\sqrt{yy-ey}}{y^2}$, seu ut $\frac{PT}{PC^2}$. Et simili modo in ellipsi & hyperbolâ invenitur medii densitas ut $\frac{PT}{PC^2}$. At in circulo fit $PT=0$, ideóque medii densitas & resistentia nulla. Evanescit quoque resistentia, si $n=2$, id est, si vis centripeta sit ut quadratum distantiæ reciprocè, quo casu sectiones conicæ, ut lib. 1°. demonstratum est, in medio non resistente describuntur. Si n est numerus binario minor, sectiones conicæ per descensum describi possunt; per ascensum verò si n, binario major. Tandem ubi est $n=1$, hoc est, vis centripeta distantiæ PC, reciprocè proportionalis, velocitas in parabolâ sicut & in spirali Logarithmicâ uniformis est.

(*) 168. *Hydrostatica* est scientia pressionum quas fluida vel ipsorum partes in se mutuò vel in corpora solida exercent.

169. *Fluidum homogeneum* dicitur, cujus densitas est uniformis, adeò ut nimirum æqualis materiæ quantitas sub voluminibus æqualibus ubique per totam fluidi massam contineatur, *fluidum heterogeneum* appellatur cujus densitas uniformis non est.

170. *Gravitas specifica* corporis est ratio ponderis ejusdem ad volumen; ità ut corpora ejusdem gravitatis specificæ dicantur quæ sub æqualibus voluminibus æquale pondus habent; specificè graviora vel leviora quæ sub æqualibus voluminibus majus vel minus pondus continet; Quarè cum densitas sit ratio massæ ad volumen corporis (2. *lib.* 1.) ubi pondera sunt ut massæ, gravitates specificæ sunt ut densitates. 170.



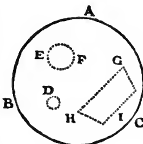
171. Lemma. *Pressiones quas corpora quævis in se mutuò exercent, fiunt juxtà directiones communi plano contingenti perpendiculares, & per punctum contingentiæ eorumdem corporum transeunt.*

Corpus N vi quâlibet secundum directionem FC urgeatur, tangaturque in D à corpore M; producatur FC ut plano AB quod utrumque corpus contingit in D occurrat in H, ductâ per D rectâ DC ad planum AB perpendiculari, vis quâ corpus N urgetur, exponatur per lineam CH, & hæc (*per leg mot. cor.* 2.) resolvi poterit in vires æquipollentes CD & DH. Sed corpus M minimè premitur vi DH secundùm directionem plani contactûs agente; quarè solâ vi CD ad planum AB normali & per punctum contactûs D transeunte premitur. Q. E. D.

PROPOSITIO XIX. THEOREMA XIV.

Fluidi homogenei & immoti, quod in vase quocunque immoto clauditur & undique comprimitur, partes omnes (sepositâ condensationis, gravitatis, & virium omnium centripetarum consideratione) æqualiter premuntur undique, & sine omni motu à pressione illâ orto permanent in locis suis.

Cas. 1. In vase sphærico *A B C* claudatur & uniformiter comprimatur fluidum undique: dico quod ejusdem pars nulla ex illâ pressione movebitur. Nam si pars aliqua *D* moveatur, necesse est ut omnes hujusmodi partes ad eandem à centro distantiam undique consistentes, simili motu simul moveantur; atque hoc ideo quia similis & æqualis est omnium



pressio, & motus omnis exclusus supponitur, nisi qui à pressione illâ oriatur. Atqui non possunt omnes ad centrum propius accedere, nisi fluidum ad centrum condensetur; contra hypothesin. Non possunt longiùs ab eo recedere, nisi fluidum ad circumferentiam condensetur; etiam contra hypothesin. Non possunt servatâ suâ à centro distantiâ moveri in plagam quamcunque, quia pari ratione movebuntur in plagam contrariam; in plagas autem contrarias non potest pars eadem, eodem tempore, moveri. Ergo fluidi pars nulla de loco suo movebitur. *Q. E. D.*

Cas. 2. Dico jam, quòd fluidi hujus partes omnes sphæricæ æqualiter premuntur undique. Sit enim *E F* pars sphærica fluidi, & si hæc undique non premitur æqualiter, augeatur pressio minor, usque dum ipsa undique prematur æqualiter; & partes ejus, per casum primum, premanebunt in locis suis. Sed ante auctam pressionem permanebant in locis suis, per casum eundem primum, & additione pressionis novæ movebuntur de locis suis,

per

per definitionem fluidi. Quæ duo repugnant. Ergo falsò dicebatur quòd sphæra $E\ F$ non undique premebatur æqualiter. *Q. E. D.*

Cas. 3. Dico præterea quòd diversarum partium sphæricarum æqualis sit pressio. Nam partes sphæricæ contiguæ se mutuo premunt æqualiter in puncto contactus, per motûs legem III. Sed &, per casum secundum, undique premuntur eâdem vi. Partes igitur duæ quævis sphæricæ non contiguæ, ([a]) quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque, prementur eâdem vi. *Q. E. D.*

Cas. 4. Dico jam quòd fluidi partes omnes ubique premuntur æqualiter. Nam partes duæ quævis tangi possunt à partibus sphæricis in punctis quibuscunque, & ibi partes illas sphæricas æqualiter premunt, per casum 3. & vicissim ab illis æqualiter premuntur, per motûs legem tertiam. *Q. E. D.*

Cas. 5. Cùm igitur fluidi pars quælibet $G H I$ in fluido reliquo tanquam in vase claudatur, & undique prematur æqualiter, partes autem ejus se mutuò æqualiter premant & quiescant inter se; manifestum est quòd fluidi cujuscunque $G H I$, quod undique premitur æqualiter, partes omnes se mutuò premunt æqualiter, & quiescunt inter se. *Q. E. D.*

Cas. 6. Igitur si fluidum illud in vase non rigido claudatur, & undique non prematur æqualiter; cedet idem pressioni fortiori, per definitionem fluiditatis.

Cas. 7. Ideoque in vase rigido fluidum non sustinebit pressionem fortiorem ex uno latere quàm ex alio, sed eidem cedet, idque in momento temporis, quia latus vasis rigidum non persequitur liquorem cedentem. Cedendo autem urgebit latus oppositum, & sic pressio undique ad æqualitatem verget. Et quoniam fluidum, quàm primum à parte magis pressâ recedere conatur, inhibetur per resistentiam vasis ad latus oppositum; redu-

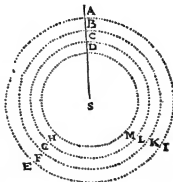
(a) * *Quia pars sphærica intermedia tangere potest utramque.* Nam pars illa intermedia duas alias partes sphæricas in punctis contactûs premet; atque ab illis premetur æqualiter, (*ex dem.*) 171.

reducetur pressio undique ad æqualitatem, in momento temporis, sine motu locali: & subinde partes fluidi, per casum quintum, se mutuò prement æqualiter, & quiescent inter se. *Q. E. D.*

Corol. Unde nec motus partium fluidi inter se, per pressionem fluido ubivis in externâ superficie illatam, mutari possunt, nisi quâtenus aut figura superficiei alicubi mutatur, aut omnes fluidi partes intensiùs vel remissiùs sese premendo difficiliùs vel faciliùs labuntur inter se.

PROPOSITIO XX. THEOREMA XV.

Si (b) *fluidi sphærici, & in æqualibus à centro distantiis homogenei, fundo sphærico concentrico incumbentis partes singulæ versus centrum totius gravitent; sustinet fundum pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis.*



Sit *D H M* superficies fundi, & *A E I* superficies superior fluidi. Superficiebus sphæricis innumeris *B F K*, *C G L* distinguatur fluidum in orbes concentricos æqualiter crassos; & concipe vim gravitatis agere solummodo in superficiem superiorem orbis cujusque, & æquales esse actiones in æquales partes superficierum omnium. Premitur ergo superficies suprema *A E* vi simplici gravitatis propriæ, quâ & omnes

(b) 172. *Si fluidi sphærici &c.* Fluidi quiescentis superficies ad gravitatis directionem perpendicularis est ubique, & ideo si vis gravitatis ad centrum unum dirigatur, sphærica est. Si enim superficiei fluidi pars aliqua ad gravitatis directionem inclinata sit, resolvatur vis gravitatis in duas vires quarum una directionem habeat superficiei fluidi perpendicularem, altera parallelam; & (*ex definitione*) fluidum secundùm hanc directionem movebitur, contra hyp. Erit igitur pars quolibet

nes orbis supremi partes & superficies secunda *BFK* (*per prop.* XIX.) pro (c) mensurâ suâ æqualiter premuntur. Premitur præterea superficies secunda *BFK* vi propriæ gravitatis, quæ addita vi priori facit pressionem duplam. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, id est, pressione triplâ urgetur superficies tertia *CGL*. Et similiter pressione quadruplâ urgetur superficies quarta, quintuplâ quinta, & sic deinceps. Pressio igitur quâ superficies unaquæque urgetur, non est ut quantitas solida fluidi incumbentis, sed ut numerus orbium ad usque summitatem fluidi; & æquatur gravitati orbis infimi multiplicatæ per numerum orbium: hoc est, gravitati solidi cujus ultima ratio ad cylindrum præfinitum (si modo orbium augeatur numerus & minuatur crassitudo in infinitum, sic ut actio gravitatis à superficie infimâ ad supremam continua reddatur) fiet ratio æqualitatis. Sustinet ergo superficies infima pondus cylindri præfiniti. *Q. E. D.* (d) Et simili argumentatione patet propositio, ubi gravitas decrescit in ratione quâvis assignatâ distantiæ à centro, ut & ubi fluidum sursum rarius est, deorsum densius. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur fundum non urgetur à toto fluidi incumbentis pondere, sed eam solummodo ponderis partem sustinet quæ in propositione describitur; pondere reliquo à fluidi figurâ fornicatâ sustentato.

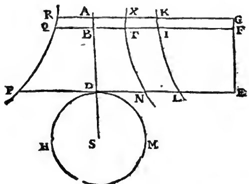
Co-

libet superficiei ad gravitatis directionem perpendicularis: & quoniam nulla est alia superficies, præter sphæricam, quæ hanc habeat proprietatem, ut lineæ omnes ipsi perpendiculares ad centrum unum concurrant, superficies illa fluidi sphærica erit. Q. E. D.

(c) * *Pro mensurâ suâ æqualiter premuntur.* Singulæ, nimirum, superficiei secundæ partes, semotâ partium illarum propriâ gravitate, æque premuntur ac partes æquales superficiei supremæ; quod per Prop. XIX. manifestum fit, si spatium, quod illas superficies continet, tanquam vas aliquod consideretur quod fluidum æqualiter undique compressum complectitur.

(d) * *Et simili argumentatione &c.* 172
Patet ut in superiori demonstratione, quod pondus partium omnium æqualium D, C, B, A in totâ rectâ DA existentium sustineatur à parte D correspondente fundi sphærici DHM. Hoc igitur fundum sustinet pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi, & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis DA; modò tamen in locis à fundo sphærico DHM & à basi planâ cylindri æquidistantibus, eadem servetur fluidi densitas, eademque vis gravitatis quæ in basim cylindri perpendiculariter tendat ubique.

Corol. 2. In æqualibus autem à centro diſtantiis eadem ſemper eſt preſſionis quantitas, ſive (e) ſuperficies preſſa ſit horizonti



173. Deſignet D A G E prædictum cylindrum, cujus baſis D E æqualis ſit fundo ſphærico D H M. Per punctum D, & per puncta B & A infinitè propinqua ductæ ſint rectæ D E, B F & A G perpendiculares ad A S; in illis perpendicularibus capiantur D L, B I, A K denſitatibus fluidi & D N, B T, A X viribus gravitatis acceleratricibus in locis D, B, A proportionales, ſintque curvæ L I K & N T X loca punctorum L, I, K, & N, T, X. Producatur K A in R, ut ſit ſemper A R rectangulo A X × A K proportionalis, & R Q P curva quam punctum R perpetuo tangit: & preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M erit ut fundum D H M & area D A R P conjunctim. Nam preſſio fluidi cylindrulo B A G F contenti in baſim D E eſt ut quantitas materiæ in vim gravitatis ſingularum particularum ducta (*per definit. VIII. lib.* 1.). Quantitas materiæ cylindro B A G F contenta eſt ut cylindrus B A G F & denſitas conjunctim (2. *lib.* 1.), id eſt, ut baſis cylindri D E & rectangulum A B × A K. Quare preſſio fluidi cylindro B A G F contenti eſt ut baſis D E & ſolidum A B × A K × A X, ſeu ut baſis D E & rectangulum A B × A R conjunctim. Dividatur tota fluidi altitudo D A in partes innumeras ut A B, & erit preſſio fluidi totius in baſim cylindri D E vel in fundum ſphæricum D H M, ut baſis D E vel fundum D H M & area D A R P conjunctim. Q. E. D.

Si vis acceleratrix gravitatis conſtans ſit, curva X T N in rectam lineam mutabitur axi A D parallelam, eritque proinde preſſio fluidi in fundum D H M, ut fundum hoc & area D A K L conjunctim; in hâc enim hypotheſi, ob datam A K, area D A R P proportionalis eſt areæ D A K L.

Si vis gravitatis & denſitas fluidi conſtantes ſint, curvæ X T N, K I L & R Q P in rectas lineas axi A D parallelas migrant; & ideo preſſio fluidi in fundum ſphæricum D H M, vel in baſim cylindri D E, eſt ut fundum illud D H M, vel baſis D E, & altitudo fluidi A D conjunctim. Si verò conferantur liquores in ſe homogenei, ſed diverſæ inter ſe denſitatis, preſſiones erunt in ratione compoſitâ baſium, altitudinum & denſitatum, modò gravitas acceleratrix conſtans, ſit in utroque liquore æqualis; nam ſi inæqualis eſſet, preſſiones forent in ratione compoſitâ baſium, altitudinum, denſitatum & virium gravitatis.

(e) * *Sive ſuperficies preſſa ſit horizonti &c.* * Sumatur quævis particula inter duos orbes concentricos B F K, C G L, illa

zonti parallela vel perpendicularis vel obliqua; sive (f) fluidum, à superficie pressâ sursum continuatum, surgat perpendiculariter secundum lineam rectam, vel serpit obliquè per tortas cavitates & canales, easque regulares vel maximè irregulares, amplas vel angustissimas. Hisce circumstantiis pressionem nil mutari colligitur, applicando demonstrationem theorematis hujus ad casus singulos fluidorum.

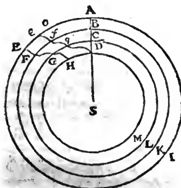
Corol. 3. Eâdem demonstratione colligetur etiam (*per prop.* XIX.) quod fluidi gravis partes nullum, ex pressione ponderis incumbentis, acquirunt motum inter se; si modò excludatur motus qui ex condensatione oriatur.

Corol. 4. Et propterea si aliud ejusdem gravitatis specificæ cor-

illa particula per casum 5. Prop. XIX. undique æqualiter premitur, ergo per motûs Leg. III. undique æqualiter premit, substituatur itaque loco particulæ cujusvis hanc contingentis superficies quævis, sive horizontalis, sive perpendicularis, sive obliqua, æqualis erit in eam pressionis quantitas: *Ergo in æqualibus à centro distantiis &c.*

(f) * *Sive fluidum à superficie pressâ &c.* Si fluidum vale utilibet irregulari E F G H d g f e contineatur, vasis fundum H d sustinebit pondus cylindri, cujus basis æqualis est superficiei fundi H d, & altitudo D A eadem quæ fluidi in vase contenti. Iisdem enim positis, quæ in demonstratione propositionis hujus, premitur superficies suprema E e vi simplici gravitatis propriæ, quâ & superficies secunda F f pro mensura sua æqualiter premitur. Premitur præterea superficies secunda F f vi propriâ gravitatis, quæ addenda est vi priori. Hâc pressione, pro mensurâ suâ, & insuper vi propriæ gravitatis, urgetur superficies tertia G g; & sic deinceps. Quare patet, ut supra, pressionem quam superficies infima H d subit, æqualem esse ponderi cylindri cujus est altitudo D A & basis fundo H d æqualis.

Manente igitur tum basi H d, tum fluidi altitudine perpendiculari D A, manet fluidi in basim pressio, utcumque mutetur vasis fluidum continentis figura. Atque hinc in vasis communicantibus æqui-



librium est, ubi perpendiculares fluidi altitudines supra fundum commune in utroque vase æquantur, dummodo in paribus à centro virium gravitatis S distantiis tam fluidi densitas quàm vis gravitatis servetur eadem. Nam si, manente vi gravitatis acceleratrice, conferantur fluida in se homogenea, sed diversæ inter se densitatis, erit in vasis communicantibus æquilibrium, ubi fluidorum in utroque vase altitudines perpendiculares erunt in ratione densitatum reciprocâ, quia in eo casu fluidorum in basim communem pressiones æquales sunt (173).

173.

corpus, quod sit condensationis expers, submergatur in hoc fluido, id ex pressione ponderis incumbentis nullum acquiret motum: non descendet, non ascendet, non cogetur figuram suam mutare. Si sphæricum est, manebit sphæricum, non obstante pressione; si quadratum est, manebit quadratum: idque sive molle sit, sive fluidissimum; sive fluido liberè innatet, sive fundo incumbat. Habet enim fluidi pars quælibet interna rationem corporis submersi, & par est ratio omnium ejusdem magnitudinis, figuræ & gravitatis specificæ submersorum corporum. Si corpus submersum servato pondere liquesceret & indueret formam fluidi; hoc, si prius ascenderet, vel descenderet, vel ex pressione figuram novam indueret, etiam nunc ascenderet, vel descenderet, vel figuram novam induere cogeretur: id adeo quia gravitas ejus cæteræque motuum causæ permanent. Atqui (*per cas. 5. prop.* XIX.) jam quiesceret & figuram retineret. Ergo & prius.

Corol. 5. Proinde corpus quod specificè gravius est quàm fluidum sibi contiguum, subsidebit, & quod specificè levius est ascendet, motumque & figuræ mutationem consequetur, quantum excessus ille vel defectus gravitatis efficere possit. Namque excessus ille vel defectus rationem habet impulsus, quo corpus, aliàs in æquilibrio cum fluidi partibus constitutum, urgetur; & comparari potest cum excessu vel defectu ponderis in lance alterutrâ libræ.

Corol. 6. Corporum igitur in fluidis constitutorum duplex est gravitas, altera vera & absoluta, altera apparens, vulgaris & comparativa. Gravitas absoluta est vis tota quâ corpus deorsum tendit: relativa & vulgaris est excessus gravitatis quo corpus magis tendit deorsum quam fluidum ambiens. Prioris generis gravitate partes fluidorum & corporum omnium gravitant in locis suis: ideoque conjunctis ponderibus componunt pondus totius. Nam totum omne grave est, ut in vasis liquorum plenis experiri licet; & pondus totius æquale est ponderibus omnium partium, ideoque ex iisdem componitur. Alterius generis gravitate corpora non gravitant in locis suis, id est, inter se collata non prægravant, sed mutuos ad descendendum conatus impedientia permanent in locis suis, perinde ac si gravia

non

non essent. Quæ in aëre sunt & non prægravant, vulgus gravia non judicat. Quæ prægravant vulgus gravia judicat, quâtenus aëris pondere non sustinentur. Pondera vulgi nihil aliud sunt quàm excessus verorum ponderum supra pondus aëris. Unde & vulgò dicuntur levia, quæ sunt minus gravia, aërique prægravanti cedendo superiora petunt. Comparativè levia sunt, non verè, quia descendunt in vacuo. Sic & in aquâ corpora, quæ ob majorem vel minorem gravitatem descendunt vel ascendunt, sunt comparativè & apparenter gravia vel levia, & eorum gravitas vel levitas comparativa & apparens est excessus vel defectus quo vera eorum gravitas vel superat gravitatem aquæ, vel ab eâ superatur. Quæ verò nec prægravando descendunt, nec prægravanti cedendo ascendunt, etiamsi veris suis ponderibus adaugeant pondus totius, comparativè tamen & in sensu vulgi non gravitant in aquâ. Nam similis est horum casuum demonstratio.

Corol. 7. Quæ de gravitate demonstrantur, obtinent in aliis quibuscunque viribus centripetis.

Corol. 8. Proinde si medium, in quo corpus aliquod movetur, urgeatur vel à gravitate propriâ, vel ab aliâ quâcunque vi centripetâ, & corpus ab eâdem vi urgeatur fortius; differentia virium est vis illa motrix, quam in præcedentibus propositionibus ut vim centripetam consideravimus. Sin corpus à vi illâ urgeatur levius, differentia virium pro vi centrifugâ haberi debet.

Corol. 9. Cùm autem fluida premendo corpora inclusa non mutent eorum figuras externas, patet insuper (*per corollarium prop.* XIX.) quod non mutabunt situm partium internarum inter se: proindeque, si animalia immergantur, & sensatio omnis a motu partium oriatur; nec lædent corpora immersa, nec sensationem ullam excitabunt, nisi quâtenus hæc corpora à compressione condensari possunt. Et par est ratio cujuscunque corporum systematis fluido comprimente circundati. Systematis partes omnes iisdem agitabuntur motibus, ac si in vacuo constituerentur, ac solam retinerent gravitatem suam comparativam, nisi quâtenus fluidum vel motibus earum nonnihil resistat, vel ad easdem compressione conglutinandas requiratur.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

PROPOSITIO XXI. THEOREMA XVI.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à vi centripetâ distantiis suis à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, si distantiæ illæ sumantur continuè proportionales, densitates fluidi in iisdem distantiis erunt etiam continuè proportionales.

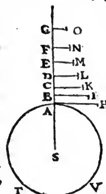
Designet ATV fundum sphæricum cui fluidum incumbit, S centrum, SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. distantias continuè proportionales. Erigantur perpendicula AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. quæ sint ut densitates medii in locis A, B, C, D, E, F; & (g) specificæ gravitates in iisdem locis erunt ut $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$, &c. vel, (h) quod perinde est, ut $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Finge primùm has gravitates uniformiter continuari ab A ad B, à B ad C, à C ad D, &c. factis per gradus decrementis in punctis B, C, D, &c. (i) Et hæ gra-

(g) 174. *Et specificæ gravitates &c.* Fluidi enim cujus singulæ particulæ vi gravitatis urgentur gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Est enim gravitas specifica ut pondus directè & volumen inversè (170); Sed pondus (*per defin. VIII. lib. 1.*) est ut quantitas materiæ & vis gravitatis acceleratrix conjunctim; quantitas verò materiæ (*2. lib. 1.*) est ut densitas & volumen conjunctim. Quare, conjunctis his rationibus, gravitas specifica est ut densitas & vis gravitatis acceleratrix conjunctim. Q. E. D.

(h) * *Vel, quod perinde est, ut &c.* Cùm enim (*per hyp.*) distantiæ SA, SB, SC, SD &c. sint continuè proportionales, earum differentiæ AB, BC, CD &c. ipsis proportionales erunt.

(i) * *Et hæ gravitates ductæ &c.* Nam si pondus quod fundum sphæricum ATV sustinet, exponatur per cylindrum cujus basis æqualis sit superficiei ATV & altitudo eadem quæ fluidi incumbentis, volumen fluidi cylindrici pro altitudine AB erit $ATV \times AB$, ideoque ob datam superficiem ATV, erit volumen illud ut AB, multiplicetur illud per gravitatem specificam & factum erit ut pondus seu pressio; quare cùm (*ex demonst.*) gravitas specifica sit ut $\frac{AH}{AB}$, pressio flui-di

gravitates ductæ in altitudines *AB*, *EC*, *CD*, &c. conficient pressiones *AH*, *BI*, *CK*, &c. quibus fundum *ATV* (juxta theorema xv.) urgetur. Sustinet ergo particula *A* pressiones omnes *AH*, *BI*, *CK*, *DL*, (k) pergendo in infinitum; & particula *B* pressiones omnes præter primam *AH*; & particula *C* omnes præter duas primas *AH*, *BI*; & sic deinceps: ideoque particulæ primæ *A* densitas *AH*, est ad particulæ secundæ *B* densitatem *BI* ut summa omnium $AH + BI + CK + DL$, in infinitum, ad summam omnium $BI + CK + DL$, &c. Et *BI* densitas secundæ *B* est ad *CK* densitatem tertiæ *C*, ut summa omnium $BI + CK + DL$, &c. ad summam omnium $CK + DL$, &c. Sunt igitur summæ illæ differentiis suis *AH*, *BI*, *CK*, &c. proportionales, atque ideo continuè proportionales (*per hujus lem.* 1.) proindeque differentiæ *AH*, *BI*, *CK*, &c. summis proportionales, sunt etiam continuè proportionales. Quare cùm densitates in locis *A*, *B*, *C*, &c. sint ut *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt etiam hæ continuè proportionales. Pergatur per saltum, & ex æquo in distantiis *SA*, *SC*, *SE* continuè proportionalibus, erunt densitates *AH*, *CK*, *EM* continuè proportionales. Et eodem argumento, in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO* erunt continuè proportionales. Coeant jam puncta *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, &c. eo ut progressio gravitatum specificarum à fundo *A* ad summitatem fluidi continua reddatur, & in distantiis quibusvis continuè proportionalibus *SA*, *SD*, *SG*, densitates *AH*, *DL*, *GO*, semper existentes continuè proportionales, manebunt etiamnum continuè proportionales. *Q. E. D.*



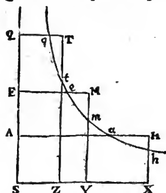
Co-

di cylindrici, cujus est altitudo AB, erit ut AH, & ita de cæteris.

(k) 175. * *Pergendo in infinitum.* Quoniam enim (*per hyp.*) densitas compressioni proportionalis est, ubi compressio nulla evadit, evanescit quoque densitas, seu, fluidum fit infinitè rarum, ac proinde in infinitum expanditur; cùm ratio voluminis ad materiæ quantitatem infinita evadat (2. *lib.* 1.), 175.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXI. THEOR. XVI.

Corol. Hinc si detur densitas fluidi in duobus locis, putà *A* & *E*, colligi potest ejus densitas in alio quovis loco *Q*. Centro *S*, asymptotis rectangulis *S Q*, *S X* describatur hyperbola secans perpendicula *A H*, *E M*, *Q T* in *a*, *e*, *q*, ut & perpendicula *H X*, *M Y*, *T Z*, ad asymptoton *S X* demissa, in *h*, *m* & *t*. Fiat area *Y m t Z* ad aream datam *Y m h X* ut area data *E e q Q* ad aream datam *E e a A*; & linea *Z t* producta abscindet lineam *Q T* densitati proportionalem. Namque si lineæ *S A*, *S E*, *S Q* sunt continuè proportionales, (l) erunt areæ *E e q Q*, *E e a A* æquales, & inde areæ his proportionales *Y m t Z*, *X h m Y* etiam æquales, & lineæ *SX*, *SY*, *SZ*, id est, *AH*, *EM*, *Q T* (m) continuè proportionales, ut oportet. Et si lineæ *S A*, *S E*, *S Q* obtinent alium quemvis ordinem in serie continuè proportionalium, lineæ *A H*, *E M*, *Q T*, ob proportionales areas hyperbolicas, (n) obtinebunt eundem ordinem in aliâ serie quantitatum continuè proportionalium.



PRO-

(l) * *Erunt areæ E e q Q, E e a A æquales*, per not. 379. lib. 1.

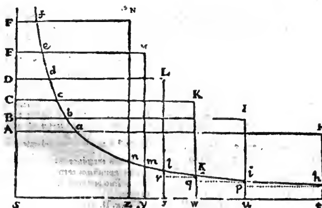
(m) * *Continuè proportionales*,) 379. lib. 1.)

(n) * *Obtinebunt eundem ordinem &c.* * Etenim areæ Hyperbolicæ E e a A, Q q a A sunt Logarithmi linearum S E, S Q, & pariter areæ V m t Z, X h t Z sunt Logarithmi linearum S Y, S X, (379, 389, *lib.* 1.) sed cùm areæ Y m t Z, X h t Z sint per constructionem proportionales areis E e a A, Q q a A, illæ areæ Y m t Z; X h t Z per Doctrinam Logarithmorum (n. 38) poterunt esse Logarithmi linearum S E, S Q; cùm ergo eædem quantitates possint esse Logarithmi tam quantitatum S E, S Q, quàm quantitatum S Y, S X, oportet ut istæ quantitates S E, S Y & S Q, S X correspondentia loca occupent in Progressionibus Geometricis ad quas pertinent.

PROPOSITIO XXII. THEOREMA XVII.

Sit fluidi cujusdam densitas compressioni proportionalis, & partes ejus à gravitate quadratis distantiarum suarum à centro reciprocè proportionali deorsum trahantur: dico quod, (o) si distantiæ sumantur in progressione musicâ, densitates fluidi in his distantiis erunt in progressione geometricâ.

Designet *S* centrum, & *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula *AH*, *BI*,



CK, &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis *A*, *B*, *C*, *D*, *E*,

(o) * *Quòd si distantiæ sumantur in progressione musicâ*, aut, quod idem est, si tales sumantur distantiæ ut earum reciprocæ sint in progressione arithmeticâ.

* Scilicet tres quantitates dicuntur esse in continuâ proportione Musicâ sive Harmonicâ, si prima sit ad tertiam ut differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ. Et si sit series plurium quantitatum talium ut terminus quivis sit ad subsequentem, ut differentia prioris à termino intermedio, ad differentiam hujus intermedii à posteriore termino, ea series dicitur *Progressio Musica*.

Cor. 1. *In progressione Musicâ factum duorum priorum terminorum est ad factum duorum quorumvis immediatè sibi succedentium ut differentia inter duos primos terminos ad differentiam inter hos ultimos.* Nam sunto termini progressionis Musicæ *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* &c. & differentiæ inter singulos *M*, *N*, *P*, *Q*, *R* &c. erit per definitionem hujus progressionis 175.

E, &c. & ipsius gravitates (p) specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SAq}$, $\frac{BI}{SBq}$, $\frac{CK}{SCq}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari, primam ab A ad B, secundam à B ad C, tertiam à C ad

$$A:C = M:N$$
$$B:D = N:P$$
$$C:E = P:Q$$

$D:F = Q:R$, unde ex compositione rationum patet quod est

$$A \times B : E \times F = M : R.$$

Cor. 2. *Differentia inter duos primos terminos est ad differentiam inter duos quosvis alios, ut secundus terminus, toties mulctatus differentiâ sua à primo quot sunt termini inter primum & ultimum, ad eum ultimum.*

Nam (iisdem litteris adhibitis quæ in superiore Corollario) cùm ex naturâ progr. sit $A:C = M:N$, sitque $A = B - M$; est $B - M:C = M:N$, ergo in hoc casu, differentia M inter duos primos terminos A & B est ad differentiam N inter B & C ut secundus terminus B semel mulctatus differentiâ suâ à primo, cùm sit unicus terminus inter primum A & ultimum C, ad eum ultimum C.

Cùm ergo sit $B - M:C = M:N$, vicissim $B - M: M = C:N$, & dividendo $B - 2M : M = C - N : N$; cùmque sit $C - N = B$, est $B - 2M : M = B : N$, sed, per defin. progress. est $B : N = D : P$ ergo $B - 2M : M = D : P$ & vicissim $B - 2M : D = M : P$, sunt verò duo termini inter A & D, unde rursus in hoc casu constat Corollarii veritas.

Item cùm sit $B - 2M : D = M : P$ & vicissim $B - 2M : M = D : P$, erit dividendo $B - 3M : M = D - P : P$, cùmque sit $D - P = C$ erit $B - 3M : M = C : P$ cùmque per defin. progr. sit $C : P = E : Q$ erit $B - 3M : M = E : Q$ & vicissim $B - 3M : E = M : Q$, sunt verò inter A & E tres termini: Cùmque eadem recurrat semper demonstratio si numerus terminorum progressionis inter primum & ultimum sit n; si secundus terminus dicatur B, differentia à primo M, ultimus terminus sit F, differentiâ à præcedente R erit, $M : R = B - nM : F$. Q. E. Dem.

Cor. 3. *In Progressione Musicâ secundus terminus toties mulctatus suâ differentiâ à primo quot sunt termini inter eum & ultimum est ad ultimum ut factum duorum primorum terminorum progressionis ad factum duorum postremorum.*

Liquet utique ex collatione duorum præcedentium Corollariorum; unde est semper, $B - nM : F = A \times B : E \times F$.

Theor. I. *Quilibet terminus progressionis Musicæ est æqualis facto duorum primorum terminorum diviso per secundum terminum toties mulctatum differentiâ suâ à primo quot sunt termini à primo ad eum ultimum terminum.*

Primus terminus est $\frac{A \times B}{B}$, secundus terminus $\frac{A \times B}{A}$ sed $A = B - M$ ergo 2us. terminus est $\frac{A \times B}{B - M}$. Pro reliquis terminis habetur semper per *Coroll.* 3. $B - nM : F = A \times B : E \times F$ divisis ergo Consequentibus per F, erit $B - nM : 1 = A \times B : E$ unde est $E = \frac{A \times B}{B - nM}$ sed cum n designaret numerum terminorum inter A & F hic exprimit numerum terminorum a primo ad E hoc ultimo annumerato, unde patet Theor. veritas.

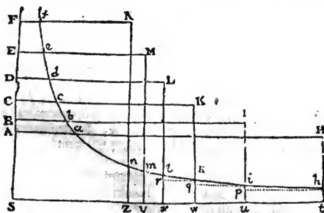
Theor. II. *Termini omnes progressionis Musicæ sunt inter se sicut quantitates quarum reciprocæ constituunt progressionem Arithmeticam.*

Nam per Theor. prius termini A; B. C. D. E &c. prog. Musicæ sunt $\frac{A \times B}{B}$, $\frac{A \times B}{B - M}$ $\frac{A \times B}{B - 2M}$, $\frac{A \times B}{B - 3M}$, &c. $\frac{A \times B}{B - nM}$. $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B - M}$ $\frac{1}{B - 2M}$, $\frac{1}{B - 3M}$ $\frac{B}{B - 2M}$. Sed hæ sunt reciprocæ quantitatum B, $B - M$, $B - 2M$, $B - 3M$, $B - nM$ quæ sunt in progressione arithmeticâ; Ergo &c.

Scholium. Progressio musica potest esse decrescens & omnia ut prius procedent, mutatis signis negativis in positiva.

(p) * *Gravitates specificæ in iisdem locis erunt &c.* (174).

C ad D &c. Et hæ ductæ in altitudines AB, BC, CD, DE, &c. vel, quod perinde est, in distantias SA, SB, SC, &c. altitudinibus illis proportionales, (q) conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum $AH - BI$, $BI - CK$, &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Centro S, asymptotis SA, Sx describatur



hyperbola quævis, quæ secet perpendicula AH, BI, CK; &c. in a, b, c, &c. ut & perpendicula ad asymptoton Sx demissa Ht, Iu, Kw in h, i, k, & densitatum differentiæ tu, uw, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. Et rectangula $tu \times th$, $uw \times ui$, &c. seu tp, uq, &c. ut $\frac{AH \times th}{SA}$, $\frac{BI \times ui}{SB}$, &c. id est;

(q) * *Conficient exponentes pressionum*, &c. Quod patet ut in demonstratione prop. XXI, seu quantitates pressionibus proportionales, 175;

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVII.

est, ut Aa, Bb, &c. Est enim, (r) ex naturâ hyperbolæ, SA ad AH ad St, ut th ad Aa, ideoque $\frac{AH \times th}{SA}$ æquale Aa. Et simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB}$ æquale Bb, &c. (s) Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. proportionales; ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula tp, uq, &c. ut & summis differentiarum $Aa - Cc$ vel $Aa - Dd$ summæ rectangulorum $tp + uq$ vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, & summa omnium differentiarum, puta $Aa - Ff$, erit summæ omnium rectangulorum, puta $zthn$, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & (t) rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa - Ff$. (u) Sumantur jam distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF, in progressione musicâ, & differentiæ $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ $thlx$, $xlnz$ æquales erunt inter se, & densitates St, Sx, Sz, id est, AH, DL, FN, (x) continuè proportionales. *Q. E. D.*

Corol. Hinc si dentur fluidi densitates duæ quævis, puta AH & BI, dabitur area $thiu$, harum differentiæ tu respondens; & inde invenietur densitas FN, in altitudine quâcunque SF, sumendo aream $thnz$ ad aream illam datam $thiu$ ut est differentia $Aa - Ff$ (y) ad differentiam $Aa - Bb$.

Scho-

(r) * *Ex natura hyperbolæ*, per theor. 4. de hyperbola.

(s) *Sunt autem Aa, Bb, Cc, &c. continuè proportionales.* Nam (*per hyp.*) SA, SB, SC sunt continuè proportionales, & (*per theor. 4. de hyp*) Aa, Bb, Cc sunt reciprocè ut SA, SB, SC, ideoque etiam continuè proportionales.

(t) * *Et rectangula evadent æqualia areæ hyperbolicæ $zthn$*, per Lemma III. lib. 1.

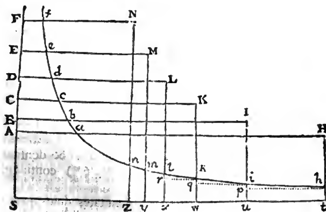
(u) * *Sumantur jam* distantiæ quælibet, puta SA, SD, SF in progressione musicâ, & earum reciprocæ Aa, Dd, Ff erunt in progressione arithmetica, ideoque differentiæ Aa — Dd, Dd — Ff æquales.

(x) * *Continuè proportionales.* (379 lib. 1.)

(y) 176. * *Ad differentiam $Aa - Bb$.* Quoniam verò area thiu est ad aream thnz

Scholium.

(z) Simili argumentatione probari potest, quod si gravitas particularum fluidi diminuatur in triplicatâ ratione distantiarum à centro, & quadratorum distantiarum SA, SB, SC, &c. reciproca (nempe $\frac{SA\ cub.}{SAq}$, $\frac{SA\ cub.}{SBq}$, $\frac{SA\ cub.}{SCq}$) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates AH, BI, CK, &c. erunt



in progressione geometricâ. Et si gravitas diminuatur in quadruplicatâ ratione distantiarum, & cuborum distantiarum reciproca (puta $\frac{SAqq}{SA\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SB\ cub.}$, $\frac{SAqq}{SC\ cub.}$, &c.) sumantur in

t h n z ut Logarithmus lineæ S t vel A H ad Logarithmum lineæ S z seu F N (379 & 380 *lib.* 1.), densitas F N per tabulas logarithmorum inveniri poterit. Et vice versâ, datâ densitate F N invenietur altitudo S F: nam per prop. superiorem dabitur A a — F f, & inde dabitur F f, unde invenietur $FS = \frac{SA \times Aa}{Ff}$ (*per theor.* 4. *de hyp.*) Quia verò fluidi elasticitas, cæteris paribus, vi comprimenti, ideoque densitati (*per hyp.*) proportionalis est, patet per hoc corollarium ex datis altitudinibus inveniri posse elasticitates, & vice versâ. 176.

(z) 177. * *Simili argumentatione probari potest &c.* Sit vis centripeta particularum fluidi reciprocè ut distantiæ di-

 gni-

in progressione arithmeticâ; densitates *AH*, *BI*, *CK*, &c. erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Rursus

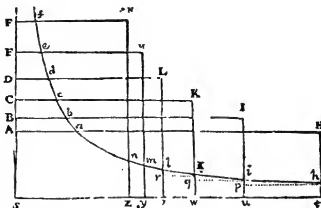
gnitas, cujus index est *n*; designet S centrum, & S A, S B, S C, S D, S F distantias in progressione geometricâ. Erigantur perpendicula A H, B I, C K &c. quæ sint ut fluidi densitates in locis A, B, C, D, E &c. Et ipsius gravitates specificæ in iisdem locis erunt $\frac{AH}{SA^n}$, $\frac{BI}{SB^n}$, $\frac{CK}{SC^n}$, &c. Finge has gravitates uniformiter continuari primam ab A ad B, secundam a B ad C, tertiam a C ad D, &c. Et hæ ductæ in altitudines A B, B C, C D, D E &c. vel quod perinde est, in distantias S A, S B, S C, &c. altitudinibus illis proportionales, conficient exponentes pressionum $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. Quare cùm densitates sint ut harum pressionum summæ, differentiæ densitatum A H — B I, B I — C K; &c. erunt ut summarum differentiæ $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, $\frac{CK}{SC^{n-1}}$, &c. fiat eadem constructio, quæ supra in prop. XXII, & densitatum differentiæ t v, u w, &c. erunt ut $\frac{AH}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI}{SB^{n-1}}$, &c. & rectangula $tv \times th$, $uw \times ui$, &c., seu t p, u q &c. ut $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$, $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$, &c. id est, ut Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, &c. Est enim (*per theor. 4. de hyp.*) $AH \times th$ æquale $SA \times Aa$, & A a reciprocè ut S A, seu directè ut $\frac{1}{SA}$, ideoque $\frac{AH \times th}{SA^{n-1}}$ ut $SA \times Aa \times Aa^{n-1}$, sive ut Aa^{n-1} cum sit $SA \times Aa = 1$, & simili argumento est $\frac{BI \times ui}{SB^{n-1}}$ ut Bb^{n-1}, &c. sunt autem A a, B b, C c, &c. ideoque Aa^{n-1}, Bb^{n-1}, Cc^{n-1} &c. continuè proportionales, & propterea differentiis suis $Aa^{n-1} - Bb^{n-1}$, $Bb^{n-1} - Cc^{n-1}$, &c. proportionales, ideoque differentiis hisce proportionalia sunt rectangula t p, u q, &c. ut & summis differentiarum $Aa^{n-1} - Cc^{n-1}$, vel $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$ summæ rectangulorum $tp + uq$, vel $tp + uq + wr$. Sunto ejusmodi termini quàm plurimi, & summa omnium differentiarum; puta $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$, erit summæ omnium rectangulorum, puta z t h n, proportionalis. Augeatur numerus terminorum & minuantur distantiæ punctorum A, B, C, &c. in infinitum, & rectangula illa evadent æqualia areæ hyperbolicæ z t h n, ideoque huic areæ proportionalis est differentia $Aa^{n-1} - Ff^{n-1}$.

Sumantur jam distantiarum quarumlibet, puta S A, S D, S F dignitates SA^{n-1}, SC^{n-1}, SF^{n-1} in progressione musicâ, ideoque earum reciprocæ $\frac{1}{SA^{n-1}}$, $\frac{1}{SD^{n-1}}$, $\frac{1}{SF^{n-1}}$, seu Aa^{n-1}, Dd^{n-1}, Ff^{n-1} in progressione arithmeticâ, & differentiæ $Aa^{n-1} - Dd^{n-1}$, $Dd^{n-1} - Ff^{n-1}$ erunt æquales; & propterea differentiis hisce proportionales areæ t h l x, x l n z æquales erunt inter se, & densitates S t, S x, S z, id est, A H, D L, F N continuè proportionales. Quare si gravitas particularum fluidi diminuatur in ratione quâcumque multiplicatâ distantiarum, cujus exponens sit n, & dignitatum SA^{n-1}, SB^{n-1}, SC^{n-1}, &c. reciproca (nempe $\frac{SA^n}{SA^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}}$, $\frac{SA^n}{SC^{n-1}}$, &c. in quibus S A data est) sumantur in progressione arithmeticâ; densitates A H, B I, C K, &c. erunt in progressione geometricâ.

Si itaque loco n scribantur numeri 3, 4, 5, 6 &c. in infinitum; & rursus scribantur 0, — 1, — 2, — 3 &c. in infinitum, patet veritas scholii in hypothesi densitatis vi comprimenti proportionalis. Quando autem $n = 0$, seu quando gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem est, est $\frac{SA^n}{SA^{n-1}} = SA$, $\frac{SA^n}{SB^{n-1}} = SB$;

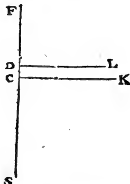
fus si gravitas particularum fluidi in omnibus distantiis eadem sit, & distantiæ sint in progressione arithmeticâ densitates erunt in progressione geometricâ, uti Vir Cl. *Edmundus Halleius* invenit. Si gravitas sit ut distantia, & quadrata distantiarum sint in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ. Et sic in infinitum. Hæc ita se habent ubi fluidi compressione condensati densitas est ut vis compressionis, vel, quod perinde est, spatium à fluido occupatum reciprocè ut hæc vis. Fingi possunt aliæ condensationis leges, ut quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu triplica-

ta



S B, ideoque si distantiæ sumantur in progressione arithmeticâ, densitates erunt in progressione geometricâ, ideoque distantiæ sunt ut densitatum logarithmi, quia crescentibus distantiis in progressione arithmeticâ, decrescunt densitates in progressione geometricâ. Quia verò *per experimenta constat, quod densitas aëris*, cæteris paribus ac potissimum manente eodem caloris gradu, *sit ut vis comprimens vel accuratè vel saltem quam proximè* in aëre quem experimentis possumus subjicere, vis autem aërem inferiorem comprimens, cæteris etiam paribus, æqualis sit ponderi aëris totius incumbentis, ideoque proportionalis altitudini mercurii in barometro; 177 & præterea particularum aëris gravitas, in minoribus saltem à telluris superficie distantiis, constans censeri possit, patet; quod, cæteris paribus, aëris densitatem, ad hujusmodi distantias minores, metiri possimus per logarithmos. Sed de his plura videre est in Elementis Aërometriæ Clar. *Wolfii*, in libro 2°. *Phoronomiæ*, & in sectione 10ª. *Hydrodynamicæ* Clar. *Danielis Bernoulli*.

ta ratio vis eadem cum quadruplicatâ ratione densitatis. Quo in casu, si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ à centro, densitas erit reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quòd cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, & si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, densitas erit reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quòd vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis, & gravitas reciprocè in ratione duplicatâ distantiæ, & densitas erit reciprocè ut distantia. (a) Casus omnes percurrere longum esset. Cæterùm per experimenta constat quòd densitas aëris sit ut vis comprimens vel accuratè, vel saltem quàm proximè: & propterea densitas aëris in atmosphærâ terræ est ut pondus aëris totius incumbentis, id est, ut altitudo mercurii in barometro.



(a) 178. * *Casus omnes percurrere longum esset*; Satius erit generalem formulam tradere, ex quâ singuli casus pro lubitu eruantur. Iisdem igitur, quæ supra, positis, sit distantia variabilis $SC = x$, altitudo $CD = dx$, densitas $CK = y$, vis tota comprimens in loco $C = v$, vis gravitatis ibidem $= g$; & erit gravitas specifica in eodem loco ut gy (174), & hæc ducta in altitudinem evanescentem CD seu dx conficient momentum pressionis $gydx = -dv$. Sumitur autem fluxio dv negativè, quod crescente distantia x, pondus incumbens v decrescat.

Sit gravitas g ut $\frac{1}{x^m}$, densitas y ut vis comprimentis dignitas v^n, ideoque $y^{\frac{1}{n}}$ ut v, & sumptis fluxionibus $\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ ut dv. Loco g & dv substituantur hi valores in æquatione $gydx = -dv$, & fiet $\frac{ydx}{x^m} = -\frac{1}{n} y^{\frac{1-n}{n}} dy$ seu $-\frac{dx}{x^m} = \frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy$. His verò æquationibus non æqualitates, sed proportiones tantum exprimimus, & ideo coefficientes datas negligimus.

Si in ultimâ æquatione ponatur $n = 1$, id est, densitas vi comprimenti proportionalis, erit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^m}$. Sumantur quantitates $\frac{1}{x^{m-1}}$ in progressione arithmeticâ; & earum fluxiones, seu differentiæ nascentes $-\frac{(m-1)dx}{x^m}$, ideoque & $\frac{-dx}{x^m}$ constantes erunt, & propterea quantitates $\frac{dy}{y}$ etiam datæ; ac proinde densitates y suis differentiis dy proportionales, erunt con-

continuè proportionales, (*per lem. II. lib. II.*). Si in eadem hypothesi ponatur $m = 1$, fit $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$; unde si capiantur quantitates $\frac{dx}{x}$ constantes, seu distantiæ x in progressione geometricâ, erunt etiam quantitates $\frac{dy}{y}$ constantes, & ideo densitates y in progressione geometricâ. Prorsus ut in prop. XXII, XXI. & initio scholii hujus demonstratum est. Sumptis fluentibus, æquatio $\frac{1}{n} y^{\frac{1-2n}{n}} dy = -\frac{dx}{x^m}$ in hanc abit $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m} + Q$. *const.* in quâ non potest esse $m = 1$, nec $n = 1$, neque $n = 0$, ut patet. Ut autem determinetur valor constantis Q, primum definienda est altitudo S F, ubi densitas y evanescit. Nam si altitudo illa finita est & dicatur $= a$, positâ $y = 0$, habebitur $Q = \frac{-1}{m-1} a^{1-m}$, & hinc $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1} = \frac{a^{1-m} - x^{1-m}}{m-1}$, in qua æquatione debet esse $\frac{1-n}{n}$ numerus positivus, seu n numerus positivus unitate minor, ut crescentibus distantiis x, decrescant densitates y, & contra. Si altitudo S F ad quam densitas y evanescit, infinita supponatur, erit constans $Q = 0$, ac proinde æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$. Nam si in æquatione $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{x^{1-m} - a^{1-m}}{m-1}$, ponatur y nulla & x infinita, quantitas constans a erit infinita, contra hypothesim.

Jam vero si gravitas est reciprocè ut quadratum distantiæ, id est si $m = 2$, æquatio $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{m-1} x^{1-m}$ in hanc migrat $\frac{1}{1-n} y^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{x}$, unde est y ut $x^{\frac{1}{1-n}}$ reciprocè. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-quadratum densitatis, seu y^4 ut v^3, ideoque y ut $v^{\frac{3}{4}}$, & hinc $n = \frac{3}{4}$; & erit $x^{\frac{1}{1-n}} = x^4$, ac proinde densitas y ut x^3 reciprocè, seu densitas, reciprocè ut cubus distantiæ. Fingatur quod cubus vis comprimentis sit ut quadrato-cubus densitatis, hoc est, y^5 ut v^3, adeoque y ut $v^{\frac{3}{5}}$, & hinc $n = \frac{3}{5}$; & erit y ut $x^{\frac{3}{2}}$ reciprocè, id est, densitas reciprocè in sesquiplicatâ ratione distantiæ. Fingatur quod vis comprimens sit in duplicatâ ratione densitatis; seu y ut $v^{\frac{1}{2}}$; & hinc erit $n = \frac{1}{2}$, ac proinde y ut x reciprocè, sive densitas est reciprocè ut distantia. Quæ Newtonus in scholio dixerat. Vide monumenta Academiæ Regiæ scientiarum anni 1716, ubi hanc materiam tractat Varignonius, quem hic sumus sequuti.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. V. PROP. XXII. THEOR. XVI.

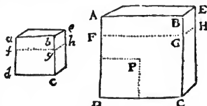
178.

De Motu Corporum. Liber Secundus. Sect. V. Prop. XXIII. Theor. XVIII.

PROPOSITIO XXIII. THEOREMA XVIII.

Si fluidi ex particulis se mutuo fugientibus compositi densitas sit ut compressio, vires centrifugæ particularum sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum. Et vice versâ, particulæ viribus quæ sunt reciprocè proportionales distantiis centrorum suorum se mutuo fugientes componunt fluidum elasticum, cujus densitas est compressioni proportionalis.

Includi intelligatur fluidum in spatio cubico *A C E*, dein compressione redigi in spatium cubicum minus *a c e*; & particularum, similem situm inter se in utroque spatio obtinentium, (b) distantiæ erunt ut cuborum latera *A B*, *a b*; & (c) mediorum densitates reciprocè ut spatia continentia *A B cub.* & *a b cub.* In cubi majoris latere plano *A B C D* capiatur quadratum *D P* æquale lateri plano cubi minoris *d b*; & ex hypothesi, pressio, quâ quadratum *D P* urget fluidum inclusum, erit ad pressionem, quâ illud quadratum *d b* urget fluidum inclusum, ut medii densitates



ad invicem, hoc est, ut *a b cub.* ad *A B cub.* Sed pressio, quâ quadratum *D B* urget fluidum inclusum, est ad pressionem, quâ quadratum *D P* urget idem fluidum, ut quadratum *D B* ad quadratum *D P*, hoc est, ut *A B quad.* ad *a b quad.* Ergo, ex æquo, pressio quâ quadratum *D B* urget fluidum, est ad pressionem quâ quadratum *d b* urget fluidum, ut *a b* ad *A B*. Planis *F G H*, *f g h*, per media cuborum ductis, distinguatur fluidum in duas partes, & hæ (d) se mutuo prement iisdem viri-

(b) * *Distantiæ erunt ut cuborum latera A B, a b*, per lemma V. lib. I.

(c) * *Et mediorum densitates, ut &c.* ob datam in utroque spatio fluidi massam (2. lib. 1.).

(d) * *Et hæ se mutuo prement iisdem viribus &c.* Pressiones enim in unoquoque spatio sunt ubique æquales; nam cùm fluidum uniforme supponatur, si pressio minor esset in uno loco quàm in alio, sta-

viribus, quibus premuntur à planis *AC*, *a c*, hoc est, in proportione *a b* ad *A B*: ideoque vires centrifugæ, quibus hæ pressiones sustinentur, sunt in eâdem ratione. Ob eundem particularum numerum similemque situm in utroque cubo, vires quas particulæ omnes secundum plana *F G H*, *f g h* exercent in omnes, sunt ut vires quas singulæ exercent in singulas. Ergo vires, quas singulæ exercent in singulas secundum planum *F G H* in cubo majore, sunt ad vires, quas singulæ exercent, in singulas secundum planum *f g h* in cubo minore, ut *a b* ad *A B*, hoc est, reciprocè ut distantiæ particularum ad invicem. *Q. E. D.*

Et vice versâ, si vires particularum singularum sunt reciprocè ut distantiæ, id est, reciprocè ut cuborum latera *A B*, *a b*; summæ virium erunt in eâdem ratione, & pressiones laterum *D B*, *d b* ut summæ virium; & pressio quadrati *D P* ad pressionem lateris *D B* ut *a b quad.* ad *A B quad.* Et, ex æquo, pressio quadrati *D P* ad pressionem lateris *d b* ut *a b cub.* ad *A B cub.* id est, vis compressionis ad vim compressionis ut densitas ad densitatem. *Q. E. D.*

Scholium.

(e) Simili argumento, si particularum vires centrifugæ sint reciprocè in duplicatâ ratione distantiarum inter centra, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato-quadrata densitatum. Si

statim cederet fluidum magis pressum, atque ita pressio ad æqualitatem restitueretur, ut in casu 6°. prop. XIX.

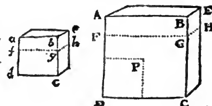
(e) * *Simili argumento &c.* Sunto D^n & d^n particularum distantiæ in spatiis cubicis A C E & a c e quæ sunt ut A B & a b, earumdem vires centrifugæ ut D^n & d^n reciprocè, fluidi densitates *E* & *e*, & vires comprimentes erunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$.

Nam cùm summæ virium quas omnes simul particulæ exercent in latera D B, d b, sint ut singularum particularum vires erunt illæ summæ virium ut D^n & d^n reciprocè, seu ut ab^n & AB^n directè; & pressio quadrati D P ad pressionem quadrati D B ut ab^2 ad AB^2; unde ex æquo pressio quadrati D P ad pressionem quadrati d b, hoc est, vis comprimens in spatio A C E ad vim comprimentem in spatio a c e, ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Sunt autem densitates, sive est *E* ad *e*, ut ab^3 ad AB^3, & 178.

Si vires centrifugæ sint reciprocè in triplicatâ vel quadruplicatâ ratione distantiarum, cubi virium comprimentium erunt ut quadrato cubi vel cubo-cubi densitatum. Et universaliter, si D ponatur pro distantiâ, & E pro densitate fluidi compressi, & vires centrifugæ sint reciprocè ut distantiæ dignitas quælibet D^n, cujus index est numerus n; vires comprimentes erunt ut latera cubica dignitatis E^{n+2}, cujus index est numerus $n + 2$: & contra. Intelligenda vero sunt hæc omnia de particularum viribus centrifugis quæ terminantur in particulis proximis, aut non longè ultra diffunduntur. Exemplum habemus in corporibus magneticis. Horum virtus attractiva terminatur ferè in sui generis corporibus sibi proximis. Magnetis virtus per interpositam laminam ferri contrahitur, & in laminâ ferè terminatur. Nam corpora ulteriora non tam à magnete quam à laminâ trahuntur. Ad eundem modum si particulæ fugant alias suis generis particulas sibi proximas, in particulas autem remotiores virtutem nullam exerceant, ex hujusmodi particulis componentur fluida de quibus actum est in hâc propositione. Quod si particulæ cujusque virtus in infinitum propagetur, (f) opus erit vi majori ad æqualem condensationem majoris

ideo $E^{\frac{n+2}{3}}$ ad $e^{\frac{n+2}{3}}$ ut ab^{n+2} ad AB^{n+2}. Quare vires comprimentes sunt ut $E^{\frac{n+2}{3}}$ & $e^{\frac{n+2}{3}}$. Q. E. D.

Et vice versâ, si vires comprimentes sunt ut densitatum dignitates $E^{\frac{n+2}{3}}$, $e^{\frac{n+2}{3}}$, seu ut ab^{n+2}, AB^{n+2}; erit pressio quadrati DP ad pressionem quadrati db in eâdem ratione, & pressio quadrati DB est ad pressionem quadrati DP, ut AB^2 ad ab^2; &, ex æquo, pressio quadrati DB ad pressionem quadrati db, ut ab^n ad AB^n, seu ut d^n ad D^n. Sunt autem vires particularum singularum ut summæ virium, hoc est, ut pressiones laterum DB, db; quare vires particularum centrifugæ sunt reciprocè ut distantiarum dignitates D^n, d^n. Q. E. D.



Jam si loco n scribantur numeri 2; 3; &c., patet veritas eorum quæ initio scholii dixit Newtonus.

(f) * *Opus erit vi majori &c.* Non enim solum vincenda erit per compressionem vis centrifuga particularum proximarum, sed & remotiorum vis erit superanda quæ (ex hyp.) in infinitum propagatur.

joris quantitatis fluidi. An vero fluida elaſtica ex particulis ſe mutuo fugantibus conſtent, quæſtio phyſica eſt. Nos proprietatem fluidorum ex ejuſmodi particulis conſtantium mathematicè demonſtravimus, ut philoſophis anſam præbeamus quæſtionem illam tractandi.

SECTIO VI.

De motu & reſiſtentiâ corporum funependulorum.

(g) PROPOSITIO XXIV. THEOREMA XVIII.

Quantitates materiæ in corporibus funependulis, quorum centra oſcillationum à centro ſuſpenſionis æqualiter diſtant, ſunt in ratione compoſitâ ex ratione ponderum & ratione duplicatâ temporum oſcillationum in vacuo.

Nam velocitas, quam data vis in datâ materiâ, dato tempore generare poteſt, eſt ut vis & tempus directè, & materia inversè. Quo major eſt vis vel majus tempus vel minor materia, eo major generabitur velocitas. Id quod per motus legem

(g) * *Propoſitio XXIV.* In hâc propoſitione & ejus corollariis ſupponitur corpora funependula, quæ comparantur, in cycloidibus aut ſaltem in exiguis magni circuli arcubus oſcillari. * Pondera autem corporum hic duplici de causâ à materiâ ipſorum diſtinguuntur; primo, quod nondum aſſumi poſſit gravitatem agere ſecundum rationem maſſarum; cum id ipſum ex iſto Theoremate poſtea deducatur, cor. 7. ; & ſecundo, in diverſis locis gravitas diverſa eſſe poteſt (ut quidem ex experimentis conſtat) ideoque corporum duorum in diverſis iis locis ſpectatorum ratio materiæ eadem manebit, non verò ratio ponderum. 278.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIV. Theor. XIX.

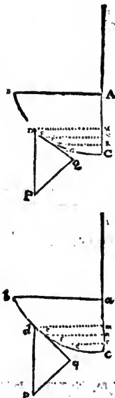
gem secundam manifestum est. (h) Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut pondera: ideoque si corpora duo oscillando describant arcus æquales, & arcus illi dividantur in partes æquales; cùm (i) tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes correspondentes sint ut tempora oscillatio-

(h) *Jam verò si pendula ejusdem sint longitudinis, vires motrices in locis à perpendiculo æqualiter distantibus sunt ut Pondera.*

* Nam si Pendula ejusdem sint longitudinis, Cycloides plane similes & æquales describent: In unaquâque autem Cycloide, vires quibus corpora in locis quibusvis D, vel d accelerantur, sunt ad totum singuli corporis pondus in locis altissimis, ut arcus Cycloidis inter loca proposita D, d & puncta infima C, c, ad totas semi-Cycloides (Cor. Prop. LII. Lib. 1.) Ergo si semicycloides sint æquales & loca D & d à perpendiculo æqualiter distent, arcus D C & d c erunt æquales, ideoque vis quâ corpus acceleratur in primâ Cycloide in puncto D, erit ad totum ejus corporis pondus, ut vis quâ corpus acceleratur in alterâ Cycloide in puncto d, ad totum ejus corporis pondus. Unde vicissim, vis quâ acceleratur primum corpus in puncto D, est ad vim quâ alterum acceleratur in puncto d, ut totum prioris corporis pondus, ad pondus alterius corporis, ideoque *si pendula sint ejusdem longitudinis vires motrices &c.* Q. E. D.

(i) *Cum tempora quibus corpora describant singulas arcuum partes* (æquales) *correspondentes sint ut tempora oscillationum totarum.*

* Sint arcus D C, d c æquales, secenturque in partes æquales infinitè parvas D E, E F &c.; d e, e f &c., ex punctis D, E, F & d, e, f, ducantur perpendiculares ad axem, D M, E N, F R; D m, e n, f r; liquet lineolas M N & m n, M R & m r ex hypothesi fore æquales; Ex naturâ autem gravitatis, velocitas acquisita in E erit ad velocitatem acquisitam in F ut Radix altitudinis M N ad Radicem M R, & pariter velocitas acquisita in e, erit ad velocitatem acquisitam in f ut $\sqrt{m n}$ ad $\sqrt{m r}$, cum ergo $\sqrt{MN} = \sqrt{m n}$ & $\sqrt{MR} = \sqrt{m r}$ velocitas acquisita in E est ad velocitatem acquisitam in F, ut velocitas acquisita in e est ad velocitatem acquisitam in f, & vicis-



lationum totarum, (†) erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè: ideoque quantitates materiæ ut vires & oscillationum tempora directè & velocitates reciprocè. (§) Sed velocitates reciprocè sunt ut tempora, atque ideo tempora directè & velocitates reciprocè sunt ut quadrata temporum, & propterea quantitates materiæ sunt ut vires motrices & quadrata temporum, id est, ut pondera & quadrata temporum. (††) *Q. E. D.*

Co-

vicissim velocitas acquisita in E, est ad velocitatem acquisitam in e; ut velocitas acquisita in F est ad velocitatem acquisitam in f. Sed quoniam arcus E F & e f F G & f g sunt infinite parvi & æquales, uniformiter describi censendi sunt, & tempora quibus describuntur erunt in ratione reciprocâ velocitatum, ideoque tempus quo describitur E F est ad tempus quo describitur e f, ut velocitas in e ad velocitatem in E, & tempus quo describitur F G est ad tempus quo describitur f g, ut velocitas in f ad velocitatem in F &c. sed rationes velocitatum in E & e, in F & f &c. sunt semper æquales inter se, ergo & rationes temporum quæ illarum sunt inversæ sunt æquales inter se; ergo tempora quibus singulæ partes arcus D C describuntur, sunt ad tempora quibus correspondentes partes arcus d c describuntur, in eâdem ratione, ergo omnes antecedentes & omnes consequentes summando, omnia simul tempora quibus percurruntur omnes partes arcus D C, hoc est, totum tempus oscillationis per D C, est ad omnia tempora quibus partes arcus d c percurruntur, hoc est ad totum tempus oscillationis per d c ut tempus unum quo quædam pars arcus D C percurritur, est ad tempus quo pars correspondens arcus d c percurritur. Q. E. D.

(†) *Erunt velocitates ad invicem in correspondentibus oscillationum partibus, ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ reciprocè.* * Ex demonstratione notæ superioris liquet velocitates in correspondentibus partibus esse omnes in eâdem ratione, ideo-
que ut velocitas acquisita in E ad veloci- 178.
tatem acquisitam in e, sed cùm arcus D E & d c infinitè parvi supponantur, censendum est, vires motrices uniformiter agere, dum illi arcus percurruntur; motus ergo per eas productus crescet tam pro ratione virium ipsarum quàm pro ratione temporis quo arcus illi describuntur sive (ex demonstratis) pro ratione temporum oscillationum integrarum, motus verò ex Def. 2. lib. 1. æstimatur à Newtono ex velocitate & materiâ conjunctim, ergo velocitates productæ in *correspondentibus oscillationum partibus erunt ut vires motrices & tota oscillationum tempora directè & quantitates materiæ inversè.*

(§) *Sed velocitates sunt reciprocè ut tempora.* * Ex demonstratis (ad notam superiorem i) liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e ut velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c; Ex eâdem demonstratione liquet velocitatem acquisitam in E esse ad velocitatem acquisitam in e, in ratione reciprocâ temporum quibus describuntur arcus E F, & e f; hæc verò tempora esse ut tempora oscillationum integrarum, unde velocitas acquisita in puncto quovis arcus D C, est ad velocitatem acquisitam in puncto correspondenti arcus d c, in ratione reciprocâ temporum oscillationum totarum. Q. E. D.

(††) *Quod Erat Demonstrandum.* * In demonstratione probatum est quod si describantur arcus æquales D C, d c quantitates materiæ sunt ut pondera & qua-

dra-

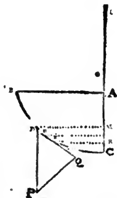
Corol. 1. Ideoque si tempora sunt æqualia, quantitates materiæ in singulis corporibus erunt ut pondera.

Corol. 2. Si pondera sunt æqualia, quantitates materiæ erunt ut quadrata temporum.

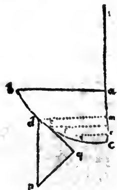
Corol. 3. Si quantitates materiæ æquantur, pondera erunt reciprocè ut quadrata temporum.

Corol. 4. Unde (k) cum quadrara temporum, cæteris paribus, sint ut longitudines pendulorum; si & tempora & quantita-

drata temporum, sumatur jam arcus b c major vel minor arcu d c sed quantitates materiæ & pondera utrinque maneant eadem quæ prius, & pariter ob Isochroneitatem curvæ b d c, tempus oscillationis per b c, æquale erit tempori oscillationis per d c, ideoque quicumque sint arcus descripti si modo maneat penduli longitudo, eademque sit utrinque cyclois, pariter verum erit quod quantitates materiæ sunt ut pondera & quadrata temporum oscillationum.



(k) *Unde cum quadrata temporum cæteris paribus sint ut longitudines pendulorum.* * Fingatur L C, l c inæqualia esse, & arcus D C, d c non sumi æquales ut prius, sed similes, sive proportionales longitudinibus L C, l c, secetur D C in partes æquales inter se, & d c in partes similes, ita ut sit D E ad d e ut L C ad l c ductisque perpendiculis D M, E N, d m, e n &c. liquet ex similitudine figurarum altitudines M N & m n, M R & m r &c. esse etiam inter se in ratione L C ad l c, velocitates verò quibus describuntur arcus E F, F G sunt ut $\sqrt{MN}$ ad $\sqrt{MR}$, & velocitates quibus describuntur arcus e f, f g sunt ut $\sqrt{mn}$ ad $\sqrt{mr}$, sed quia M N & m n, M R & m r, sunt in eâdem ratione ideoque & earum radices, vicissim, velocitas quâ describitur E F est ad velocitatem quâ describitur e f, ut velocitas quâ describitur F G ad velocitatem quâ describitur f g; & sic ordine perpetuo demonstrabitur velocitates quibus successivæ partes correspondentes utriusque curvæ percurruntur fore semper in eâdem ratione; tempora verò quibus arcus similes describuntur sunt directè ut illi arcus & inversè ut velocitates; ergo cum ratio



titates materiæ æqualia sunt, (l) pondera erunt ut longitudines pendulorum.

Corol. 5. Et (m) universaliter, quantitas materiæ pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè, & longitudo penduli inversè.

Corol. 6. Sed & in medio non resistente quantitas materiæ pendulæ est ut pondus comparativum & quadratum temporis directè & longitudo penduli inversè. Nam pondus comparativum est vis motrix corporis in medio quovis gravi, ut (n) supra explicui; ideoque idem præstat in tali medio non resistente atque pondus absolutum in vacuo. *Co-*

tio arcuum correspondentium sit semper eadem, nempe ratio L C ad l c, ut & ratio velocitatum quibus percurruntur illi arcus, singula tempuscula quibus describuntur particulæ arcus D C eamdem rationem habebunt ad tempuscula quibus correspondentes particulæ arcus d c percurruntur; ideoque tempora tota oscillationum per D C & d c erunt directè ut longitudines L C & l c, & inversè ut velocitates in punctis quibusvis correspondentibus arcuum D C & d c, putà in punctis infimis C & c, sed quia ex hypothesi quod pondera sunt æqualia & quod quantitates materiæ sunt æquales, velocitates sunt proportionales Radicibus quadratis altitudinum, velocitates in punctis C & c erunt ut $\sqrt{MC}$ ad $\sqrt{mc}$: sed ex similitudine curvarum & arcuum est m c ad M C sicut l c ad L C, ergo velocitates in punctis C & c sunt ut $\sqrt{LC}$ ad $\sqrt{lc}$, ideoque tempora oscillationum integrarum in arcubus D C, d c erunt ut $\frac{LC}{\sqrt{LC}}$ ad $\frac{lc}{\sqrt{lc}}$, unde quadrata temporum erunt ut $\frac{LC^2}{LC}$ ad $\frac{lc^2}{lc}$ sive ut L C ad l c, hoc est ut longitudines pendulorum. Q. E. D.

(l) * *Pondera erunt ut longitudines pendulorum, & universaliter quantitas materiæ Pendulæ est ut pondus & quadratum temporis directè & longitudo Penduli inversè.* * Sint duo pendula A & B, quæ materià, pondere & oscillationum temporibus discrepent, seu æqualis sint longitudinis; ex Theoremate, erit quantitas materiæ pendulæ in A ad quantitatem materiæ pendulæ in B, ut pondus & quadratum temporis oscillationum penduli A conjunctim ad pondus & quadratum temporis oscillationum penduli B conjunctim; sit tertium pendulum C, cujus materia & pondus eadem sint cum materià & pondere penduli B, diversa verò sit utriusque longitudo, longitudo penduli C erit ad longitudinem penduli B (sive penduli A, perinde enim est ex hypothesi (ut quadratum temporis in Pendulo C ad quadratum temporis in pendulo B, quod itaque æquale erit quadrato temporis in pendulo C, per longitudinem penduli multiplicato & per longitudinem penduli C diviso; Unde quantitas materiæ in A erit ad quantitatem materiæ in B sive in C, ut pondus & quadratum temporis in A conjunctim ad pondus in B, sive in C, cum quadrato temporis in C & longitudine penduli A directè & longitudine penduli C inversè: unde liquet quantitatem materiæ in A esse ad quantitatem materiæ in C, ut pondus & quadratum temporis in pendulo A directè & ejus longitudo inversè ad pondus & quadratum temporis penduli C directè & ejus longitudinem inversè. Q. E. D. *universaliter.* 178.

Unde si & tempora & quantitates materiæ eadem sunt, pondera sunt ut longitudines pendulorum directè.

(m) * *Et universaliter.* Vide Notam superiorem.

(n) * *Ut supra explicui*, in cor. VI. & VIII. prop. XX.

Corol. 7. Et (o) hinc liquet ratio tum comparandi corpora inter se, quoad quantitatem materiæ in singulis; tum comparandi pondera ejusdem corporis in diversis locis, (p) ad cognoscendam variationem gravitatis. Factis autem experimentis quam accuratissimis inveni semper quantitatem materiæ in corporibus singulis eorum ponderi proportionalem esse.

PROPOSITIO XXV. THEOREMA XX.

Corpora funependula quibus, in medio quovis, resistitur in ratione momentorum temporis, & corpora funependula quæ in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente moventur, oscillationes in cycloide eodem tempore peragunt, & arcuum partes proportionales simul describunt.

Sit AB cycloidis arcus, quem corpus D tempore quovis in medio non resistente oscillando describit. Bisecetur idem in C, ita ut C sit infimum ejus punctum; & erit vis acceleratrix quâ corpus urgetur in loco quovis D vel d vel E ut (q) longitudo

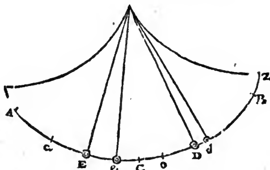
(o) * *Et hinc liquet ratio &c.* Nam ex datis pendulorum longitudinibus, oscillationum temporibus, & ponderibus corporum, datur ratio quantitatum materiæ in illis corporibus (*per cor. V.*); & contra.

(p) * *Ad cognoscendam variationem gravitatis.* Ubi enim ejusdem penduli oscillationes tardiores sunt, gravitatis actio, cæteris paribus, minor est, cum in eodem pendulo pondera sint reciprocè ut quadrata temporum (*per cor.* III.). Sed de his plura ad prop. XX. lib. III. dicentur. Quanta autem in illis experimentis adhibenda sit diligentia, Clariss. D. *de Mairan* eâ quâ solet perspicuitate & elegantiâ exponit in monumentis Acad. Reg. Scient. an. 1735.

179. Quia numeri oscillationum æqualibus temporibus à diversis pendulis absolvendarum sunt reciprocè ut tempora quibus singulæ oscillationes fiunt (473. *lib.* I.), numeri oscillationum æqualibus temporibus peractarum erunt (*per cor.* V. *prop. hujus*) in compositâ ratione ex ratione subduplicata directa ponderum & subduplicatis rationibus inversis massarum & longitudinum pendulorum; sive, quoniam pondus est ut factum ex massâ in vim gravitatis acceleratricem, erunt prædicti oscillationum numeri in ratione subduplicata directa virium gravitatis acceleratricium & ratione subduplicatâ longitudinum pendulorum inversâ; ac proinde pendulorum inæqualium, sed eâdem vi gravitatis agitatorum, numeri oscillationum eodem tempore absolvendarum sunt in reciprocâ subduplicatâ ratione longitudinum pendulorum, & numeri oscillationum in duobus pendulis æqualibus erunt in subduplicatâ ratione virium gravitatis. Hæc est regula quam ad comparandas corporum gravitates tradit *Joh. Bernoulli* in Actis Erudit. Lipf. an. 1713.

(q) *Ut longitudo arcus &c.* Per demonstr. Prop. LI. & cor. II. Prop. LII. Lib. I.

do arcus CD vel Cd vel CE. Exponatur vis illa per eundem arcum; & cum resistentia sit ut momentum temporis, ideoque detur, exponatur eadem per datam arcus cycloidis partem CO, & sumatur arcus Od in ratione ad arcum CD quam habet arcus OB ad arcum CB: & vis quâ corpus in d urgetur in medio resistente, cum sit excessus vis Cd supra resistentiam CO, exponetur per arcum Od, ideoque erit ad vim, quâ corpus D urgetur in medio non resistente in loco D, ut arcus Od ad arcum CD; & propterea etiam in loco B ut ar-



cus OB ad arcum CB. Proinde si corpora duo, D, d exeant de loco B, & his viribus urgeantur: cum vires sub initio sint ut arcus CB & OB; (r) erunt velocitates primæ & arcus primo descripti in eâdem ratione. Sunto arcus illi BD, & Bd, arcus reliqui CD, Od erunt in eâdem ratione. Proinde vires, ipsis CD, Od proportionales manebunt in eâdem ratione ac sub initio, & propterea corpora pergent arcus in eâdem ratione simul describere. Igitur vires & velocitates & arcus reliqui CD, Od semper erunt ut arcus toti CB, OB,

&

(r) * *Erunt velocitates primæ &c.* Nam, dato temporis momento, velocitates genitæ sunt ut vires (13. *lib.* 1.) & ut spatia descripta (*per cor.* 4. *lem.* X. *lib.* 1.) 179.

& propterea arcus illi reliqui (f) ſimul deſcribentur. Quare corpora duo D, d ſimul pervenient ad loca C & O, alterum quidem in medio non reſiſtente ad locum C, & alterum in medio reſiſtente ad locum O. Cum autem velocitates in C & O ſint ut arcus CB, OB; erunt arcus, quos corpora ulterius pergendo ſimul deſcribunt, in (t) eâdem ratione. Sunto illi CE & Oe. Vis quâ corpus D in medio non reſiſtente retardatur in E eſt ut CE, & vis quâ corpus d in medio reſiſtente retardatur in e eſt ut ſumma vis Ce & reſiſtentiæ CO, id eſt ut Oe; ideoque vires, quibus corpora retardantur, ſunt ut arcubus CE, Oe proportionales arcus CB, OB; proindeque velocitates, in datâ illâ ratione retardatæ, manent in eâdem illâ datâ ratione. Velocitates igitur & arcus iiſdem deſcripti ſemper ſunt ad invicem in datâ illâ ratione arcuum CB & OB; & (u) propterea ſi ſumantur arcus toti AB, aB in eâdem ratione, corpora D, d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Iſochronæ ſunt igitur oſcillationes totæ, & arcubus totis BA, Ba proportionales ſunt arcuum partes quælibet BD, Bd vel BE, Be quæ ſimul deſcribuntur. *Q. E. D.*

Corol. Igitur motus velociſſimus in medio reſiſtente non incidit in punctum infimum C, ſed (x) reperitur in puncto illo O, quo arcus totus deſcriptus aB biſecatur. Et corpus ſubinde pergendo ad a, iiſdem gradibus retardatur quibus antea accelerabatur in deſcenſu ſuo à B ad O.

(f) * *Simul deſcribentur.* Quia enim eſt ſemper C B ad O B, ut C D ad O d; evaneſcente arcu O d, evaneſcet etiam arcus C D, ſeu punctum d cum O, & D cum C ſimul coincident.

(t) * *In eâdem ratione.* Sunt enim velocitates, ut ſpatia dato temporis momento deſcripta, tam in medio reſiſtente quam in medio non reſiſtente (11.)

(u) * *Et propterea.* Si ſumatur arcus A C æqualis C B, & deinde arcus a B ad arcum A B in datâ ratione O B ad C B; corpora D & d ſimul deſcribent hos arcus, & in locis A & a motum omnem ſimul amittent. Nam cum ſit ſemper arcus C E ad O e ut C B ad O B, ſeu ut C A ad O a, ubi arcus C E æqualis evadet arcui C A, fiet quoque arcus O e æqualis arcui C a; & quia motus in medio non reſiſtente extinguitur in A, ob C A = C B; in medio reſiſtente extinguetur quoque in a, eo quod velocitates in locis E, e & A, a ſint in datâ ratione.

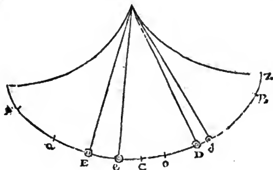
(x) * *Sed reperitur in puncto illo O, quo &c.* Nam ratio velocitatum in mediis reſiſtente & non reſiſtente eſt ſemper eadem.

PROPOSITIO XXVI. THEOREMA XXI.

PROP. XXVI. THEOR. XXI.

Corporum funependulorum, quibus resistitur in ratione velocitatum, oscillationes in cycloide sunt Isochronæ.

(y) Nam si corpora duo, à centris suspensionum æqualiter distantia oscillando describant arcus inæquales, & velocitates in arcuum partibus correspondentibus sint ad invicem ut arcus



eadem in punctis correspondentibus ut in d & D, in O & C, in e & E; sed corporis in medio non resistente oscillantis velocitas maxima est in loco infimo C, & iisdem gradibus retardatur in ascensu, quibus antea accelerabatur in descensu; quare motus velocissimus in medio resistente reperitur in O, & iisdem deinde gradibus retardatur in ascensu, quibus ante accelerabatur in descensu.

(y) * *Nam si corpora duo*, exempli causâ B & D, *à centro suspensionis æqualiter distantia, oscillando describant arcus inæquales* B a, D e, *& velocitates in arcuum partibus correspondentibus*, seu in arcuum B a, D e quadrantibus, partibus tertiis &c., *sint ad invicem ut arcus toti* B a, D e: *resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis* (secundum tangentes cycloidis agentibus) *quæ sint ut iidem arcus* B a, D e, *auferantur* dum corpus descendit, *vel addantur* dum corpus ascendit, *hæ resistentiæ; erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa*, dato temporis momento genita, *sint ut hæ differentiæ vel summæ* (18), *velocitates semper erunt ut arcus toti* B a, D e: *igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motûs, ubi corpora incipiunt è locis* B, D *descendere & arcus illos* B a, D e *describere*, ideoque ubi resistentia nulla est, *vires sunt arcubus illi proportionales.* Vires igitur, & velocitates, & arcus descripti, ac proinde & arcus describendi, manent semper in datâ ratione. Quare corpora duo 179.

 simul

arcus toti; resistentiæ velocitatibus proportionales, erunt etiam ad invicem ut iidem arcus. Proinde si viribus motricibus à gravitate oriundis, quæ sint ut iidem arcus, auferantur vel addantur hæ resistentiæ, erunt differentiæ vel summæ ad invicem in eâdem arcuum ratione: cumque velocitatum incrementa vel decrementa sint ut hæ differentiæ vel summæ, velocitates semper erunt ut arcus toti: Igitur velocitates, si sint in aliquo casu ut arcus toti, manebunt semper in eâdem ratione. Sed in principio motus, ut corpora incipiunt descendere & arcus illos describere, vires, cum sint arcubus proportionales, generabunt velocitates arcubus proportionales. Ergo velocitates semper erunt ut arcus toti describendi, & propterea arcus illi simul describentur. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XXVII. THEOREMA XXII.

Si corporibus funependulis resistitur in duplicatâ ratione velocitatum, differentiæ inter tempora oscillationum in medio resistente ac tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente, erunt arcubus oscillando descriptis proportionales quam proximè.

(z) Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A, B; & resistentia corporis in arcu A, erit ad

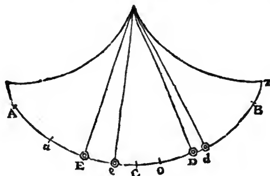
simul perveniant ad punctum infimum C; & eodem modo probatur quod arcus C a, C e simul describant.

Scholium. Newtonus in duabus propositionibus præcedentibus ostendit cycloidem esse curvam isochronam, (quam alii tautochronam appellant,) non tantùm in medio non resistente, sed etiam in medio quod in ratione momentorum temporis, & in medio quod ratione simplici velocitatis resistit; Verum quænam sit curva illa tautochrona in hypothesi resistentiæ velocitatum quadrato proportionalis non indicat. Elegantissimas hujusce problematis solutiones dedere celeberrimi mathematici Eulerus tom. 4. Acad. Petrop. & tom. 2. Mechanicæ; necnon Clariss. Bernoullius in monumentis Acad. Reg. Scientiarum Paris. an. 1730. Novam viam quâ curvæ tautochronæ in medio quolibet resistente possint inveniri aperuit D. Fontaine in iisdem monumentis anni 1734.

(z) * *Nam pendulis æqualibus in medio resistente describantur arcus inæquales A & B,* * ad pleniorem hujus demonstrationis evidentiam, fingatur illos arcus in totidem partes quam minimas inter se æquales dividi, singulæ in utroque arcu erunt totis arcubus proportionales dicanturque *a* & *b*, si medium aut non resisteret aut resisteret in ratione velocitatum, velocitates initio particularum quarum-

ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B, in duplicatâ ratione velocitatum, id est, ut AA ad BB, quam proximè. Si resistentia in arcu B esset ad resistentiam in arcu A ut A B ad A A, tempora in arcubus A & B forent æ-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVII. THEOR. XXII.



qualia, per propositionem superiorem. Ideoque resistentia A A in arcu A, vel A B in arcu B, efficit excessum temporis in arcu A supra tempus in medio non resistente; & resisten-

rumvis correspondentium *a* & *b*, forent ut arcus ipsi *A* & *B*; At in medio resistente in ratione duplicatâ velocitatis paulo diversa erit hæc velocitatum ratio, sed propter exiguam rationem resistentiæ ad velocitatem, negligi poterit hæc differentia, & supponi potest velocitates manere in ratione arcuum quam proximè; quod si ita supponatur *resistentia corporis in quovis puncto arcus A erit ad resistentiam corporis in parte correspondente arcus B*, sicut quadrata velocitatum in punctis illis correspondentibus eorum arcuum, id est ut *quadrata ipsorum arcuum A A & B B quam proximè.* Designetur vero velocitas initio arcus *a* per $v A$, & initio arcus *b* per $v B$. Designetur porro resistentia initio arcus *a* per $m A A$, & resistentia initio arcus *b* per $m B B$; In medio non resistente tempuscula quibus singulæ particulæ *a* & *b* describentur erunt æqualia, (per Prop. II. lib. 1.) designentur verò per *T*; Cum ergo in medio resistente propter velocitatem imminutam longius fiat tempus in inversâ ratione velocitatum ut *x* excessus ille tempusculi quo arcus *a* describitur in medio resistente supra tempusculum quo idem arcus in medio non resistente percurritur habebiturque ex hypothesibus $v A - m A A : v A = T : T + x$. 179.

Ut inveniatur ratio hujus excessus *x* ad excessum tempusculi quo arcus describitur in medio resistente secundum Legem duplicatam velocitatis, supra tempusculum *T*, quo idem arcus in medio non resistente percurritur; supponatur arcum B in tali medio describi ut resistentia in punctis *a* arcûs *A*, sit ad resistentiam in punctis correspondentibus *b* arcûs *B*, sicut *A* est ad *B*, ideoque sicut velocitates initio arcuum illorum, sive cum resistentia in *a* sit $m A A$ resistentia in *b* fingatur esse $m A B$, cùm

resistentia B B efficit excessum temporis in arcu B supra tempus in medio non resistente. Sunt autem excessus illi ut vires efficientes A B & B B quam proximè, id est, ut arcus A & B. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc ex oscillationum temporibus, in medio resistente, in arcubus inæqualibus factarum, cognosci possunt tempora oscillationum in ejusdem gravitatis specificæ medio non resistente. Nam differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente, ut (b) differentia arcuum ad arcum minorem. Co-

cùm ergo resistentiæ sint in ipsâ ratione velocitatum, velocitates demptis resistentiis manebunt in eâdem ratione, in ratione nempe arcuum describendorum a & b, qui ergo æqualibus temporibus describentur, sed tempus quo describitur arculus a est $T+x$ ergo si resistentia in arcu B, sive b sit $m\,A\,B$ ideoque velocitas sit $v\,B - m\,A\,B$ tempus quo describetur arcus b erit etiam $T+x$.

Cum autem reverâ resistentia initio arcus b non sit $m\,A\,B$ sed $m\,B\,B$, si y sit excessus tempusculi in quo b describitur in medio resistente juxta quadrata velocitatum supra tempus quo idem arcus in medio non resistente percurritur, erit tempus $T+x$ ad tempus $T+y$ reciproce sicut velocitas $v\,B - m\,A\,B$ quæ supponebatur, ad velocitatem $v\,B - m\,B\,B$, eritque ideo $v\,B - m\,B\,B$ ad $v\,B - m\,A\,B = T+x$, ad $T+y$, cum ergo subtractio quantitatum $m\,B\,B$, $m\,A\,B$ ex velocitate $v\,B$ producat excessus x & y supra tempus T, oportet ut illæ quantitates $m\,B\,B$, $m\,A\,B$, sint reciprocè ut x & y, sed $m\,A\,B$ & $m\,B\,B$ sunt ut A ad B, ergo A est ad B, sicut x est ad y, ideoque excessus x temporis arcus A in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatis supra tempus in eodem arcu A in medio non resistente, est ad excessum y temporis arcus B in eodem medio supra tempus in eodem arcu B in medio non resistente, ut arcus A ad arcum B, cumque idem ratiocinium in omnibus arcubus quamminimis a & b institui possit, summæ omnium excessuum tempusculorum in arcu A, erit ad summam omnium excessuum tempusculorum in arcu B ut A ad B. Q. E. D.

* Quod excessus x & y tempusculorum quibus describuntur arcus a & b, in medio resistente juxta rationem duplicatam velocitatum, supra tempus quo describerentur in medio non resistente sint ut A & B, ex superiori demonstratione alio modo erui potest. Nam manentibus quæ illic posueramus est.

$v\,A - m\,A\,A : v\,A = T : T+x$ est etiam simili ratione $v\,B - m\,B\,B : v\,B = T : T+y$ & dividendo in utraque proportione fit

$$v\,A - m\,A\,A : m\,A\,A = T : x$$

$$v\,B - m\,B\,B : m\,B\,B = T : y.$$

Sed ob exiguitatem resistentiæ velocitatis respectu assumi potest $v\,A - m\,A\,A$ pro $v\,A$, & $v\,B - m\,B\,B$ pro $v\,B$, unde est quam proximè.

$$v\,A : m\,A\,A = T : x$$

$v\,B : m\,B\,B = T : y$ & reducendo priores rationes utriusque proportionis ad minores terminos.

$$v : m\,A = T : x$$

$v : m\,B = T : y$ & vicissim

$$v : T = m\,A : x$$

$v : T = m\,B : y$, unde est

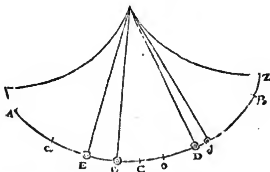
$m\,A : x = m\,B : y$, ideo vicissim

$m\,A : m\,B = x : y$, sed $m\,A : m\,B = A : B$, ideoque $A : B = x : y$. Ideoque excessus temporum in medio resistente in duplicatâ ratione velocitatum, supra tempora in medio non resistente in arcubus inæqualibus sunt ut illi arcus.

(b) * *Differentia temporum erit ad excessum temporis in arcu minore supra tempus in medio non resistente ut differentia arcuum ad arcum minorem* †.

* Tempus per arcum A est $T+x$, tempus per arcum minorem B, est $T+y$, ergo differentia temporum $T+x-T-y = x-y$,

Corol. 2. ([c]) Oscillationes breviores sunt magis isochronæ, & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente, quàm proximè. Earum verò quæ in majoribus arcubus fiunt, tempora sunt paulò majora, ([d]) propterea quòd resistentia in descensu corporis quâ tempus producitur, ([e]) major fit pro ratione longitudinis in descensu descriptæ, quàm resi-



$x - y$, & excessus temporis in minore arcu supra tempus in medio non resistente est y juxta denominationes notæ superioris, sed ex Theoremate est $x : y = A : B$ ergo dividendo $x - y : y = A - B : B$, hoc est *differentia temporum est ad excessum &c.*

(c) * *Oscillationes breviores sunt magis Isochronæ & brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quam proximè.* * Brevissimæ iisdem temporibus peraguntur ac in medio non resistente quàm proximè; sit A arcus major, B minimus, inventum est (in nota a) quod erat $vA - mAA : vA = T : T + x$, & etiam quod erat $vB - mBB : vB - mAB = T + x : T + y$, unde per compositionem rationum invenitur $v^2AB - mvAAB - mvABB + m^2AABB$ (sive $\overline{v^2AB - mvA^2B} \times \overline{1 - \frac{mB}{v}}$) ad $v^2AB - mvA^2B = T : T + y$, itaque in primo termino neglecto $-\frac{mB}{v}$ (quod infinitè 179.
parvum supponitur ob exiguitatem arcus B ut & quantitatis m respectu v) fiet
$v^2AB - mvAAB : v^2AB - mvAAB = T : T + y$; est ergo $T = T + y$, sive tempus in medio non resistente idem ac in medio resistente quàm proxime.

Sed oscillationes in medio non resistente sunt Isochronæ, hinc ergo Oscillationes breviores in medio resistente ad has quàm proxime accedentes cæteris sunt magis Isochronæ. Q. E. D.

(d) * *Propterea quod resistentia in descensu &c.* Quo major est resistentia, eò minor fit, cœteris paribus, corporis descendentis velocitas, & ideo, manente descensûs longitudine, tempus per resistentiam producitur; & contra, quò major est resistentia, eò citius extinguitur velocitas corpori insita in ascensu.

(e) * *Major fit pro ratione longitudinis.*

resistentia in ascensu subsequente quâ tempus contrahitur. Sed & tempus oscillationum tam brevium quàm longarum nonnihil produci videtur per motum medii. (f) Nam corporibus tardescentibus paulò minus resistitur, pro ratione velocitatis, & corporibus acceleratis paulò magis quàm iis quæ uniformiter progrediuntur: idque quia medium, eo quem à corporibus accepit motu, in eandem plagam pergendo, in priore casu magis agitatur, in posteriore minus; ac proinde magis vel minns cum corporibus motis conspirat. Pendulis igitur in descensu magis resistit, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur.

PROPOSITIO XXVIII. THEOREMA XXIII.

Si corpori funependulo in cycloide oscillanti resistitur in ratione momentorum temporis, erit ejus resistentia ad vim gravitatis ut excessus arcûs descensu toto descripti supra arcum ascensu subsequente descriptum, ad penduli longitudinem duplicatam.

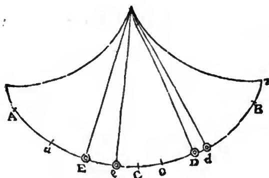
Designet BC arcum descensu descriptum, Ca arcum ascensu descriptum; & Aa differentiam arcuum: & stantibus quæ in propositione XXV. constructa & demonstrata sunt, erit vis, quâ corpus oscillans urgetur in loco quovis D, ad vim resistentiæ ut

nis. Longitudo in descensu descripta semper major est quàm longitudo descripta in ascensu subsequente, si medium resistit; cùm longitudines illæ in medio non resistente sint æquales (92. lib. I.).

(f) * *Nam corporibus tardescentibus*, seu quorum velocitas continuo decrescit, ut fit in corporum ascensu, paulo minus resistitur, pro ratione velocitatis; & corporibus acceleratis, seu descendentibus, paulò magis resistitur quàm iis quæ uniformiter progrediuntur. In priore enim casu, medium eo quem à corporibus accepit motu, quemque aliquandiu ob inertiam materiæ conservat, in eamdem plagam pergit cum corporibus, & ob validiorem ab initio motûs continue decrescentis acceptam impressionem magis agitatur, ac proinde magis conspirat cum corporibus motis, minoremque iis resistentiam objicit. At in secundo casu cùm motus perpetuo acceleretur, medium ex prioribus ictibus non satis velocem motum accepit, & ideo ejus celeritas novis impulsibus continuo augenda est ut possit cum corporibus motis conspirare; hincque corporibus acceleratis resistit magis quàm uniformiter progredientibus. Pendulis igitur in descensu magis resistit medium, in ascensu minus quàm pro ratione velocitatis, & ex utrâque causâ tempus producitur. Nam quò major est resistentia in descensu, & minor in ascensu, eo magis producitur tempus, ut supra dictum est.

ut arcus *CD* ad arcum *CO*, qui (g) semissis est differentiæ illius *Aa*. Ideoque vis, quâ corpus oscillans urgetur in cycloidis principio seu puncto altissimo, id (h) est, vis gravitatis,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXVIII. THEOR. XXIII.



erit ad resistentiam ut arcus cycloidis inter punctum illud supremum & punctum infimum *C* ad arcum *CO*; id est (si arcus duplicentur) ut cycloidis totius arcus, seu (i) dupla penduli longitudo, ad arcum *Aa*. *Q. E. D.*

PRO-

(g) * *Qui semissis est differentiæ illius Aa.* Nam (*per hyp.*) arcus CA æqualis est arcui CB, & (*per cor. prop.* XXV.) arcus O a æqualis est arcui O B; quare CA — O a, seu A a — CO = CB — OB = CO, & hinc A a = 2 CO, ac CO = ½ A a.

(h) * *Id est vis gravitatis.* In cycloidis principio sive puncto altissimo tangens cycloidis est in directione gravitatis, & idcirco vis in cycloide æqualis est vi gravitatis in illo puncto, ut patet ex *cor. prop. LI. lib.* 1. 879.

(i) * *Seu dupla penduli longitudo* (462. lib. 1.).

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXIX. PROBL. VI.

PROPOSITIO XXIX. PROBLEMA VI.

Posito quod corpori in cycloide oscillanti resistitur in duplicatâ ratione velocitatis: invenire resistentiam in locis singulis.

Sit *B a* arcus oscillatione integrâ descriptus, sitque *C* infimum cycloidis punctum, & *C Z* semissis arcus cycloidis totius, longitudini penduli æqualis; & quæratur resistentia corporis in loco quovis *D*. Secetur recta infinita *O Q* in punctis *O*, *S*, *P*, *Q*, eâ lege, ut (si erigantur perpendicula *O K*, *S T*, *P I*, *Q E*, centroque *O* & asymptotis *O K*, *O Q* describatur hyperbola *T I G E* secans perpendicula *S T*, *P I*, *Q E* in *T*, *I* & *E*, & per punctum *I* agatur *K F* parallela asymptoto *O Q* occurrens asymptoto *O K* in *K*, & perpendiculis *S T* & *Q E* in *L* & *F*) fuerit area hyperbolica *P I E Q* ad aream hyperbolicam *P I T S* ut arcus *B C* descensu corporis descriptus ad arcum *C a* ascensu descriptum, & area *I E F* ad aream *I L T* ut *O Q* ad *O S*. Dein perpendiculo *M N* abscindatur area hyperbolica *P I N M* quæ sit ad aream hyperbolicam *P I E Q* ut arcus *C Z* ad arcum *B C* descensu descriptum. Et si perpendiculo *R G* abscindatur area hyperbolica *P I G R*, quæ sit ad aream *P I E Q* ut arcus quilibet *C D* ad arcum *B C* descensu toto descriptum; erit resistentia in loco *D* ad vim gravitatis, ut area $\frac{OR}{OQ}$ *I E F* — *I G H* ad aream *P I N M*.

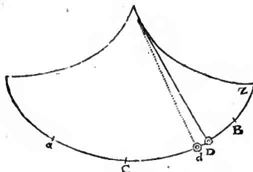
Nam cùm vires à gravitate oriundæ quibus corpus in locis *Z*, *B*, *D*, *a* urgetur, (k) sint ut arcus *C Z*, *C B*, *C D*, *C a*, & (l) arcus illi sint ut areæ *P I N M*, *P I E Q*, *P I G R*, *P I T S*; exponantur tum arcus tum vires per has areas respectivè. Sit insuper *D d* spatium quàm minimum à corpore descendente descriptum, & exponatur idem per aream quam minimam *R G g r* parallelis *R G*, *r g* comprehensam; & producatur

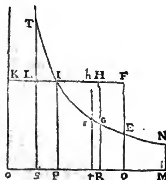
r g

(k) * *Sint ut arcus &c.*, per demonstrata in prop. LI. & Cor. 2. prop. LII. lib. I.

(l) * *Et arcus illi sint ut areæ*, per constructionem.

rg ad h, ut fint $GHhg$, & $RGgr$, contemporanea (m) arearum IGH, $PIGR$ decrementa. Et (n) areæ $\frac{OR}{OQ}IEF -$ IGH incrementum $GHhg - \frac{Rr}{OQ}IEF$, feu $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ}IEF$, erit ad areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$, feu





$Rr \times RG$, ut $HG - \frac{IEF}{OQ}$ ad RG; ideoque ut $OR \times HG - \frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OR \times GR$ feu (o) $OP \times PI$, hoc eft (ob (p) æqualia $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $ORHK - OPIK$, $PIHR$

(m) * *Arearum IGH, PIGR decrementa.* Cum enim corpus è loco D defcendit in arcu DC, decrefcit area PIGR huic arcui proportionalis, & cum eâ decrefcit quoque area IGH.

(n) * *Et areæ &c.* Nam, ob datas OQ, & IEF, decrementum areæ $\frac{OR}{OQ}$IEF — IGH, fumptis duorum terminorum fluxionibus, invenitur æquale $\frac{Rr}{OQ}$IEF—GHhg; & ideo, mutatis fignis, ejufdem areæ incrementum eft GHhg — $\frac{Rr}{OQ}$IEF, feu &c. 179.

(o) * *Seu* O P × P I. Per theor. 4. de hyperbolâ.

(p) * *Ob æqualia &c.* Cùm fit HG = HR — GR, erit OR × HG = OR × HR — OR × GR; fed OR × HR æquale eft rectangulo ORHK, & (*per theor. 4. de hyp.*) OR × GR æquale eft rectangulo OPIK. Quare OR × HG = ORHK — OPIK = PIHR = PIGR + IGH.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Probl. VI.

$PIHR$ & $PIGR+IGH$) ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$ ad $OPIK$. Igitur si area $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ dicatur Y, atque areæ $PIGR$ decrementum $RGgr$ detur, (q) erit incrementum areæ Y ut $PIGR-Y$.

Quod si V designet vim à gravitate oriundam, arcui describendo CD proportionalem, quâ corpus urgetur in D, & R pro resistentia ponatur; erit V — R vis tota quâ corpus urgetur in D. (r) Est itaque incrementum velocitatis ut V — R & particula illa temporis in quâ factum est conjunctim: Sed (s) & velocitas ipsa est ut incrementum contemporaneum spatii descripti directè & particula eadem temporis inversè. Unde, cùm resistentia per hypothesin sit ut quadratum velocitatis, incrementum resistentiæ (*per* (t) *lem.* 11.) erit ut velocitas & incrementum velocitatis conjunctim, id (u) est, ut momentum spatii & V — R conjunctim; atque ideo, si momentum spatii detur, ut V — R; id est, si pro vi V scribatur ejus exponens $PIGR$, & resistentia R exponatur per aliam aliquam aream Z, ut $PIGR$ — Z.

Igitur areâ $PIGR$ per datorum momentorum subductionem uniformiter decrescente, crescunt area Y in ratione $PIGR$ — Y,

(q) * *Erit incrementum areæ Y ut* $PIGR-Y$. Quoniam enim (hyp.) est $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH=Y$, & (ex demonstratis) incrementum areæ $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ est ad decrementum (*ex hyp.*) datum $RGgr$, ut $PIGR+IGH-\frac{OR}{OQ}IEF$, seu $PIGR-Y$, ad datum rectangulum $OPIK$; manifestum est quod incrementum areæ Y sit ad $PIGR-Y$ in datâ ratione, nimirum in ratione decrementi dati $RGgr$ ad rectangulum datum $OPIK$.

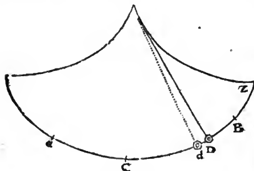
(r) * *Est itaque incrementum velocitatis, ut &c.* (18.).

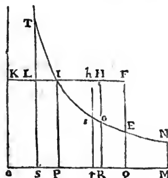
(s) * *Sed & velocitas ipsa est &c.* (11).

(t) * *Per Lemma* II. casu 3°. idque statim apparet: nam si velocitas dicatur v, cum sit R ut vv, erit dR ut $2vdv$, seu ut vdv.

(u) * *Id est, ut momentum spatii &c.* Quia (ex dem.) velocitatis incrementum est ut $V-R$ & momentum temporis conjunctim, velocitas autem ipsa ut incrementum spatii directe & momentum temporis inversè; erit ex æquo, velocitas in suum incrementum ducta, ut $V-R$ & incrementum spatii conjunctim, in quâ ratione est etiam incrementum resistentiæ (*ex dem.*).

Y, & area Z in ratione *P I G R* — Z. Et propterea si areæ Y & Z simul incipiant & sub initio æquales sint, hæ (x) per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales, & æqualibus itidem momentis subinde decrescentes simul evanescent. Et vicissim, si simul incipiunt & simul evanescunt, æqualia habebunt momenta & semper erunt æquales: id adeo quia





si resistentia Z augeatur, velocitas unà cum arcu illo *C a*, qui in ascensu corporis describitur, diminuetur; & puncto in quo motus omnis unà cum resistentiâ cessat propius accedente ad punctum *C*, (y) resistentia citius evanescet quàm area Y. Et contrarium eveniet ubi resistentia diminuitur. Jam

(x) * *Hæ per additionem æqualium momentorum pergent esse æquales*, &c. Cùm enim semper crescat area *Y* in ratione P I G R — *Y*, & area Z in ratione P I G R — Z; si areæ illæ *Y* & *Z* simul incipiant & initio æquales sint, erunt etiam areæ P I G R — *Y* & P I G R — *Z* sub initio æquales; &, ob datam incrementorum areæ *Y* & areæ *Z* ad P I G R — *Y* & P I G R — *Z* rationem, incrementa illa sicut & P I G R — *Y* ac P I G R — *Z* manebunt semper æqualia, uti sub initio. Quare etiam areæ *Y* & *Z* æqualibus itidem momentis subinde decrescent & simul evanescent.

(y) * *Resistentia citius evanescet quam area* Y, *& contrarium &c.* Nam si area Z semper æqualis sit areæ *Y*, simul incipient simulque evanescent. 179. Incipit autem area *Y* (ut infra ostendetur) ubi recta R G incidit in rectam Q E, & definit ubi recta R G incidit in rectam S T, suntque Q & S puncta fixa per arcuum C B, C a longitudines determinata (*per constr.*). Quare si resistentia *Z* augeatur vel minuatur ita ut cesset in puncto arcûs C a infra vel supra a positum, citius vel tardius evanescet area *Z* quàm area *Y*, quia hæc non definit nisi ubi corpus pervenit ad locum a. Resistentia igitur, seu area *Z* nec major nec minor esse potest quàm area *Y*, si simul incipiant & simul evanescant.

Jam verò area Z incipit desinitque ubi resistentia nulla est, hoc est, in principio motûs ubi arcus CD arcui CB æquatur & recta RG incidit in rectam QE, & in fine motus ubi arcus CD arcui Ca æquatur & RG (z) incidit in rectam ST. Et area Y seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ incipit desinitque ubi nulla est, ideoque ubi $\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH æqualia sunt: hoc (a) est (per constructionem) ubi recta RG incidit successivè in rectas QE & ST. Proindeque areæ illæ simul incipiunt & simul evanescunt, & propterea semper sunt æquales. Igitur area $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ æqualis est areæ Z, per quam resistentia exponitur, & propterea est ad aream $PINM$ per quam gravitas exponitur, ut resistentia ad gravitatem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Est igitur resistentia in loco infimo C ad vim gravitatis, ut area $\frac{OP}{OQ} IEF$ ad (b) aream $PINM$.

Corol. 2. Fit autem maxima, ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ. Eo enim in casu momentum ejus (nimirum $PIGR - Y$) (c) evadit nullum.

Corol.

(z) * *Incidit in rectam S T.* Hæc patent per constructionem, quâ areæ P I E Q, P I G R, P I T S factæ sunt arcubus C B, C D, C a proportionales.

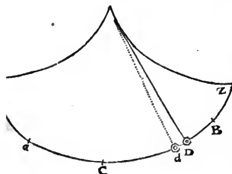
(a) * *Hoc est (per constructionem) ubi &c.* Ubi enim *Y* evanescit, fit quoque $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = o, & ideo $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H; hoc autem contingit ubi fit I E F : I G H = O Q : O R, quod evenit primo ubi recta R G incidit in rectam Q E & incipit area *Y*. Tunc enim I E F = I G H & O Q = O R ideoque I E F : I G H = O Q : O R. Est enim $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H, quando fit O R = O S & I G H = I L T: nam cùm (*per constr.*) sit area I E F ad aream I L T ut O Q ad O S, si ponatur O R = O S, fiet I L T = I G H, eritque area I E F ad aream I G H ut O Q ad O R, & hinc $\frac{OR}{OQ}$ I E F = I G H. Est autem O R = O S, ubi recta R G incidit in rectam S T, & area *Y* desinit ibidem.

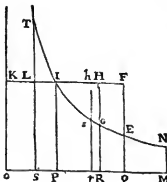
(b) * *Ad aream P I N M.* Nam evanescente arcu C D, evanescit ipsi proportionalis area P I G R, & hinc evanescit etiam area I G H, fitque O R = O P, atque proinde $\frac{OR}{OQ}$ I E F — I G H = $\frac{OP}{OQ}$ I E F.

(c) * *Evadit nullum.* Momentum areæ *Y* est ut P I G R — *Y* (*ex dem.*), id est, ut P I G R + I G H — $\frac{OR}{OQ}$ I E F = P I H R = $\frac{OR}{OQ}$ I E F. Quâ propter momentum areæ *Y* nullum fit; & ideo resisten-

Corol. 3. Hinc etiam innotescit velocitas in locis singulis: quippe quæ est in subduplicatâ ratione resistentiæ, & ipso motûs initio æquatur velocitati corporis in eâdem cycloide sine (d) omni resistentiâ oscillantis.

Cæ-





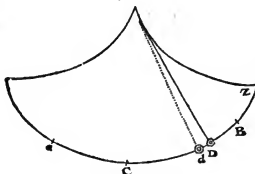
stentia (cui area Y proportionalis est) maxima evadit (48), ubi est $PIHR - \frac{OR}{OQ} IEF = 0$, seu ubi $PIHR = \frac{OR}{OQ} IEF$, ac proinde ubi area $PIHR$ est ad aream IEF ut OR ad OQ.

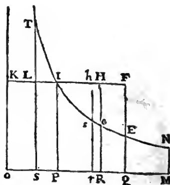
(d) * *Sine omni resistentiâ oscillantis.* Quoniam velocitatis quadratum in loco quovis D est ut resistentia, seu ut area Y in medio resistente; & ut $CB^2 - CD^2$ (*per prop. LII. lib. I.*) seu ut $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2$ in medio non resistente; si velocitates illæ dicantur v, V, sintque C & E quantitates constantes, erit $vv = C \times Y$, & $VV = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$. Et quia initio motûs, dum corpus est in B, velocitates illæ æquales sunt, ob resistentiam respectu vis à gravitate oriundæ evanescentem; erit initio motûs $C \times Y = E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$; sed initio motûs est Y, seu $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH = \frac{OR}{OQ} IEF - IEF + QR \times FE =$

$\frac{OR \times IEF - OQ \times IEF + OQ \times QR \times FE}{OQ}$ 179.

$= \frac{QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF}$, coincidente nimirum GH cum EF, & QR seu HF evanescente. Et similiter initio motus est $\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2 = \overline{PIEQ + PIGR} \times \overline{PIEQ - PIGR} = \overline{2PIEQ - QR \times QE} \times \overline{QR \times QE} = 2PIEQ \times QR \times QE$, neglecto termino evanescente $QR^2 \times QE^2$; Quare erit initio motus $\frac{C \times QR}{OQ} \times \overline{OQ \times FE - IEF} = E \times QR \times QE \times 2PIEQ$, & ideo $C : E = 2PIEQ \times QE : \frac{OQ \times FE - IEF}{OQ}$; unde, cum sit semper $vv : VV = C \times Y : E \times \overline{PIEQ}^2 - E \times \overline{PIGR}^2$, erit quoque $vv : VV = 2PIEQ \times QE \times \overline{\frac{OR}{OQ} IEF - IGH} : \frac{\overline{OQ \times FE - IEF}}{OQ} \times \overline{\overline{PIEQ}^2 - \overline{PIGR}^2}$.

Cæterùm (e) ob difficilem calculum quo resistentia & velocitas per hanc propositionem inveniendæ sunt; visum est propositionem sequentem subjungere.





Innotescet igitur velocitas in medio resistente per inventam ipsius rationem ad velocitatem in medio non resistente in singulis locis.

(e) * *Cæterùm ob difficilem calculum &c.* Sit $OP = a$, $PI = FQ = b$, $OS = x$, & ideo $ST = \frac{ba}{x}$, $SP = LI = a - x$, & $LT = \frac{ba}{x} - b$. Deinde $OQ = z$, & hinc $QE = \frac{ba}{z}$, $PQ = FI = z - a$, & $FE = b - \frac{ba}{z}$. Et erit areæ PIEQ elementum $= \frac{badz}{z}$, areæ PITS elementum $= -\frac{badx}{x}$; & inde area $PIEQ = baL.z + Q$ *const.*; & quia area illa evanescit ubi est $PQ = z - a = o$, seu ubi $z = a$, invenitur constans $Q = -baL.a$, atque adeo area $PIEQ = baL.z - baL.a = baL.\frac{z}{a}$. Simili modo reperitur area PITS $= baL.\frac{a}{x}$. Sit jam arcus BC ad arcum Ca, ut m ad 1; & erit (*per constr.*) $m : 1 = baL.\frac{z}{a} : baL.\frac{a}{x} = L.\frac{z}{a} : L.\frac{a}{x}$, ac proinde $L.\frac{z}{a} = mL.\frac{a}{x} = L.\frac{a^m}{x^m}$, atque $\frac{z}{a} = \frac{a^m}{x^m}$, & $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$.

Porro ex superioribus denominationibus invenitur areæ IEF elementum $= bdz - \frac{badz}{z}$, & inde area ipsa $IEF = bz - baLz + Q$ *const.* quæ cùm sit o ubi $FI = z - a$ evanescit fitque $z = a$, est $Q = -ba + baL.a$, ideoque $IEF = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$; & similiter habetur area $ILT = baL.\frac{a}{x} + bx - ba$. Sed (*per constr.*) area IEF est ad aream ILT ut OQ ad OS; seu ut z ad x: quare $z : x = baL.\frac{a}{z} + bz - ba$

$-ba : baL\frac{a}{x} + bx - ba$, & dividendo per b, ac loco z scribendo ipsius valorem $\frac{a^{m+1}}{x^m}$, fit $a^{m+1} : x^{m+1} = a\,L.\frac{x^m}{a^m} + \frac{a^{m+1}}{x^m} - a : aL.\frac{a}{x} + x - a$; unde habetur $a^{m+2}\,L.\frac{a}{x} + a^{m+1}x - a^{m+2} = ax^{m+1}\,L.\frac{x^m}{a^m} + a^{m+1}x - ax^{m+1}$; & inde eruitur $mx^{m+1}Lx - mx^{m+1}La + a^{m+1}Lx - x^{m+1} = a^{m+1}L.a - a^{m+1}$. Si itaque ex hâc æquatione per serierum regressum, vel quâcumque alia methodo, determinetur valor x per arbitrariam lineam a, & deinde per æquationem $z = \frac{a^{m+1}}{x^m}$ inveniatur valor ipsius z; *Newtoniana* constructio ad calculum logarithmorum revocabitur.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VI. Prop. XXIX. Probl. VI.

Scholion. *Hermannus* prop. 73. & 74. lib. 2. *Phoronomiæ* geminam constructionem dedit, quâ corporis in curvâ qualibet oscillantis resistentia velocitatis quadrato proportionalis definitur, & *Newtonianam* pro cycloide constructionem ope logarithmicæ simpliciorem reddidit. Difficile autem non est (44) hanc NEWTONI constructionem revocare ad logarithmicam per punctum N & asymptoto K O ad partes O productâ describendam. 179.

PROPOSITIO XXX. THEOREMA XXIV.

Si recta a B *æqualis sit cycloidis arcui quem corpus oscillando describit, & ad singula ejus puncta* D *erigantur perpendicula* D K, *quæ sint ad longitudinem penduli ut resistentia corporis in arcus punctis correspondentibus ad vim gravitatis: dico quod differentia inter arcum descensu toto descriptum & arcum ascensu toto subsequente descriptum ducta in arcuum eorundem semisummam, æqualis erit area* B K a *à perpendiculis omnibus* D K *occupatæ.*

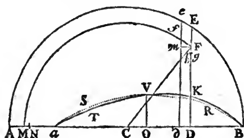
Exponatur enim tum cycloidis arcus, oscillatione integrâ descriptus, per rectam illam sibi æqualem $a\ B$, tum arcus qui describeretur in vacuo per longitudinem $A B$. Bisecetur $A B$ in C, & (f) punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum, & (g) erit $C D$ ut vis à gravitate oriundâ, quâ corpus in D secundum tangentem cycloidis urgetur, eamque habebit rationem ad longitudinem penduli quam (h) habet vis in D ad vim gravitatis. Exponatur igitur vis illa per longitudinem $C D$, & vis gravitatis per longitudinem penduli, & si in $D E$ capiatur $D K$ in eâ ratione ad longitudinem penduli quam habet resistentia ad gravitatem, erit $D K$ exponens resistentiæ. Centro C & intervallo $C A$ vel $C B$ construatur semicirculus $B E e A$. Describat autem corpus tempore quàm minimo spatium $D d$, & erectis perpendiculis $D E$, $d e$ circumferentiæ occurrentibus in E & e, erunt hæc ut velocitates quas corpus in vacuo, descendendo à puncto B, acquireret in locis D & d. Patet hoc (*per prop.* LI. *lib.* I.). Exponantur itaque hæ velocitates per perpendicula illa $D E$, $d e$; sitque $D F$ velocitas quam acquirit in D cadendo de B in medio resistente. Et si cen-

(f) * *Et punctum C repræsentabit infimum cycloidis punctum.* Nam cycloidis punctum infimum arcum quem corpus in medio non resistente oscillando describit in duas partes æquales dividit.

(g) * *Et erit C D ut vis à gravitate oriunda &c.* patet per demonstr. prop. LI. lib. I.

(h) * *Quam habet vis in D ad vim gravitatis*, per cor. 1. prop. LI. & not. 462. lib. I.

centro *C* & intervallo *CF* deſcribatur circulus *FfM* occurrens rectis *d e* & *AB* in *f* & *M*, (i) erit *M* locus ad quem deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & *df* velocitas quam acquireret in *d*. Unde etiam ſi *Fg* deſignet velocitatis momentum quod corpus *D* deſcribendo ſpatium quam minimum *Dd*, ex reſiſtentiâ medii amittit; & ſumatur *CN* æqualis *Cg*: erit *N* locus ad quem corpus deinceps ſine ulteriore reſiſtentiâ aſcenderet, & *MN* erit decrementum aſcenſûs ex velocitatis il-



lius amiſſione oriundum. Ad *df* demittatur perpendiculum *Fm*, & velocitatis *DF* decrementum *Fg* à reſiſtentiâ *DK* genitum, erit ad velocitatis ejuſdem incrementum *fm* à vi *CD* genitum, ut vis generans *DK* (k) ad vim generantem *CD*. Sed & (l) ob ſimilia triangula *Fmf*, *Fgh*, *FDC*, eſt *fm* ad *Fm* ſeu *Dd* ut *CD* ad *DF*: & ex æquo *Fg* ad *Dd* ut *DK* ad *DF*. Item *Fh* ad *Fg* ut *DF* ad *CF*; & ex æquo perturbatè *Fh* (m) ſeu *MN* ad *Dd* ut *DK* ad *CF* ſeu *CM*; ideò-

(i) * *Erit M locus ad quem &c.* Eamdem enim velocitatem haberet corpus in D, ac ſi ſeclusâ omni reſiſtentiâ percurriſſet ſpatium CF — CD, & ideo (per modo demonſtrata) in loco d haberet velocitatem d f, & in loco M nullam.

(k) * *Ad vim generantem CD.* Sunt enim velocitatum elementa dato temporis momento genita, ut vires generantes (13. lib. 1.)

(l) * *Ob ſimilia triangula &c.* Sunt enim anguli ad m, h, & D recti, angulus CFD duobus triangulis FDC, Fhg communis, & angulus fFm æqualis angulo CFD, quia ſi ex angulis rectis mFD, fFC ſubducatur communis angulus mFC, remanebunt anguli æquales fFm, CFD. Tria igitur triangula Fmf, Fhg & FDC æquales angulos habent, ſuntque proinde ſimilia. 179.

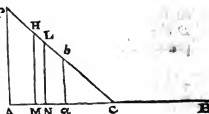
(m) * *Fh ſeu M N.* Cùm ſit CM æqualis CF, & CN æqualis Cg ſeu Ch, angulo hCg evaneſcente, eſt MN = CM — CN = CF — Ch = Fh.

(n) ideoque summa omnium $MN \times CM$ æqualis erit summæ omnium $Dd \times DK$. Ad punctum mobile M erigi semper intelligatur ordinata rectangula æqualis indeterminatæ CM, quæ motu continuo ducatur in totam longitudinem Aa; & trapezium ex illo motu descriptum sive huic æquale rectangulum $Aa \times \frac{1}{2} aB$ (o) æquabitur summæ omnium $MN \times CM$, ideoque summæ omnium $Dd \times DK$, id est, areæ $BKVTa$. *Q. E. D.*

Corol. Hinc ex lege resistentiæ & arcuum Ca, CB differentia Aa colligi potest proportio resistentiæ ad gravitatem quam proximè.

Nam si uniformis sit resistentia DK, figura $BKTa$ rectangulum erit sub Ba & DK; & inde rectangulum sub $\frac{1}{2} Ba$ & Aa erit æquale rectangulo sub Ba & DK, & DK æqualis erit $\frac{1}{2} Aa$. Quare cùm DK sit exponens resistentiæ, & longitudo penduli exponens gravitatis, erit resistentia ad gravitatem ut $\frac{1}{2} Aa$ ad longitudinem penduli; omninò ut in prop. XXVIII. demonstratum est.

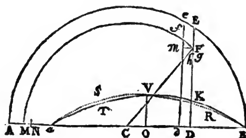
Si resistentia sit ut velocitas, figura $BKTa$ ellipsis erit quàm proximè. Nam si corpus, in medio non resistente, oscillatione in-



(n) * *Ideoque summa omnium* $MN \times CM$ *&c.* Quoniam (per modo demonstrata) $MN \times CM = Dd \times DK$, erit summa omnium $MN \times CM$ æqualis summæ omnium $Dd \times DK$, modò simul incipiant simulque desinant. Incipit autem summa omnium $Dd \times DK$ in B & desinit in a, & summa omnium $MN \times CM$ incipit in A, & ideo si desinat in a, erunt summæ illæ æquales.

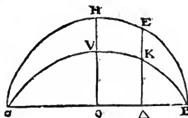
(o) * *Æquabitur summæ &c.* Erigatur ad punctum A perpendiculum $AP = AC$, jungatur PC, & ductis per M & N ac a perpendiculis MH, NL, ab; erit semper $MN \times CM = MN \times HM$; ideoque si ordinata variabilis HM ducatur in totam longitudinem Aa, erit trapezium APba æquale summæ omnium $MN \times CM$ ab A ad a; sed trapezium illud est $CAP - Cab = \frac{1}{2} CA^2 - \frac{1}{2} Ca^2 = \frac{1}{2}(CA + Ca) \times (CA - Ca) = \frac{1}{2} aB \times Aa$, ob $CB = CA$. Ergo &c.

integrâ describeret longitudinem *B A*, velocitas in loco quovis *D* foret ut circuli diametro *A B* descripti ordinatim applicata *D E*. Proinde cùm *B a* in medio resistente, & *B A* in medio non resistente, (p) æqualibus circiter temporibus descri-



bantur; ideoque velocitates in singulis ipsius *B a* punctis, sint quam proximè ad velocitates in punctis correspondentibus longitudinis *B A*, ut est *B a* ad *B A*; erit velocitas in puncto *D* in medio resistente ut circuli vel ellipseos super diametro *B a*

(p) * 180. *Æqualibus circiter temporibus describantur.* Quia resistentia minuendo corporis velocitatem tempus producit in descensu à B ad C, illudque contrahit in ascensu à C ad a, longitudines B A in medio non resistente & B a in medio resistente, earumque longitudinum partes proportionales, æqualibus circiter temporibus describuntur. Sunt autem velocitates ut spatia eodem temporis momento descripta (11); quare velocitates in partibus longitudinum B A, B a correspondentibus sunt quam proximè ut longitudines B A, B a, id est, in ratione datâ. Centro O & diametro A B describatur circulus B E H a, sitque B Δ in hac figurâ ad B D in figurâ textûs, ut B a ad B A, hoc est, ut velocitas in loco Δ in medio resistente ad velocitatem in loco D in medio non resistente; & ductâ



ordinatâ Δ E; erit etiam; ob figurarum similitudinem Δ E ad D E ut B a ab B A, ideoque ut velocitas in medio resistente ad velocitatem in medio non resistente. Velocitas igitur in medio resistente erit semper ut ordinata variabilis Δ E. 180.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXX. THEOR. XXIV.

B a descripti ordinatim applicata; (q) ideoque figura *BKVTa* ellipsis erit quàm proximè. Cùm resistentia velocitati proportionalis supponatur, sit *OV* exponens resistentiæ in puncto medio *O*; & ellipsis *BRVSa*, centro *O*, semiaxibus *OB*, *OV* descripta, figuram *BKVTa*, eique æquale rectangulum $Aa \times BO$, æquabit quamproximè. Est [illegible] $Aa \times BO$ ad $OV \times BO$ ut (r) area semi-ellipseos [illegible] ad $OV \times BO$: id est, *Aa* ad *OV* ut (ſ) area semicirculi ad quadratum radii, sive ut 11 ad 7 circiter: Et propterea $\frac{7}{11} Aa$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in *O* ad ejusdem gravitatem.

Quod si resistentia *DK* sit in duplicatâ ratione velocitatis; figura *BKVTa* ferè (t) parabola erit verticem habens *V* & axem

(q) * *Ideoque figura BKVTa ellipsis erit quàm proximè.* Cùm enim (ex modò demonstratis) velocitas in loco quovis Δ sit semper ut ordinata ΔE ad circulum, & (*per hyp.*) resistentia ΔK in hac figurâ, vel DK in figura sexta, sit semper ut velocitas ΔE, erit ΔK ut ΔE; & quia $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$) ex naturâ circuli), erit etiam ΔK^2 ut $a\Delta \times \Delta B$, & ideo figura BKVTa ellipsis, cujus centrum O, semiaxes aO, & OV, si OV exponat resistentiam in puncto medio O axis aB.

(r) * *Ut area semi-ellipseos hujus ad $OV \times BO$.* Est enim area illa $= Aa \times \frac{1}{2} aB$ (*per prop. hanc*), & $\frac{1}{2} aB = BO$ (per constr.).

(ſ) * *Ut area semicirculi ad quadratum radii &c.* Area ellipseos cujuscumque est ad rectangulum sub axibus in ratione datâ, nimirum in ratione areæ circuli ad quadratum diametri (250. *lib.* 1. (; circulus enim est ellipsis cujus sunt axes æquales; unde area semi-ellipseos BKVTa est ad quartam partem rectanguli sub axibus, seu ad rectangulum sub semiaxibus $OV \times BO$, ut area semicirculi ad quadratum radii. Sed si circuli radius sit 7, erit semiperipheria 22 circiter, & area semicirculi 7×11, ideoque area semicirculi ad quadratum radii ut 11 ad 7 circiter. Est igitur Aa ad OV ut 11 ad 7, & proinde $OV = \frac{7}{11} Aa$. Et propterea (*per prop. hanc*) $\frac{7}{11} Aa$ est ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in O ad ejusdem pondus.

(t) * *Ferè parabola erit.* Ordinata ΔE ad semicirculum BEHa (*vide fig. not.* 180.) est semper ut velocitas in loco Δ in medio resistente, & (ex naturâ circuli) $\Delta E^2 = a\Delta \times \Delta B$, & (*ex hyp.*) resistentia ΔK est ut velocitatis quadratum, seu ut ΔE^2, adeoque ΔK est ut rectangulum $a\Delta \times \Delta B$ sive ut $\overline{OB + O\Delta} \times \overline{OB - O\Delta}$ hoc est ut $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$. * Sed in Parabolâ cujus vertex foret V & axis VO differentia abscissarum foret semper ad differentiam quadratorum ordinatarum in utriusque abscissæ extremo ductarum, in datâ ratione. Jam verò si ex K ducatur in axem perpendicularis KP, est $K\Delta = PO$ & PO est differentia abscissarum VP & VO, est $O\Delta = PK$ ordinatæ in P, ideoque est $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ differentia quadratorum ordinatarum in punctis P & O, cum ergo KD & $\overline{OB}^2 - \overline{O\Delta}^2$ sint in

datâ

axem OV, (u) ideoque æqualis erit rectangulo sub $\frac{2}{3}$ Ba & OV quam proximè. Est igitur rectangulum sub $\frac{1}{2}$ Ba & Aa æquale rectangulo sub $\frac{2}{3}$ Ba & OV, ideoque OV æqualis $\frac{3}{4}$ Aa: & propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{3}{4}$ Aa ad longitudinem penduli.

Atque has conclusiones in rebus practicis abundè satis accuratas esse censeo. Nam cùm ellipsis vel parabola $BRVSa$ congruat cum figura $BKVTa$ in (x) puncto medio V, hæc si ad partem alterutram BRV vel VSa excedit figuram illam, (y) deficiet ab eâdem ad partem alteram, & sic eidem æqua-

datâ ratione figura B K V T a parabola erit verticem habens V & axem O V (per theor. 1. de parab.)

(u) * *Ideoque æqualis erit rectangulo sub* $\frac{2}{3}$ *B a & O V quam proximè.* Nam area parabolica B K V O est $\frac{2}{3}$ B O × V O (*Theor. 4. de parab.*) & ipsius duplum, seu area tota B K V a est $\frac{2}{3}$ a B × O V.

(x) * *In puncto medio V.* Supponitur enim quòd O V accuratè exhibeat resistentiam in puncto medio O, quodque parabola vel ellipsis per punctum V descripta sit.

(y) * *Deficiet ab eâdem ad partem alteram.* Quia duæ ellipseos vel parabolæ partes B R V & a S V similes sunt & æquales, si resistentiæ in descensu à B ad O majores sint quàm pro ratione ordinatarum D R ad ellipsim vel parabolam; ad 180.

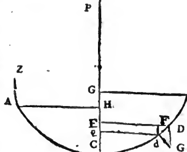
quabitur quàm proximè (z).

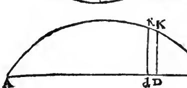
PRO-

ad alteram partem minores erunt; & contra.

181. Sit resistentia in ratione sesquiplicatâ velocitatis, id est, (*vide fig. not.* 180.) $\triangle K$ ut $\triangle E^{\frac{3}{2}}$; & quoniam (ex naturâ circuli) $\triangle E = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{1}{2}}$, & proinde $\triangle E^{\frac{3}{2}} = (BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, erit $\triangle K$ ut $(BO^2 - \triangle O^2)^{\frac{3}{4}}$, & (*in fig. textûs*) DK ut $(BO^2 - DO^2)^{\frac{3}{4}}$. Dicantur $BO = a$, $VO = b$, $DO = x$, $DK = y$, & erit $b : y = a^{\frac{3}{2}} : (aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, ideoque $y = \frac{b(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$; & hinc areæ OVKD momentum $ydx = bdx\frac{(aa - xx)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{3}{2}}}$.

Quantitas $(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$ in seriem infinitam resolvatur (551. *lib.* I.), & invenietur $dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}dx - \frac{3x^2dx}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^4dx}{4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^6dx}{4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9x^8dx}{4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. Et sumptis fluentibus $S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{2}}x - \frac{x^3}{4a^{\frac{1}{2}}} - \frac{3x^5}{5 \times 4 \times 8a^{\frac{5}{2}}} - \frac{3 \times 5x^7}{7 \times 4 \times 8 \times 12a^{\frac{9}{2}}} - \frac{3 \times 5 \times 9x^9}{9 \times 4 \times 8 \times 12 \times 16a^{\frac{13}{2}}}$ — &c. $= \frac{50841a^{\frac{5}{2}}}{71680}$, factâ $x = a$, & neglectis, ob parvitatem, cæteris seriei terminis. Quare cùm sit area $OVKD = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} \times S.dx(aa - xx)^{\frac{3}{4}}$, si ponatur $x = a$ erit area $OVKB = \frac{50841}{71680}ba$, & 2OVKB seu area tota $BKVTa = \frac{50841}{35840}ba = \frac{10}{7}ba$, circiter. Est itaque $\frac{10}{7}VO \times BO = Aa \times BO$, & hinc $VO = \frac{7}{10}Aa$; ac propterea corporis oscillantis resistentia in O ad ipsius gravitatem ut $\frac{7}{10}Aa$ ad longitudinem penduli.





(z) * 182. *Quam proximè.* Propositionem 72. lib. 2. Phor. quæ 30. hujus libri fere similis est, sed generalis, & demonstratu facilis, hic adjungemus.

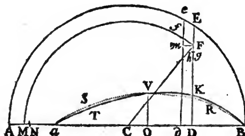
Si curvæ cujusvis BCZ arcus totus AB, quem grave descensu per BC & subsequente ascensu per CA in medio resistente describit, extendatur in lineam rectam BA, & ad singula hujus rectæ puncta D erigantur perpendicula DK proportionalia medii resistentiis quas mobile in homologis curvæ BCA punctis D subit, sitque BKA curva quam punctum K perpetuo tan-

PROPOSITIO XXXI. THEOREMA XXV.

PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Si corporis oscillantis resistentia in singulis arcuum descriptorum partibus proportionalibus augeatur vel minuatur in datâ ratione; differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum, augebitur vel diminuetur in eâdem ratione.

Oritur enim differentia illa ([a]) ex retardatione penduli per resistentiam medii, ideoque est ut retardatio tota eique proportionalis



resistentia retardans. In superiore propositione rectangulum sub rectâ $\frac{1}{2}$ *a B* & arcuum illorum *C B*, *C a* differentia *A a* æqualis

tangit: area curvilinea B K A B æquabitur rectangulo P C × G H ex recta P C, quæ gravitatem constantem exponit, in differentiam G H abscissarum G C, H C arcuum B C, C A descensu & subsequente ascensu descriptorum.

Ex punctis D, d infinitè propinquis demittantur ad P C perpendicula D E, d e, & ex puncto d ad E D perpendiculum d F; & vis gravitatis P C erit ad vim tangentialem in loco D, quâ motus corporis in curvâ acceleratur, ut D d ad F d.

* Nam ductâ D G parallela P C & G d in curvam perpendiculari, exprimat D G gravitatis actionem, exprimet D d vim Tangentialem, sed ob similitudinem Triangulorum D d G, D d F est D G : D d = D d : F D, erit ergo D d ad F d ut vis gravitatis ad vim Tangentialem, quâpropter cum D d sumatur ubique æqualis ut est actio gravitatis, ubique F d exprimet vim Tangentialem; est F d = E e, si itaque P C repræsentet vim gravitatis erit D d : E e = P C ad vim Tangentialem, 182.

† ideoque vis illa tangentialis $= \frac{PC \times Ee}{Dd}$.

Sed corporis descendentis vis acceleratrix æqualis est excessui vis tangentialis supra resistentiam; erit igitur vis acceleratrix in loco $D = \frac{PC \times Ee}{Dd} - DK$. Ducatur hæc vis in elementum spatii D d, & fiet $PC \times Ee - DK \times Dd = v\,dv$, si velocitas in loco D sit v (18, 19); & hinc, sumptis fluentibus, habetur $PC \times GE - BKD = \frac{1}{2} vv$. Fiat $BD = BA$, & ideo $v = 0$, atque $GE = GC - CH = GH$, & erit $PC \times GH - BKAB = 0$, ac proinde $PC \times GH = BKAB$. Q. E. D.

(a) * *Oritur enim differentia illa ex retardatione penduli per resistentiam medii.*

 * Di-

erat areæ $BKTa$. Et area illa, si maneat longitudo aB, augetur vel diminuitur in ratione ordinatim applicatarum DK; hoc est, in ratione resistentiæ, (b) ideoque est ut longitudo aB & resistentia conjunctim. Proindeque rectangulum sub Aa & $\frac{1}{2}\,aB$ est ut aB & resistentia conjunctim, & propterea Aa ut resistentia. *Q. E. D.*

Corol. 1. Unde si resistentia sit ut velocitas, differentia ar-

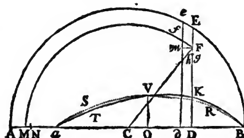
* Dividantur arcus à duobus pendulis descripti in partes proportionales infinitè parvas, & totum illud quod deest singulo arcui, poterit concipi ut effectus retardationum quas corpora passa sunt singularum illarum particularum initio, spatium verò quod propter singulam retardationem deficit, est ut illa retardatio & tempus per quod corpus motum fuit post illam retardationem receptam usque ad finem oscillationis; sed quoniam in oscillationibus utut inæqualibus tempora quibus similes arcuum partes describuntur sunt æqualia, in medio non resistente, & in medio resistente saltem quam proximè, (180) spatia quæ deficiunt propter retardationes in proportionalibus arcuum partibus receptas, sunt ut illæ retardationes.

* *Ideo differentia arcuum est ut retardatio tota, eique proportionalis resistentia retardans*, si quantitates materiæ corporum pendulorum sint æquales, retardatio in singulis arcuum descriptorum partibus est ut resistentia in iisdem locis, sed ut resistentiæ sunt in datâ quâdam Lege velocitatem ex Hypothesi & velocitates in arcuum partibus proportionalibus sunt in Ratione datâ, ideo resistentiæ in singulis arcuum partibus proportionalibus sunt in ratione datâ, ac per consequens omnes retardationes, sunt in eâdem ratione, summæ ergo retardationum erunt in eâdem ratione datâ, Ergo tota spatia deficientia illis retardationibus proportionalia erunt in eâdem ratione, *Differentia ergo inter arcum descensu descriptum & arcum ascensu subsequente descriptum* in variis arcubus ab eodem corpore descriptis, *sunt in Datâ Lege Resistentiæ.*

183. * *Cor.* 1. Differentiæ arcuum, respectu arcuum descensu descriptorum eamdem sequuntur Legem quam resistentiæ sequuntur respectu velocitatum. Nam cùm tempora quibus correspondentes & proportionales arcuum partes describuntur sint æqualia, velocitates erunt semper ut illæ arcuum partes, sive ut arcus toti, (180.) quam proximè, ergo resistentiæ, retardationes & differentiæ arcuum eamdem Legem sequuntur respectu arcuum ac respectu velocitatum.

Cor. 2. * *Si Corpora pendula differant quantitate materiæ, Differentiæ arcuum sunt directè in Lege datâ arcuum & inversè ut quantitates materiæ*: Nam eo in casu retardationes in singulis arcuum partibus sunt directè ut resistentiæ & inversè ut quantitates materiæ; nam resistentia motus jacturam producit, quæ motus jactura est factum ex retardatione & massâ retardatâ, (per Def. 2. lib. I.).

(b) * *Ideoque est ut longitudo a B & resistentia conjunctim.* Area illa si maneat longitudo a B, augetur vel diminuitur in ratione resistentiæ D K; si verò constans maneat resistentia seu ordinata D K, sed augeatur a B omnesque ejus partes d D in ratione totius a B augeantur, area illa augetur vel diminuitur in ratione longitudinis a B; unde si longitudo a B variabilis sit & resistentia seu ordinata D K in singulis longitudinum a B locis correspondentibus augeatur vel diminuatur in datâ ratione, area B K T a augebitur vel diminuetur in ratione compositâ ex ratione longitudinis a B & ratione resistentiæ auctæ vel diminutæ, proindeque rectangulum sub A a & $\frac{1}{2}$ a B erit ut a B & resistentia conjunctim, & propterea A a ut resistentia.



arcuum in eodem medio erit ut arcus totus descriptus: & contra.

Corol. 2. Si resistentia sit in duplicatâ ratione velocitatis, differentia illa erit in duplicatâ ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 3. Et universaliter, si resistentia sit in triplicatâ vel aliâ quâvis ratione velocitatis, differentia erit in eadem ratione arcûs totius: & contra.

Corol. 4. Et si resistentia sit partim in ratione simplici velocitatis, partim in ejusdem ratione duplicatâ, differentia erit partim in ratione arcûs totius & partim in ejus ratione duplicatâ: & contra. Eadem erit lex & ratio resistentiæ pro velocitate, quæ est differentiæ illius pro longitudine arcûs.

Corol. 5. Ideoque si, pendulo inæquales arcus successivè describente, inveniri potest ratio incrementi ac decrementi differentiæ hujus pro longitudine arcûs descripti; habebitur etiam ratio incrementi ac decrementi resistentiæ pro velocitate majore vel minore.

Scholium Generale.

Ex his propositionibus, per oscillationes pendulorum in mediis quibuscunque, invenire licet resistentiam mediorum. Aeris

verò resistentiam investigavi per experimenta sequentia. Globum ligneum pondere unciarum *Romanarum* $57\frac{7}{22}$, diametro digitorum *Londinensium* $6\frac{7}{8}$ fabricatum, filo tenui ab unco satis firmo suspendi, ita ut inter uncum & (c) centrum oscillationis globi distantia esset pedum $10\frac{1}{2}$. In filo punctum notavi pedibus decem & unciâ unâ à centro suspensionis distans; & è regione puncti illius collocavi regulam in digitos distinctam, quorum ope notarem longitudines arcuum à pendulo descriptas. Deinde numeravi oscillationes quibus globus octavam motus sui partem amitteret. Si pendulum deducebatur à perpendiculo ad distantiam duorum digitorum, & inde demittebatur; ita ut toto suo descensu describeret arcum duorum digitorum, totâque oscillatione primâ, ex descensu & ascensu subsequente compositâ, arcum digitorum fere quatuor: (d) idem oscillationibus 164 amisit octavam motûs sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti unius cum tribus partibus quartis digiti. Si primo descensu descripsit arcum digitorum quatuor; amisit octavam motûs partem oscillationibus 121, ita ut ascensu ultimo describeret arcum digitorum $3\frac{1}{2}$. Si primo descensu descripsit arcum digitorum octo, sexdecim, triginta duorum vel sexaginta quatuor; amisit octavam motûs partem oscil-

(c) * *Et centrum oscillationis globi.* Quid si centrum oscillationis & quomodo inveniri possit, indicavimus in scholio post notam 478. lib. I. Et ex his quæ ibi dicta sunt, satis liquet in longioribus pendulis graviori globo instructis & filo tenui, centrum oscillationis cum centro globi coincidere quàm proximè.

(d) * *Idem oscillationibus 164. amisit octavam motûs sui partem, sic ut ultimo suo ascensu describeret arcum digiti* $1\frac{3}{4}$.

* Liquet (ex notâ *a* præcedente) quod differentia inter arcum descensu descriptum & arcum ascensu subsequente descriptum sit toti retardationi quam corpus passum est proportionalis, ideoque motui destructo per resistentiæ actionem; ascendat itaque corpus in fine primæ oscillationis ad altitudinem qualemcunque, sumaturque differentia arcûs ascensu descripti ab arcu descensu primo percursi; Secundâ oscillatione corpus ascendere deberet in vacuo ad eam altitudinem ad quam in fine primæ oscillationis assurrexerat, & sumatur quod deest in secundo ascensu ab illâ altitudine, duæ illæ differentiæ sunt ut motus in singulâ oscillatione amissi, earum summa est ergo ut summa motûs amissi in utraque oscillatione, sed duæ illæ differentiæ sunt differentia inter altitudinem è quâ corpus primò descendit, & altitudinem ad quam ultimò assurrexit; Ergo ratiocinio ad 164. oscillationes continuato differentia inter altitudinem è quâ corpus primò descendit, & altitudinem ad quam ultimò assurrexit, est ut summa motûs quem resistentia durantibus illis 164. oscillationibus destruere valuit.

oscillationibus 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$, respectivè. Igitur differentia inter arcus descensû primo & ascensu ultimo descriptos, erat in casu primo, secundo, tertio, quarto, quinto, sexto, digitorum $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 respective. (e) Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum in casu unoquoque, & in oscillatione unâ mediocri, quâ arcus digitorum $3\frac{1}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 descriptus fuit, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum, erit $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ partes digiti respectivè. (f) Hæ autem in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum quàm proximè, in minoribus verò paulò majores quàm in eâ ratione; & propterea (*per corol. 2. prop.* XXXI. *libri hujus*) resisten-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(e) * *Dividantur eæ differentiæ per numerum oscillationum &c.* Exempli causâ, si in primo casu dividatur differentia $\frac{1}{4}$ per numerum oscillationum 164, habebitur $\frac{1}{656}$ differentia inter arcum descensu descriptum & arcum subsequente ascensu descriptum in una mediocri oscillatione; quia differentia $\frac{1}{4}$ ex omnibus differentiis quæ per oscillationes 164 producuntur, composita est; & quia arcus totus unâ mediocri oscillatione descriptus medius est arithmeticè inter arcum maximum fere digitorum 4. primâ oscillatione descriptum, & arcum minimum digitorum $2\frac{1}{2}$ ultimâ oscillatione descriptum, ideo arcus ille mediocris invenitur capiendo dimidium summæ arcuum $4+2\frac{1}{2}$, quod est $3\frac{1}{4}$, aut etiam capiendo summam arcuum dimidiorum, videlicet $2+1\frac{1}{4}$. Atque eodem modo de cæteris ratiocinandum est.

(f) * *Hæ autem in majoribus oscillationibus &c.* * Dividantur omnes arcuum differentiæ in oscillatione mediocri per primam, omnes illæ differentiæ erunt ut 1.; 2. 7107.; 9. 5072., 36. 9577.; 141. 8378.; 542. 8965.

Quadrata verò arcuum sunt ut 1, 4, 16, 64, 256, 1024. unde ex eorum numerorum inspectione liquet differentias 183.
quæ in minoribus oscillationibus observatæ sunt esse ad eas quæ in majoribus arcubus observantur in majore ratione quàm duplicatâ arcuum; In majoribus verò oscillationibus rationes illarum differentiarum ad rationem duplicatam arcuum magis accedunt, ut enim arcus in Progressione duplâ fuere sumpti, ratio duplicata arcuum proximorum est ratio 1 ad 4. jam verò 9. 5072. est non multo major 4â. parte numeri 36. 9577., iste autem ad 4. partem numeri 141. 8378., magis accedit, propius adhuc iste accedit ad quartam partem numeri 542. 8965. Unde inter arcus magnos, motus amissos in duplicatâ fere ratione arcuum sive velocitatum sumi posse deducitur.

Idem manifestius patebit si dividantur hi numeri qui arcuum differentias exprimunt per ipsorum arcuum rationes, habebuntur enim 1.; 1. 3553; 2. 3788; 4. 6197; 8. 8648; 16. 9655, qui si resistentiæ forent ut quadrata velocitatum, deberent esse ut ipsi arcus $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16. Sed ex ipsâ inspectione liquet minores differentias majoribus numeris exprimi quam ipsi arcus, majores verò ferè iisdem. Si verò supponeretur resistentiam non tantùm esse in ratione duplicatâ velocitatum, sed etiam partem aliquam aliun-

ſtentia globi, ubi celerius movetur, eſt in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè; ubi tardiùs, paulò major quàm in eâ ratione.

(g) Deſignet jam V velocitatem maximam in oſcillatione quâvis, ſintque A, B, C quantitates datæ, & fingamus quod differentia arcuum ſit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. (h) Cùm velocitates maximæ ſint in cycloide ut ſemiſſes arcuum oſcillando deſcrip-

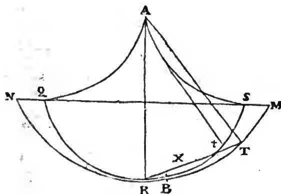
aliunde quàm ex merâ inertiâ materiæ oriundam, eſſe ut velocitas, ideoque cùm hæ quantitates mox inventæ ſint quotientes differentiarum arcuum per velocitates diviſarum, hæ quantitates conſtarent parte conſtante & aliâ parte velocitati ſive arcui proportionatâ.

Sumatur itaque prima quantitas 1, & ordine conferatur cum 2â, tum cùm tertiâ, cum quartâ &c. ſupponaturque illas conſtare duabus partibus altera velocitati proportionata altera conſtanti, v. gr. ſit prima quantitas $1 = a + x$ ſecunda $1.3553 = 2a + x$, iis ita binatim calculatis ut eruatur valor a & x, quantitas conſtans x, in ſingulo calculo eadem non invenietur, ſed varii iſti obtinebuntur valores hoc ordine .6447; .5404; .4829; .4757; .4849, qui decreſcunt ordine quodam regulari (ultimo excepto ob aliqualem exiguum errorem), unde liquet, rationem differentiarum arcuum, non eſſe partim in ratione duplicatâ ipſorum arcuum, & partim in eorum arcuum ratione ſimplici, ſed his adjungi debere rationem aliquam intermediam quàm ſeſquiplicatam arcuum aſſumit *Newtonus*, quod cum experimentis propiùs conſentit.

(g) * *Deſignet jam V velocitatem maximam*, ſive quantitatem velocitati maximæ proportionalem, *in oſcillatione quavis*, *ſintque A, B, C quantitates* conſtantes, quarum valores per experimenta determinabuntur; & fingamus quòd reſiſtentia, ſeu differentia arcuum ipſi proportionalis (*prop.* XXXI.), ſit partim ut velocitas, partim ut velocitatis quadratum, & partim ut velocitatis dignitas cujus index $\frac{3}{2}$, & proinde *ſupponamus quod arcuum differentia ſit* $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$ *&c.*

(h) * *Cùm velocitates maximæ &c.* Corpus pendulum in medio non reſiſtente oſcilletur in cycloide SBRQ, ſitque A punctum ſuſpenſionis, & R punctum infimum ac medium arcûs totius SRQ. Centro A & radio AR deſcribatur arcus circuli MTRN, in quo corpus idem, vel aliud ſimile & æquale oſcilletur in eodem medio non reſiſtente. Sit TR arcus circularis æqualis arcui cycloidis tR, & RB arcus quàm minimus cycloidi & circulo communis (465. *lib.* I.). Jam ſi corpus è locis T & B ſucceſſivè cadat in circulo, erit ipſius velocitas maxima in R deſcenſu per arcum TR acquiſita, ad velocitatem deſcenſu per arcum BR acquiſitam, ut chorda TXR ad chordam arcûs RB (88. lib. I.), aut, quod idem eſt (*per lemma VII. lib.* I.), ut chorda TXR ad arcum cycloidis BR; & velocitas deſcenſu per arcum BR acquiſita in R eſt ad velocitatem maximam deſcenſu per arcum cycloidis tBR acquiſitam, ut arcus BR ad arcum tBR ſeu arcum circuli æqualem TBR (*per demonſtr. prop. LI. lib.* I.). Quare, ex æquo, velocitas maxima in R deſcenſu per arcum circularem TBR acquiſita eſt ad velocitatem maximam in R deſcenſu per cycloidis arcum tBR acquiſitam, ut chorda RT ad arcum tBR vel TBR. Sunt autem velocitates maximæ in medio reſiſtente velocitatibus maximis in medio non reſiſtente proportionales quàm proximè, & in puncto medio arcuum qui oſcillatione integrâ deſcribuntur, ferè contingunt (180). Paribus igitur arcubus, velocitates maximæ in cycloide ſunt ad velocitates maximas in circulo, ut ſemiſſes

cri[?]torum, in circulo verò ut femiffium arcuum illorum chordæ; ideoque paribus arcubus majores fint in cycloide quam in circulo, in ratione femiffium arcuum ad eorundem chordas; (i) tempora autem in circulo fint majora quàm in cycloide



miffe arcuum ofcillando defcriptorum ad eorumdem arcuum circularium chordas, quam proximè; & ideo, paribus arcubus majores funt in cycloide quàm in circulo in ratione femiffium arcuum ad eorumdem chordas in circulo ductas.

(i) * *Tempora autem in circulo funt majora quam in Cycloide in velocitatis ratione reciprocá.* * Id eft, tempora in circulo funt ad tempus in arcu quovis Cycloidis, ut femiffis arcus circuli ofcillando defcripti ad ejufdem femiffis chordam, five invertendo & temporum dimidia fumendo, tempus femiofcillationis in Cycloide eft ad tempus femiofcillationis in circulo (pendulis exiftentibus ejufdem longitudinis) ut chorda arcus defcripti ad ipfum arcum, quæ quidem proportio proximè tantùm obtinet.

* Eft enim tempus ofcillationis integræ cujufvis in Cycloide ad tempus defcenfûs per dimidiam penduli longitudinem ut femiperipheria ad radium (*vide not.* 470. *ad Prop. LII. lib. I.*) ideoque etiam tem-
pus femiofcillationis in cycloide ad tem- 183.
pus illud defcenfûs per dimidiam penduli longitudinem ut quadrans circuli ad radium, fed tempus defcenfus per quadruplum dimidiæ longitudinis penduli, five tempus defcenfûs per Diametrum circuli cujus pendulum eft radius, eft duplum temporis defcenfus per dimidiam penduli longitudinem, ideoque tempus femiofcillationis in Cycloide eft ad tempus defcenfûs per Diametrum circuli cujus longitudo penduli eft radius, ut circuli quadrans ad Diametrum. Sed, ratio temporis lapfûs per Diametrum circuli ad tempus femiofcillationis in arcu ejufdem circuli eft (ut mox liquebit) compofita ex ratione Diametri ad quadrantem circuli & chordæ ad arcum, quàm proximè, unde ex æquo erit tempus in Cycloide ad tempus in circulo ut chorda circuli ad ejus arcum ofcillando defcriptam. Rationem autem temporis defcenfus per Diametrum circuli ad tempus femiofcillationis in arcu ejus circuli effe compofitam ex ratione Diametri ad qua-

de in velocitatis ratione reciprocâ; patet arcuum differentias (quæ quadrantem circuli & ex ratione chordæ ad arcum oscillando descriptum, saltem quam proximè, sequenti calculo constabit.

Descendat itaque corpus per arcum L B centro C descriptum & Diametro A B, sit t tempus quæsitum quo corpus descendit per eum arcum L B, sitque b tempus datum quo corpus labitur per Diametrum A B, & quo velocitate per eum lapsum in B acquisitâ posset describere uniformiter duplum A B sive 2 A B, sumatur in arcu L B portiuncula infinitè parva M m quam corpus descendens uniformiter describere censeatur tempore infinitè parvò dt, ducanturque ex punctis L & M lineæ L H, M E in diametrum perpendiculares; Cùm tempora quibus spatia data uniformiter describuntur sint ut illa spatia directè & velocitates quibus percurruntur inversè, sitque velocitas quæ in B acquisita est per lapsum ex A B ad velocitatem per lapsum ex L in M, sive ex H in E acquisitam, ut $\sqrt{AB}$ ad $\sqrt{HE}$, erit $b : dt = \frac{2AB}{\sqrt{AB}} : \frac{Mm}{\sqrt{HE}}$; Dicatur ergo $AB = 1$; $HB = h$, $BE = x$, $EM = y$; $HE = h - x$ erit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, est autem $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ & ex naturâ circuli (cùm sit $yy = x - xx$, & $2y\,dy = dx - 2x\,dx$, sive $dy = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-xx}})\,dx$ invenietur $\sqrt{dx^2+dy^2} = \pm\frac{dx}{2\sqrt{x-xx}}$, & quoniam dum crescit B E decrescit L M est $Mm = -\frac{-dx}{2\sqrt{x-xx}}$, resolvatur ergo $\frac{1}{\sqrt{x-xx}}$ in seriem per formulam *Newtonianam* invenietur $\frac{1}{\sqrt{x-xx}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{2\times 4}$ &c. ideoque M m sive $\frac{-dx}{2\sqrt{x-xn}} = \frac{1}{2}\times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}$ &c. Pariter resolvatur $\frac{1}{\sqrt{h-x}}$ in seriem per eamdem formulam erit $\frac{1}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{x}{2\,h^{\frac{3}{2}}} + \frac{3x^2}{2\times 4h^{\frac{5}{2}}}$ &c. $= \frac{1}{h^{\frac{1}{2}}}\times 1 + \frac{x}{2h} + \frac{3x^2}{2\times 4h^2}$ &c. Ductis ergo per se mutuo his seriebus

$$\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\times - \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2} - \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4}\text{ \&c}$$

$$- \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{2h} - \frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 2h} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 4\times 2h}\text{ \&c.}$$

$$- \frac{3x^{\frac{3}{2}}dx}{2\times 4h^2} - \frac{3x^{\frac{5}{2}}dx}{2\times 2\times 4h2} - \frac{3\times 3x^{\frac{7}{2}}dx}{2\times 4\times 2\times 4h^2}\text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

ideoque integralis

$$S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}} = \frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}}\times - 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3} - \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5}\text{ \&c.}$$

$$- \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{2\times 3h^1} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{2\times 2\times 5h} - \frac{2\times 3x^{\frac{7}{2}}}{2\times 4\times 2\times 7h}\text{ \&c.}$$

$$- \frac{2\times 3x^{\frac{5}{2}}}{2\times 4\times 5h^2} - \frac{2\times 2x^{\frac{7}{2}}}{2\times 2\times 4\times 7h^2} - \frac{2\times 2\times 3x^{\frac{9}{2}}}{2\times 4\times 2\times 4\times 9h^2}\text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Cùm ergo sit $b : dt = 2 : \frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$ erit $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-x}}$, sed quando t fit o, tunc est $h = x$ ideoque Integralis quæsita in hanc mutatur, (posito ubique h pro x)

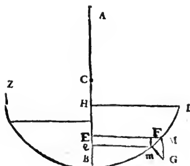
$$S.\frac{Mm}{h-x} = - 1 - \frac{h}{2\times 3} - \frac{3h2}{2\times 4\times 5}\text{ \&c.}$$

$$- \frac{1}{2\times 3} - \frac{h}{2\times 2\times 5} - \frac{3h^2}{2\times 4\times 2\times 7}\text{ \&c.}$$

$$- \frac{3}{2\times 4\times 5} - \frac{2h}{2\times 2\times 4\times 7} - \frac{2\times 2\times 3h^2}{2\times 4\times 2\times 4\times 9}\text{ \&c.}$$

&c. &c. &c.

Ideoque hæc est quantitas illa constans quæ debet tolli ex valore integralis quæ in proportione $b : t = 2 : S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ pro $S.\frac{Mm}{\sqrt{h-n}}$ adhibetur, quæcumque assumatur valor in-



indeterminatæ x; sed ubi totus arcus L B est descriptus, tunc x fit o, & evanescit prior series $\frac{1}{2h^{\frac{1}{2}}} \times -2\, x^{\frac{1}{2}}$ &c. ergo in eo casu integralis $S.\frac{\text{M m}}{\sqrt{h-x}}$ est æqualis soli quantitati illi constanti adsumptæ cum signis mutatis, ideoque est,

$$b : t = 2 : \quad 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3\,h^2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times2\times5} \text{ \&c.}$$
$$+ \frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Jam autem cùm M m, sit æqualis seriei $\frac{1}{2} \times \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}\,dx}{2} + \frac{d\,x^{\frac{3}{2}}\,dx}{2\times4}$ &c. ejus integralis est $\frac{1}{2} \times 2\,x^{\frac{1}{2}} + \frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{2\times3} + \frac{2\times3\,x^{\frac{5}{2}}}{2\times4\times5}$ &c. $= \sqrt{x} \times 1 + \frac{1}{2\times3} + \frac{3\,x^2}{2\times4\times5}$ &c. in qua si fiat $x = 1$ habebitur semiperipheria circuli, & si fiat $x = h$ habebitur arcus L B, tumque illæ duæ series in has abibunt

$$1 + \frac{1}{2\times3} + \frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&} \sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3\,h^2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$

Quæ si per se mutuo ducantur, earum factum erit 183.

$$\sqrt{h} \times 1 + \frac{h}{2\times3} + \frac{3\,h^2}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\frac{1}{2\times3} + \frac{h}{2\times3\times2\times3} \text{ \&c.}$$
$$\frac{3}{2\times4\times5} \text{ \&c.}$$
$$\text{\&c.}$$

Sed termini hujus seriei saltem primi, iidem sunt cum terminis seriei superius inventæ pro valore $S.\frac{\text{M m}}{\sqrt{h-x}}$, sit ergo arcus L B $= a$, Peripheria circuli cujus Diameter est 1 sit p, erit $\sqrt{h} \times S.\frac{\text{M m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{a\,p}{2}$, sive $S.\frac{\text{M m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{a\,p}{2\sqrt{h}}$, sed $\sqrt{h}$ est æqualis chordæ L B, ex naturâ circuli, quæ si dicatur c, erit $S.\frac{\text{M m}}{\sqrt{h-x}} = \frac{a\,p}{2\,c}$. Unde tandem est $b : t = 2 : \frac{a\,p}{2\,c} = 1 : \frac{a\,p}{4\,c} = 1 \times c : a \times \frac{p}{4}$ sive est b tempus descensus per Diametrum vel per chordam quamlibet ad t tempus descensus per arcum in ratione compositâ ex ratione Diametri 1 ad $\frac{p}{4}$ sive quadrantem peripheriæ, & ex ratione chordæ c ad arcum a. Q. E. D.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

(quæ (k) sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim) easdem fore, quamproximè, in utráque curvá: (†) deberent enim differentiæ illæ in cycloide augeri, unà cum resistentia, in duplicatà circiter ratione arcûs ad chordam, ob velocitatem in ratione illâ simplici auctam; & diminui, unà cum quadrato temporis, in eâdem duplicatâ ratione. Itaque ut reductio fiat ad cycloidem, eædem sumendæ sunt arcuum differentiæ quæ fuerunt in circulo observatæ, velocitates verò maximæ ponendæ sunt arcubus vel dimidiatis vel integris, hoc est, numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16 analogæ. Scribamus ergo in casu secundo, quarto & sexto, numeros 1, 4 & 16 pro V; & prodibit arcuum differentia $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ in casu secundo; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ in casu quarto; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in casu sexto. Et ex his æquationibus, (l) per debitam collationem & reductionem analyticam, fit $A = 0,0000916$, $B = 0,0010847$, & $C = 0,0029558$. Est igitur differentia arcuum ut $0,0000916\,V + 0,0010847\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0029558\,V^2$: & propterea cum (per corollarium propositionis XXX. applicatum ad hunc casum) resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, (m) sit ad ipsius pondus A

$\frac{7}{11}$ A

(k) * *Quæ sunt ut resistentia & quadratum temporis conjunctim.* (per cor. 3. lem. X). Resistentia enim considerari potest ut vis quæ retardationem producit, & differentia arcuum ut spatium quod corpus vi illâ mediocri ac constante sollicitatum describeret. Hinc arcuum differentiæ erunt quam proxime ut *resistentia directè & quadratum temporis conjunctim.*

(†) * *Deberent differentiæ in Cycloide augeri unà cum resistentia in duplicatâ circiter ratione, arcus ad chordam ob velocitatem in ratione illa simplici auctam*, quia scilicet pars maxima resistentiæ est ut quadrata velocitatum.

(l) * *Per debitam collationem.* Prima æquatio est $\frac{\frac{1}{2}}{121} = \frac{1}{2 \times 121} = A + B + C$. 2ª. divisa per 4. est $\frac{1}{71} = A + 2B + 4C$, & tertia divisa per 16. est $\frac{3}{58} = A + 4B + 16C$. Ex his autem æquationibus facile eruuntur valores literarum A, B, C, si fractiones $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{71}$, & $\frac{3}{58}$ ad decimales reducantur.

(m) * *Sit ad ipsius pondus.* AV est pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem illam quæ est ut velocitas

: BV

$\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B & B scribantur numeri inventi, fiet resistentia globi ad ejus pondus, ut $0,0000583\,V + 0,0007593\,V^{\frac{3}{2}} + 0,0022169\,V^2$ ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digitos. Unde cùm V in casu secundo designet 1, in quarto 4, in sexto 16: erit resistentia ad pondus globi in casu secundo ut 0, 0030345 ad 121, in quarto ut 0, 041748 ad 121, in sexto ut 0, 61705 ad 121.

Arcus quem punctum in filo notatum in casu sexto descripsit, erat $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ seu $119\frac{5}{29}$ digitorum. Et propterea cùm radius esset 121 digitorum, & longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum globi esset 126 digitorum, arcus quem centrum globi descripsit (n) erat $124\frac{3}{31}$ digitorum. Quoniam corporis oscillantis velocitas maxima, ob resistentiam aeris, non incidit in punctum infimum arcus descripti, (o) sed in medio ferè loco arcus totius versatur: hæc eadem erit circiter ac si glo-

$BV^{\frac{3}{2}}$, pars differentiæ arcuum genita per resistentiæ partem quæ est in sesquiplicatâ ratione velocitatis; & CV^2 pars differentiæ arcuum producta per resistentiæ totius partem quadrato velocitatis proportionalem (*per cor. 4. prop. 31*). Sed (*per cor. prop. 30.*) si resistentia sit ut velocitas, est $\frac{7}{11}AV$ ad longitudinem penduli ut corporis oscillantis resistentia in puncto medio arcûs descripti ad ejusdem pondus; si resistentia sit ut velocitatis quadratum, resistentia illa in puncto medio arcûs descripti est ad corporis pondus ut $\frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, & (181) si resistentia sit in ratione sesquiplicatâ velocitatis, est illa ad corporis pondus ut $\frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}}$ ad longitudinem penduli. Quarè cum hic supponatur resistentia partim in ratione velocitatis, partim in velocitatis ratione sesquiplicatâ & partim in duplicatâ, resistentia globi in medio arcus oscillando descripti, ubi velocitas est V, erit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$, ad longitudinem penduli. 183.

(n) * *Erat* $124\frac{3}{31}$ *digit.* Sunt enim radii ut similes circulorum arcus, & ideò radius 121, est ad suum arcum $119\frac{5}{29}$ ut radius 126, ad arcum correspondentem $124\frac{3}{31}$ quamproximè.

(o) * *Sed in medio ferè loco.* Patet per not. 180.

globus descensu suo toto in medio non resistente (p) describeret arcus illius partem dimidiam digitorum $62\frac{1}{12}$, idque in cycloide, ad quam motum penduli supra reduximus: & propterea velocitas illa æqualis erit velocitati quam globus, perpendiculariter cadendo & casu suo describendo altitudinem arcus illius sinui verso æqualem, acquirere posset. Est autem sinus ille versus in cycloide ad arcum istum $62\frac{1}{12}$ ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam 252, & propterea æqualis

(p) * *Describeret arcûs illius partem dimidiam.* Corpus oscillando describat arcum B a in medio resistente & arcum B A in medio non resistente; sit C punctum cycloidis infimum; O, punctum medium arcûs B a, & arcûs CD sit æqualis arcui BO, velocitas maxima descensu corporis per arcum B O acquisita in medio resistente est ad velocitatem maximam per arcum B C acquisitam in medio resistente ut arcus B O, ad arcum BC (180). Sed si corpus è loco D in medio non resistente cadendo describat arcum D C, erit etiam velocitas ipsius in C descensu per arcum D C acquisita ad velocitatem acquisitam ibidem descensu per arcum B C ut arcus C D, vel æqualis B O ad arcum B C, (*prop.* 51. *lib.* 1). Ergò velocitas in medio resistente per arcum B O acquisita in O æqualis est velocitati quam corpus in medio non resistente cadendo per arcum D C = B O haberet in C; & propterea (85. *lib.* 1. velocitas illa æqualis est velocitati quam corpus perpendiculariter cadendo in medio non resistente, & casu suo describendo altitudinem F C æqualem sinui verso arcûs CD, acquirere posset. Sit jam P punctum suspensionis, P C longitudo penduli S D C semicycloidis, S G & D F ad P C normales, & C H G C circulus diametro G C descriptus secans D F in H. Jungatur chorda C H, & erit arcus cycloidis S D = 2 G C—2 C H, & arcus S E = 2 G C (462. *lib.* 1.) ideóque arcus D C = 2 C H. Est autem (ex naturâ circuli) C F ad C H ut C H ad C G, & hinc C F ad 2 C H seu D C, ut 2 C H ad 4 C G, sive ut D C ad 2 P C; Hoc est, sinus versus C F, ad arcum C D, ut arcus idem ad penduli longitudinem duplam.

lis digitis 15, 278. Quare velocitas ea ipsa est quam corpus cadendo & casu suo spatium 15, 278 digitorum describendo acquirere posset. Tali igitur cum velocitate globus resistentiam patitur, quæ sit ad ejus pondus ut 0,61705 ad 121, vel (si (q) resistentiæ pars illa sola spectetur quæ est in velocitatis ratione duplicatâ) ut 0, 56752 ad 121.

(r) Experimento autem hydrostatico inveni quod pondus globi hujus lignei esset ad pondus globi aquei magnitudinis ejusdem ut 55 ad 97: & propterea cum 121 sit ad 213, 4 in eâdem ratione, erit resistentia globi aquei præfatâ cum velocitate progredientis (s) ad ipsius pondus ut 0, 56752 ad 213, 4, id est, ut 1 ad $376\frac{1}{50}$. Unde cùm pondus globi aquei, quo tempore globus cum velocitate uniformiter continuatâ (t) describat longitudinem digitorum 30, 556, velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset; (u) manifestum est quod vis resistentiæ eodem tempore uniformiter continuata tollere posset velocitatem minorem in ratione 1 ad $376\frac{1}{50}$, hoc est, velocitatis totius partem $\frac{1}{376\frac{1}{50}}$.

Et

(q) * *Si resistentia pars illa sola &c.* Si enim in quantitate, 0, 0022169 V^2 quæ est ad longitudinem penduli ut resistentiæ pars velocitatis quadrato proportionalis ad corporis pondus loco V scribatur 16, & loco V^2 scribatur 256, fiet 0, 0022169 V^2 = 0, 56752, quamproximè.

(r) * *Experimento autem hydrostatico.* Experimentum facile est. Cùm enim corpus fluido immersum, eâdem vi sursum urgeatur quâ par fluidi volumen sustinetur, id est, vi quæ æqualis est ponderi fluidi ejusdem magnitudinis (*cor.* 5. *&* 6. *prop.* 20. *lib. hujus*) corpus fluido specificè leviori immersum ponderis sui partem amittet æqualem ponderi fluidi ejusdem voluminis; & propterea si corpus illud fluido immersum ponderetur, cognoscetur pondus fluidi ejusdem magnitudinis cum corpore. Si fluidum corpore immergendo specificè gravius sit, corpori illi adjungi potest aliud corpus majoris gravitatis specificæ ut eorum summa fluido specificè gravior fiat.

(s) *Ad ipsius pondus.* Resistentia globi solidi æqualis est resistentiæ globi aquei ejusdem magnitudinis & cum eâdem velocitate in eodem medio progredientis, sed resistentia globi solidi est ad ejusdem pondus ut 0, 56752 ad 121, & pondus globi solidi ad pondus globi aquei ut 121 ad 213. 4, seu ut 1 ad $376\frac{1}{50}$ quamproximè.

(t) * *Describat longitudinem digit.* 30, 556, duplam nimirum longitudinis digitorum 15. 278, quæ velocitatem illam omnem in globo cadente generare posset (29. lib. 1.).

(u) * *Manifestum est.* Sunt enim velocitates dato tempore genitæ vel extinctæ, ut vires quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.).

183.

Et propterea quo tempore globus, eâ cum velocitate uniformiter continuatâ, longitudinem semidiametri suæ, seu digitorum $3\frac{7}{16}$, describere posset, (x) eodem amitteret motûs sui partem $\frac{1}{3342}$.

Numerabam etiam oscillationes quibus pendulum quartam motûs sui partem amisit. In sequente tabulâ numeri supremi denotant longitudinem arcûs descensu primo descripti, in digitis & partibus digiti expressam: numeri medii significant longitudinem arcûs ascensu ultimo descripti; & loco infimo stant numeri oscillationum. Experimentum descripsi tanquam magis accuratum quàm cùm motûs pars tantùm octava amitteretur. (y) Calculum tentet qui volet.

Des-

(x) * *Eodem amitteret motûs sui partem.* Nam velocitates eâdem vi constante vel extinctæ sunt ut tempora quibus generantur vel extinguuntur (13. *lib.* 1.), sed tempora quibus corpora duo eâdem velocitate uniformi percurrunt longitudines digit. 30,556, & digit. $3\frac{7}{16}$, sunt ut hæ longitudines (5 *lib.* 1.). Quarè velocitates amissæ sunt ut eædem longitudines, & ideò 30,556 ad $3\frac{7}{16}$, ut $\frac{1}{376\frac{1}{56}}$ ad velocitatem amissam eo tempore quo globus longitudinem semidiametri suæ seu digit. $3\frac{7}{16}$, percurrit; undè invenitur velocitas illa amissa $= \frac{1}{3342}$, quamproximè.

(y) * *Calculum tentet.* Quoniam experimentum magis accuratum est, calculum tentabimus. Erunt igitur differentiæ arcuum primo descensu & ultimo ascensu descriptorum.

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16.

Arcus in unâ mediocri oscillatione descripti, sunt

$3\frac{1}{2}$, 7, 14, 28, 56, 112.

Differentiæ arcuum descensu & subsequente ascensu in unâ mediocri oscillatione descriptorum, sunt

$\frac{\frac{1}{2}}{374}$, $\frac{1}{272}$, $\frac{2}{162\frac{1}{2}}$, $\frac{4}{83\frac{1}{3}}$, $\frac{8}{41\frac{2}{3}}$, $\frac{16}{22\frac{2}{3}}$

sive ut 1. 2. 7500; 9. 2061; 35. 5040; 143. 7760; 528. 5882

Hæ autem differentiæ in majoribus oscillationibus sunt in duplicatâ ratione arcuum descriptorum satis proximè; Nam $\frac{8}{41\frac{2}{3}} : \frac{16}{22\frac{2}{3}} = 34 : 125$, & $34 : 126 = 1 : 4$; hoc est, in duplicatâ ratione arcuum descriptorum. Et similiter $\frac{4}{83\frac{1}{3}} : \frac{8}{41\frac{2}{3}} = 1 : 4$, accuratè; in minoribus verò oscillationibus, differentiæ illæ sunt in ratione paulò majore quam duplicatâ arcuum descriptorum. Est enim $\frac{1}{272} : \frac{1}{162\frac{1}{2}} = 325 : 1088$ & hæc ratio major est ratione 1 ad 4. Designet jam V, ut suprà, velocitatem maximam in oscillatione quâvis, & $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$, differentiam arcuum; & quoniam velocitates ponendæ sunt arcubus descriptis scil. numeris $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, analogæ, scribamus in cas. 2°. 4°. & 6°. numeros 1, 4, 16, pro V, & prodibit arcuum differentia $\frac{1}{272} = A + B + C$ in cas. 2°. $\frac{4}{83\frac{1}{3}} = 4A + 8B + 16C$ in cas.

Descensus primus	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Postea globum plumbeum diametro digitorum 2, & pondere unciarum *Romanarum* $26\frac{1}{4}$ suspendi filo eodem, sic ut inter centrum globi & punctum suspensionis intervallum esset pedum $10\frac{1}{2}$, & numerabam oscillationes quibus data motûs pars amitteretur. Tabularum subsequentium prior exhibet numerum oscillationum quibus pars octava motûs totius cessavit: secunda numerum oscillationum quibus ejusdem pars quarta amissa fuit.

Des-

cas. 4°. & $\frac{16}{22\frac{1}{3}} = 16A + 64B + 256C$ in cas. 6°. Ex his æquationibus habetur $A = 0{,}0005096$, $B = 0{,}0005884$, & $C = 0{,}0025784$. Est igitur differentia arcuum ut $0{,}0005096\,V + 0{,}0005884\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0025784\,V^2$, & propterea cùm resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli, fiet resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}0003243\,V + 0{,}0004119\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}0019338\,V^2$, ad longitudinem penduli inter centrum suspensionis & regulam, id est, ad 121 digit. Unde cùm V in cas. 2°. designet 1; in 4°. 4, in 6°. 16; erit resistentia ad pondus globi in cas. 2°. ut 0,0267 ad 121; in 4°. ut 0,0355332 ad 121; in 6°, ut 0,5266032 ad 121.

Ponatur resistentia in tardioribus motibus partim uniformis & partim velocitati, partim velocitatis quadrato proportionalis, ideòque arcuum differentia sit $A + BV + CV^2$, & scribamus in cas. 1°. 2°. & 3°. numeros 1, 2, 4, pro V, prodibunt æquationes $A + B + C = \frac{1}{748}$, $A + 2B + 4C = \frac{1}{272}$, & $A + 4B + 16C = \frac{4}{323}$, ex quibus eruitur $A = 0{,}00034$; $B = 0{,}0003255$, & $C = 0{,}0006714$; & propterea cùm (*per cor. prop.* 30.) resistentia globi in medio arcûs oscillando descripti, ubi velocitas est V, sit ad ipsius pondus ut $\frac{1}{2}A + \frac{7}{11}BV + \frac{3}{4}CV^2$ ad longitudinem penduli; si pro A, B, & C, scribantur numeri inventi, sint resistentia globi ad ejus pondus ut $0{,}00017 + 0{,}0002071\,V + 0{,}0005035\,V^2$ ad 121, id est, in 1°. cas. ut 0,0008806 ad 121; in 2°. cas. ut 0,0025982 ad 121; in 3°. cas. ut 0,0090544, ad 121; resistentia verò uniformis erit ad pondus globi ut 0,00017 ad 121, seu ut 1, ad 735294. 183.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Numerus Oscillat.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

Descensus primus	1	2	4	8	16	32	64
Ascensus ultimus	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Numerus Oscillat.	510	518	420	318	204	121	70

In tabulâ priore ſeligendo ex obſervationibus tertiam, quintam & ſeptimam, & exponendo velocitates maximas in his obſervationibus particulatim per numeros 1, 4, 16 reſpectivè, & generaliter per quantitatem V ut ſupra: emerget in obſervatione tertiâ $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, in quintâ $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4\,A + 8\,B + 16\,C$, in ſeptimâ $\frac{8}{30} = 16\,A + 64\,B + 256\,C$. Hæ verò æquationes reductæ dant $A = 0{,}001414$, $B = 0{,}000297$, $C = 0{,}000879$. Et inde prodit reſiſtentia globi cum velocitate V moti in eâ ratione ad pondus ſuum unciarum $26\frac{1}{4}$, quam habet $0{,}0009\,V + 0{,}000208\,V^{\frac{3}{2}} + 0{,}000659\,V^2$ ad penduli longitudinem 121 digitorum. Et ſi ſpectemus eam ſolummodo reſiſtentiæ partem quæ eſt in duplicatâ ratione velocitatis, hæc erit ad pondus globi ut $0{,}000659\,V^2$ ad 121 digitos. Erat autem hæc pars reſiſtentiæ in experimento primo ad pondus globi lignei unciarum $57\frac{7}{22}$ ut $0{,}002217\,V^2$ ad 121: (z) & inde fit reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei (paribus eorum velocitatibus) ut $57\frac{7}{22}$ in $0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4}$ in

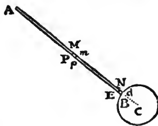
(z) *Et indè fit reſiſtentia.* Eſt enim (*ex dem.*) reſiſtentia globi lignei $57\frac{7}{22} \times \frac{0{,}002217}{121}$; & reſiſtentia globi plumbei $26\frac{1}{4} \times \frac{0{,}000659}{121}$, ideóque reſiſtentia globi lignei ad reſiſtentiam globi plumbei ut $57\frac{7}{22} \times 0{,}002217$ ad $26\frac{1}{4} \times 0{,}000659$ id eſt, $7\frac{1}{3}$ ad 1.

in o, 000659, id est, ut $7\frac{1}{2}$ ad 1. Diametri globorum duorum erant $6\frac{7}{8}$ & 2 digitorum, & harum quadrata sunt ad invicem ut $47\frac{1}{4}$ & 4, seu $11\frac{13}{16}$ & 1 quamproximè. Ergo resistentiæ globorum æquivelocium erant in minore ratione quàm duplicatâ diametrorum. ([a]) At nondum consideravimus resistentiam fili, quæ certè permagna erat, ac de pendulorum inventâ resistentiâ subduci debet. Hanc accuratè definire non potui, sed majorem tamen inveni quàm partem tertiam resistentiæ totius minoris penduli; & inde didici quod resisten-tiæ

(a) 184. *At nondum consideravimus* &c. 184.

PROBLEMA.

Fili tensi oscillantis resistentiam invenire in medio cujus resistentia est ut velocitatis & diametri globi quadrata conjunctim.



Filum cylindricum homogeneum A B, circà punctum A, oscilletur, sitque ejus longitudo $AB = a$, diameter $EN = 2b$, globi C, diameter $= 2r$, longitudo variabilis $AP = x$, $Pp = dx$; & cylindruli evanescentis P M, velocitas erit ut distantia A P, ejusque proindè resistentia ut $xx\,dx$, sive ut altitudo cylindruli P p & quadratum velocitatis conjunctim; & hinc, sumptâ fluente, resistentia fili A P, fit ut $\frac{1}{3}x^3$, & totius fili A B resistentia ut $\frac{1}{3}a^3$. Capiatur in B, cylindrulus B N, cujus altitudo B E sit æqualis diametro fili E N, seu $2b$, & resistentia fili A E, erit ut $\frac{1}{3}(a-2b)^3$, ideoque cylindri B N resistentia ut $\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}(a-2b)^3$. Est igitur resistentia fili totius A B, ad resistentiam cylindri B N, ut a^3 ad $a^3 - (a-2b)^3$; sed ut infra prop. 34. demonstrabitur, cylindri B N resistentia est ad resistentiam globuli huic cylindro inscripti ut 2 ad 1, & resistentia globuli hujus est ad resistentiam globi C, in ratione quamproxime compositâ ex ratione quadrati diametri E N, ad quadratum diametri 2 B C, & ratione quadrati velocitatis globuli ad quadratum velocitatis globi C hoc est, ut $bb(a-b)^2$ ad $rr(a+r)^2$. Quarè (per compositionem rationum & ex æquo) resistentia fili A B, est ad resistentiam globi C, ut $2a^3bb(a-b)^2$, ad $a^3rr(a+r)^2 - rr(a+r)^2 \times (a-2b)^3$, seu ponendo $a+r=c$, ut $a^3b(a-b)^2$ ad $3a^2rrcc - 6abrrcc + 4bbrrcc$; & hinc resistentia fili ad resistentiam totius penduli ut $a^3b(a-b)^2$, ad $a^3b(a-b)^2 + rrcc(3aa-6ab+4bb)$ Q. E. I.

185. *Coroll.* Si fili semidiameter b; sit admodum exigua respectu longitudinis ejusdem a, erit ferè $3aa-6ab+4bb = 3aa-6ab+3bb = 3(a-b)^2$. Quare fili resistentia erit ad resistentiam globi ut a^3b ad $3rrcc$, & ad resistentiam totius penduli ut a^3b ad $a^3b + 3rrcc$. Exempli causâ. Sit $c = 126$. digit. $r = 1$ digit. $a = 125$ digit. $b = \frac{1}{100}$ digit. & resistentia fili erit ad resistentiam totius penduli ut 1953125 ad 4762800, seu ut 1 ad 2,438 quamproximè.

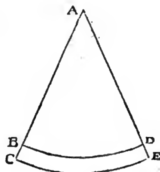
 186. In-

tiæ globorum, demptâ fili resistentiâ, sunt quam proxime in duplicatâ ratione diametrorum. Nam ratio $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ ad $1 - \frac{1}{3}$, seu $10\frac{1}{2}$ ad 1 non longe abest à diametrorum ratione duplicata $11\frac{13}{16}$ ad 1.

Cùm resistentia fili in globis majoribus minoris sit momenti, tentavi etiam experimentum in globo cujus diameter erat $18\frac{3}{4}$ digitorum. Longitudo penduli inter punctum suspensionis & centrum oscillationis erat digitorum $122\frac{1}{2}$, inter punctum suspen-

186. Inveniri etiam potest pars illa resistentiæ fili quæ uniformis est, quæque in tardioribus motibus observatur; posito quod uniformis illa resistentia fili sit ad uniformem resistentiam globi, ut spatium solidum quod filum oscillando describit ad spatium solidum quod describit globus. Filum cylindricum A B oscillatione unâ describat spatium solidum seu prisma cujus basis est sector circularis A B D, & altitudo diameter fili, interea dum globi centrum C, describit arcum C E, diameter fili dicatur $1\ R$, & spatium à filo descriptum erit $R \times AB \times BD$; spatium verò a globo descriptum est factum ex area circuli cujus radius B C, in arcuum C E quem centrum C describit; seu est $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$. Quarè uniformis resistentia fili est ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB \times BD$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times CE$, hoc est, ob rectas A B, A C arcubus B D, C E proportionales, ut $R \times {}^2 AB^2$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$, totaque uniformis resistentia penduli ad uniformem resistentiam globi ut $R \times AB^2 + \frac{22}{7} BC^2 \times AC$ ad $\frac{22}{7} BC^2 \times AC$.

Exempli causâ. Sit $R = \frac{1}{100}$ digit. $AC = 126$ digit. $BC = 3\frac{7}{16}$, $AB = 122\frac{9}{16}$ ut in experimentis primo ac secundo,



& invenietur uniformis resistentia fili ad uniformem resistentiam globi ut 1 ad 31. circiter, & ideo resistentia fili est resistentiæ totius penduli pars $\frac{1}{32}$. Cùm igitur supra inventa sit resistentia uniformis ad pondus globi lignei ut 1 ad 735294, subductâ resistentiâ fili, erit uniformis resistentia globi lignei ad ejusdem pondus unciar. Rom. $57\frac{7}{22}$ ut 1 ad 760000 circiter. Quæramus nunc resistentiam uniformem globi plumbei in ultimo experimento. Mediocres arcuum differentiæ in primâ tabulâ sumptæ sunt in cas. 1°. 2°. & 3°. $\frac{1}{1808}$, $\frac{1}{912}$, & $\frac{1}{386}$, respectivè. Loco V, in quantitate $A + BV + CV^2$, scribantur successivè numeri 1, 2, & 4, & prodi-

penſionis & nodum in filo $109\frac{1}{2}$ dig. Arcus primo penduli deſcenſu à nodo deſcriptus 32 dig. Arcus aſcenſu ultimo poſt oſcillationes quinque ab eodem nodo deſcriptus 28 dig. Summa arcuum ſeu arcus totus oſcillatione mediocri deſcriptus 60 dig. Differentia arcuum 4 dig. (b) Ejus pars decima ſeu differentia inter deſcenſum & aſcenſum in oſcillatione mediocri $\frac{2}{5}$ dig. Ut radius $109\frac{1}{2}$ ad radium $122\frac{1}{2}$, ita arcus totus 60 dig. oſcillatione mediocri à nodo deſcriptus ad arcum totum $67\frac{1}{8}$ dig. oſcillatione mediocri à centro globi deſcriptum; & ita dif-

dibunt æquationes $A+B+C=\frac{1}{1808}$; $A+2B+4C=\frac{1}{912}$, & $1A+4B+16C=\frac{1}{386}$, ex quibus habetur $A=0{,}0001455$ $B=0{,}0004076$, & $C=0{,}0000679$. Unde reſiſtentia uniformis eſt ad pondus globi unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut $\frac{1}{2}A$ ſeu 0,0000728 ad 121, id eſt, ut 1 ad 1662088. Jam verò cùm in hoc experimento ſit $AC=126$ digit. $BC=1$, $AB=125$, ſi ponatur $R=\frac{1}{100}$ digit. invenitur uniformis reſiſtentia fili ad reſiſtentiam uniformem globi ut 15625 ad 39600, ſivè ferè ut 2 ad 5; & ideo fili reſiſtentia totius reſiſtentiæ uniformis partes continet $\frac{2}{7}$. Quarè uniformis reſiſtentia globi plumbei eſt ad ejus pondus unciar. Rom. $26\frac{1}{4}$ ut 1 ad 2326923 circiter; & hinc uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus diameter eſt digit. 2, eſt ad ad reſiſtentiam globi lignei uniformem cujus diameter eſt digit. $6\frac{7}{8}$ ut $26\frac{1}{4}\times 760000$ ad $57\frac{7}{22}\times 2326923$, hoc eſt, ut 19950000 ad 133374995 ſivè ut 1 ad 6,685.

Verùm ſi ponatur reſiſtentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, reſiſtentia globi lignei invenitur eſſe ad ejuſdem pondus $57\frac{7}{22}$ unciar. 186.
Rom. in ratione 1 ad 450000 circiter, & reſiſtentia uniformis globi plumbei ad ejus pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. in ratione 1, ad 910900 per tabulam primam; & in ratione 1, ad 1021097 per tabulam ſecundam ultimi experimenti; undè ſumptâ mediocri ratione, reſiſtentia uniformis globi plumbei eſt ad pondus $26\frac{1}{4}$ unciar. ut 1 ad 966000 circiter. Et ideò, in hâc reſiſtentiæ Hypotheſi, uniformis reſiſtentia globi plumbei cujus eſt diameter digit. 2, eſt ad reſiſtentiam uniformem globi lignei cujus diameter eſt digit. $6\frac{1}{8}$, ut $26\frac{1}{4}\times 450000$ ad $57\frac{7}{22}\times 966000$ ſeu ut 1, ad 4,687, circiter.

(b) * *Ejus pars decima.* Si oſcillatio ex itu & reditu penduli, ſeu ex bino deſcenſu binoque aſcenſu componatur, quinque oſcillationes ſic acceptæ æquivalent oſcillationibus decem quarum ſingulæ ex uno tantùm deſcenſu unoque aſcenſu conſtant. Priore ſignificatione NEWTONUS oſcillationes quinque, de quibus hic loquitur, accepiſſe videtur, ut potè qui differentiam 4 digit. Per N. 10 dividit, ut differentiam inveniat inter arcus deſcenſu uno & ſubſequente aſcenſu deſcriptos in unâ mediocri oſcillatione ex deſcenſu uno unoque aſcenſu compoſitâ.

differentia $\frac{3}{5}$ ad differentiam novam o, 4475. (c) Si longitudo penduli, manente longitudine arcûs descripti, augeretur in ratione 126 ad $122\frac{1}{2}$; tempus oscillationis augeretur, & velocitas penduli diminueretur in ratione illâ subduplicatâ, maneret verò arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum differentia o, 4475. Deinde si arcus descriptus augeretur in ratione $124\frac{3}{31}$ ad $67\frac{1}{8}$, differentia ista o, 4475 (d) augeretur in duplicatâ illa ratione, ideoque evaderet 1, 5295. Hæc ita se haberent, ex hypothesi quod resistentia penduli esset in duplicatâ ratione velocitatis. Ergo si pendulum describeret arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, & longitudo ejus inter punctum suspensionis & centrum oscillationis esset 126 digitorum, differentia arcuum descensu & subsequente ascensu descriptorum foret 1, 5295 digitorum. Et hæc differentia ducta in pondus globi penduli, quod erat unciarum 208, producit 318, 136. Rursus ubi pendulum superius ex globo ligneo constructum centro oscillationis, quod à puncto suspensionis digitos 126 distabat, describebat arcum totum $124\frac{3}{31}$ digitorum, differentia arcuum descensu & ascensu descriptum (e) fuit $\frac{126}{121}$ in $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$, quæ ducta

(c) * *Si longitudo penduli*, in medio non resistente *augeretur in ratione 126 ad 122 $\frac{1}{2}$, tempus oscillationis*, ob datam globi fune penduli massam & pondus, *augeretur in ratione illâ subduplicatâ* (*per cor. 6. prop. 24.*) quod etiam in medio resistente verum est quam proximè (180).

* Mutatâ longitudine penduli & manente longitudine arcûs descripti, velocitas penduli diminuetur in ratione subduplicatâ longitudinis penduli, (ideoque inversè ut tempus); Nam velocitates descensu per arcus quosvis acquisitæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum illis arcubus correspondentium; Chordæ verò pro quibus arcus sumere hic liceat, sunt mediæ proportionales inter abscissas suas & circulorum Diametros, si ergo sumantur arcus æquales in circulis inæqualibus, abscissæ eorum arcuum erunt inversè ut Diametri circulorum sive inversè ut eorum Radii, hoc est inversè ut longitudines pendulorum, ergo velocitates quæ sunt in ratione subduplicatâ abscissarum, erunt in ratione subduplicatâ inversâ longitudinum pendulorum; Cùm ergo arcuum differentiæ sint ut resistentia & quadratum temporis conjunctim, resistentiaque sit ut quadratum velocitatis, sitque quadratum velocitatis inversè ut longitudo pendulorum; & quadratum temporis directè ut longitudo pendulorum, compensatis rationibus manebunt eædem arcuum differentiæ, si mutatâ pendulorum longitudine arcus æquales describantur.

(d) * *Augeretur in duplicatâ illâ ratione.* (Per cor. 2. prop. 31.).

(e) * *Fuit* $\frac{126}{121}$ *in* $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$. Cùm enim in cas. 6°. experimenti primi penduli seu fili,

ducta in pondus globi, quod erat unciarum $57\frac{7}{22}$, producit 49, 396. Duxi autem differentias hasce in pondera globorum, ut invenirem eorum resistentias. Nam differentiæ oriuntur ex resistentiis, (f) suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè. Sunt igitur resistentiæ ut numeri 318, 136 & 49, 396. Pars autem resistentiæ globi minoris, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis, erat ad resistentiam totam ut 0,56752 ad 0,61675, id est, ut 45,453 ad 49,396; & pars resistentiæ globi majoris propemodum æquatur ipsius resistentiæ toti; ideoque partes illæ sunt ut 318, 136 & 45,453 quamproximè, id est, ut 7 & 1. Sunt autem globorum diametri $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$; & harum quadrata $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sunt ut 7,438 & 1, id est, ut globorum resistentiæ 7 & 1 quamproximè. Differentia rationum haud major est, quam quæ ex fili resistentiâ oriri potuit. Igitur resistentiarum partes illæ quæ sunt, paribus globis, ut quadrata velocitatum, sunt etiam, paribus velocitatibus, ut quadrata diametrorum globorum.

Cæterum globorum, quibus usus sum in his experimentis, maximus non erat perfectè sphæricus, & propterea in calculo hic allato minutias quasdam brevitatis gratiâ neglexi; de calculo accurato in experimento non satis accurato minimè sollicitus. Optarim itaque, (g) cùm demonstratio vacui ex his dependeat, ut experimenta cum globis & pluribus & majoribus & magis accu-

fili ad nodum usquè longitudo esset 121 digit. arcus descriptus erat $119\frac{5}{29}$ digit. & arcuum differentia $\frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit. Et mutatâ penduli longitudine in ratione 126 ad 121, arcus descriptus & differentia mutantur in eâdem ratione, fiebatque proindè arcus $\frac{126}{121} \times 119\frac{5}{29}$, seu $124\frac{3}{31}$ digit. & differentia $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ digit.

(f) * *Suntque ut resistentiæ directè & pondera inversè.* Nam (per cor. prop. 30.) differentiæ illæ in datos numeros ductæ sunt ad penduli longitudinem, ut resistentia ad gravitatem seu pondus globi penduli; data igitur penduli longitudine, differentiæ illæ sunt ut resistentiæ directè & pondera inversè.

186.

(g) 187. * *Cùm demonstratio vacui &c.* Utrum resistentia quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an verò partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, experimentis globorum in medio resistente oscillantium inveniri potest. Nam si, exempli causâ, globorum in dato medio paribus velocitatibus motorum resistentiæ semper essent in

accuratis tentarentur. Si globi ſumantur in proportione geometricâ, putà quorum diametri ſint digitorum 4, 8, 16, 32; ex progreſſione experimentorum colligetur quid in globis adhuc majoribus evenire debeat.

Jam verò conferendo reſiſtentias diverſorum fluidorum inter ſe, tentavi ſequentia. Arcam ligneam paravi longitudine pedum quatuor, latitudine & altitudine pedis unius. Hanc operculo nudatam implevi aquâ fontanâ, feciqne ut immerſa pendula in medio aquæ oſcillando moverentur. Globus autem plumbeus pondere $166\frac{1}{6}$ unciarum, diametro $3\frac{5}{8}$ digitorum movebatur ut in tabulâ ſequente deſcripſimus, exiſtente videlicet longitudine penduli à puncto ſuſpenſionis ad punctum quoddam in filo notatum 126 digitorum, ad oſcillationis autem centrum $134\frac{3}{8}$ digitorum.

Ar-

in duplicatâ diametrorum ratione, inſenſibilis foret in partibus internis reſiſtentia; cum enim reſiſtentia illa interna à numero, magnitudine, figurâ & texturâ internarum partium penderet, non poſſet eadem conſtanter manere in globis æqualibus & heterogeneis, ligneis v. g. & plumbeis, nec in globis inæqualibus externarum ſuperficierum, ſed potiùs ſolidorum rationem ſequeretur. Porrò ſuperioribus experimentis jam probatum eſt in velocioribus globorum motibus, reſiſtentias quadratis diametrorum proportionales eſſe quam proxime, concludendum igitur eſt nullam eſſe notabilem in partibus corporum internis reſiſtentiam, quod tamen deinceps pluribus aliis argumentis demonſtrabit NEWTONUS. Verum ſi medium quoddam æthereum vel longe ſubtiliſſimum omnes omnium corporum poros & meatus repleret, propter medii illius ætherei ſummam denſitatem atque inertiam omni materiæ propriam, partes internæ corporum per magnam reſiſtentiam ſentirent. At qui *Carteſianum* mundi pleni ſyſtema emendarunt noviſque inventis ornarunt eruditiſſimi ſagaciſſimique Mathematici, ii, repudiatis veteribus effugiis, quibus *Carteſianorum* vulgus utitur, ex ſubtilitate ac mobilitate ætheris & pororum quibus corpora omnia pertuſa ſunt diſpoſitione petitis, hoc unum reſponſum proferunt, æthercam materiam corporum gravium motibus minime reſiſtere, quod ſit omni gravitate deſtituta. Duplicis itaque generis materiam in univerſo diſtinguunt, gravem alteram cujus partes in vorticulos diviſæ non ſunt, alteram non gravem, omnis tamen gravitatis cauſam, cujus partes ex tenuiſſimis variorum ordinum vorticulis elaſticis conſtant. Cùm autem vis motrix ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibenda, decreſcente corporis hujus gravitate, in eâdem ratione decreſcat, nullaque ſit ætheris gravitas, conſequens eſſe aiunt ut corpus grave quod in æthere datâ celeritate fertur, nonniſi infiniteſimam motûs ſui partem ex reſiſtentia ætheris finito quovis tempore deperdat. Verùm prætterquam quod totum hoc ſiſtema, ut ut elegans ac venuſtum, fictis fere ad arbitrium hypotheſibus, quas NEWTONUS è Phyſicâ experimentali vellet eliminari, nititur, plurimiſque & graviſſimis aliis ex Mechanica atque Aſtronomiâ difficultatibus premitur, adductum modò reſponſum his etiam laborat incommodis. Primum quidem evidens eſt, vim illam quæ ad corpus grave contrà gravitatis directionem ſuſtinen-

Arcus descensu primo a puncto in filo notato descriptus, digitorum	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus, digitorum	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum differentia motui amisso proportionalis, digitorum	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum in aqua			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Numerus Oscillationum in aere		$85\frac{1}{2}$	287	535					

In experimento columnæ quartæ, motus æquales oscillationibus 535 in aere, & $1\frac{1}{5}$ in aquâ amissi sunt. Erant quidem oscilla-

nondum necessaria est, cum corporis pondere decrescere debere; sed non ità manifestum est vim motricem ad datum corpus grave datâ celeritate movendum adhibendam, in ratione ponderis decrescere oportere, ubi vis illius motricis directio gravitatis directioni opposita non est, sed illi perpendicularis aut cum illâ conspirans. Præterea materia omnis ætherea circa solem, stellas, atque planetas singulos pernicissimo motu in orbem acta vi centrifugâ pollet quâ à centris magnorum vorticum, atque etiam à centris singulorum vorticulorum propriis recedere nititur, undè cæterorum corporum gravitas ortum habet; at vis illa centrifuga quæ cum vi centripetâ seu gravitate conferri potest, idem præstare in æthere debet ratione motûs in datâ materiæ quantitate datâ vi motrice imprjmendi, quod in cæteris corporibus gravitas præstat. Nulla igitur esse rat:o videtur cur corpus grave datâ celeritate motum nonnisi infinitesimam suæ celeritatis particulam ex ætheris non gravis resistentiâ amittat, siquidem illud vi centrifugâ pollet; Et, si materia ætherea suâ vi centrifugâ vel certè vi indè ortâ corporum gravitatem producat, eorumque motum finitum acceleret & extinguat finito tempore, multò magis eadem materia corpus grave movere, aut motum ejus finito tempore extinguere debet, si finitâ velocitate in illud incurrat ac continuò urgeat, cum vis centrifuga infinitesima sit, si cum vi quâ corpus spatium finitum 187.
tempore infinito describit, conferatur.

* Et quidem resistentia ex gravitate materiæ occurrentis n:n pe●det, sed ex ejus inertiâ, quâ fit ut nullum corpus ab alio motum suscipiat quin tantumdem motus in eo destruat, idque Mechanici communiter statuunt tam ex consensu omnium quorumcumque Phænomenorum, ubi (semotâ gravitatis consideratione) nullus motus motum producendo non consumitur, quam ex Principiis Metaphysicis quâ liquet quod si res ita se non haberet, vel minimus motus infinitum motum produceret, totaque Universi moles ex Atomi progressione dimoveretur, quod absurdum. Unde si Ædıer non resisteret, hoc est vi inertiæ careret, fingendæ forent duæ materiæ species, quarum altera vi inertiæ prædita foret, altera vero non, ita ut quamvis ab occurrente materia dimoveatur, nihil tollat de ejus motu; simul autem statuitur quod id æther corporum motum sistere potest aut mutare quomodocumque, nam si æther sit gravitatis caussa oportet ut illa ipsa materia ætherea quæ corporis moti actione movetur, dum tamen nihil quicquam de illius motu tollit, possit illud idem corpus si sursum feratur sistere, in adversum ejus directionem mutare &c. Quæ Metaphysicè etiam inter se repugnare videntur, nec satis fuisse perpensa ab ingeniosissimis Cartesianismi rellauratoribus.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

oscillationes in aere paulo celeriores quàm in aquâ. At si oscillationes in aquâ in eâ ratione accelerarentur ut motus pendulorum in medio utroque fierent æquiveloces, maneret numerus idem oscillationum $1\frac{1}{5}$ in aquâ, quibus (h) motus idem ac prius amitteretur; ob resistentiam auctam & simul quadratum temporis diminutum in eâdem ratione illâ duplicatâ. Paribus igitur pendulorum velocitatibus motus æquales in aere oscillationibus 535 & in aquâ oscillationibos $1\frac{1}{5}$ amissi sunt; (i) ideoque resistentia penduli in aquâ est ad ejus resistentiam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{5}$. Hæc est proportio resistentiarum totarum in casu columnæ quartæ.

Designet jam $AV + CV^2$ differentiam arcuum in descensu & subsequente ascensu descriptorum à globo in aere cum velocitate maximâ V moto; & cum velocitas maxima in casu columnæ quartæ sit ad velocitatem maximam in casu columnæ primæ, ut 1 ad 8; & differentia illa arcuum in casu columnæ quartæ ad differentiam in casu columnæ primæ (k) ut $\frac{2}{535}$ ad $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$, seu ut $85\frac{1}{2}$ ad 4280: scribamus in his casibus 1 & 8 pro:

(h) * *Motus idem ac prius amitteretur.* Differentia arcuum motui amisso proportionalis, est ut resistentia & quadratum temporis conjunctim (*per cor. 5. Lem. X*); sed auctâ paululum velocitate, resistentia quamproximè augetur in ejus ratione duplicatâ (per hyp.) & simul quadratum temporis minuitur in eâdem ratione illâ duplicatâ, quia totus arcus descriptus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem quam proximè manet. Quarè motus amissus numero oscillationum $1\frac{1}{5}$ idem manet, si oscillationes in aquâ accelerentur ut dictum est (vid. not. sup. c).

(i) * *Ideoque resistentia penduli.* Nam motus in aëre amissus unâ mediocri oscillatione, quâ arcus digit. 14 describitur, est pars $\frac{1}{535}$ motûs totius oscillationibus 535, amissi; Et similiter motus in aquâ amissus æquali oscillatione quâ arcus digit. 14 pari velocitate describeretur est quam proximè pars $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ejusdem motûs totius amissi oscillationibus $1\frac{1}{5}$ in aquâ & oscillationibus 535 in aëre. Quarè cùm resistentiæ totæ unâ oscillatione mediocri sint ut partes illæ motûs amissæ, est resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam in aëre ut $\frac{1}{1\frac{1}{5}}$ ad $\frac{1}{535}$, id est, ut 535 ad $1\frac{1}{5}$.

(k) * *Ut* $\frac{2}{535}$ *ad* $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$. Dividendo nimirum arcuum differentias per numerum os-

8 pro velocitatibus, atque $85\frac{1}{2}$ & 4280 pro differentiis arcuum, & fiet $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$ seu $A + 8C = 535$; indeque per reductionem æquationum proveniet $7C = 449\frac{1}{2}$ & $C = 64\frac{3}{14}$ & $A = 21\frac{2}{7}$: atque ideo resistentia, ([l]) cùm sit ut $\frac{7}{11}AV + \frac{1}{4}CV^2$, erit ut $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{56}V^2$. Quare in casu columnæ quartæ, ubi velocitas erat 1, resistentia tota est ad partem suam quadrato velocitatis proportionalem, ut $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{56}$ seu $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$; & idcirco resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, quæ quadrato velocitatis proportionalis est, quæque sola in motibus velocioribus consideranda venit, ([m]) ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$ & 535 ad $1\frac{1}{8}$ conjunctim, id est, ut 571 ad 1. Si penduli in aquâ oscillantis filum totum fuisset immersum, resistentia ejus fuisset adhuc major; adeo ut penduli in aquâ oscillantis resistentia illa, quæ velocitatis quadrato proportionalis est, quæque sola in corporibus velocioribus consideranda venit, sit ad resistentiam ejusdem penduli totius, eadem cum velocitate in aere oscillantis, ([n]) ut 850 ad 1 circiter, hoc est, ut densitas aquæ ad densitatem aeris quamproxime.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

In hoc calculo sumi quoque deberet pars illa resistentiæ penduli in aquâ, quæ esset ut quadratum velocitatis, sed (quod mirum forte videatur) resistentia in aqua augebatur in ratione velocitatis plusquam duplicatâ. Ejus rei causam investigan-

oscillationum ut differentia in unâ mediocri oscillatione habeatur, quemadmodum suprà factum est.

(l) * *Cùm sit ut* $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$. (per cor. prop. 30.).

(m) * *Ut* $61\frac{12}{17}$ *ad* &c. Est enim, ex suprà dictis, resistentia in aquâ ad resistentiam totam in aere ut 535 ad $1\frac{1}{8}$ & resistentia tota in aere ad resistentiæ partem illam in aere quæ velocitatis quadrato proportionalis est ut $61\frac{12}{17}$ ad $48\frac{9}{56}$, & idcircò (ex æquo) & per compositionem rationum) *resistentia penduli in aquâ est ad resistentiæ partem illam in aere, &c.* 287.

(n) * *Ut* 850. *ad* 1 circiter. Si enim resistentia fili ponatur ut suprà factum est, æqualis tertiæ parti resistentiæ totius in aere, erit fere resistentia penduli in aquâ ad ejus resistentiam totam in aere ut $535 - \frac{6}{15}$ ad $1\frac{1}{5} - \frac{6}{15}$, seu ut 2673 ad 4, & $2673 \times 61\frac{12}{17}$ ad $4 \times 48\frac{9}{56}$, ut 850 ad 1 circiter.

gando, in hanc incidi, quod arca nimis angusta esset pro magnitudine globi penduli, & motum aquæ cedentis præ angustiâ suâ nimis impediebat. Nam si globus pendulus, cujus diameter erat digiti unius, immergeretur; resistentia augebatur, in duplicatâ ratione velocitatis quam proximè. Id tentabam construendo pendulum ex globis duobus, quorum inferior & minor oscillaretur in aquâ, superior & major proximè supra aquam filo affixus esset, & in aere oscillando, adjuvaret motum penduli eumque diuturniorem redderet. Experimenta autem hoc modo instituta se habebant ut (°) in tabulâ sequente describitur.

Arcus descensu primo descriptus	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arcus ascensu ultimo descriptus	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Arcuum diff. motui amisso proport.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Numerus Oscillationum	$3\frac{1}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{1}{5}$	34	53	$62\frac{1}{5}$

Conferendo resistentias mediorum inter se, effeci etiam ut pendula ferrea oscillarentur in argento vivo. Longitudo fili ferrei erat pedum quasi trium, & diameter globi penduli quasi tertia pars digiti. Ad filum autem proximè supra mercurium affixus erat globus alius plumbeus satis magnus ad motum penduli diutius continuandum. Tum vasculum, quod capiebat quasi libras tres argenti vivi, implebam vicibus alternis argento vivo & aquâ communi, ut pendulo in fluido utroque successivè oscillante, invenirem proportionem resistentiarum; & prodiit resistentia argenti vivi ad resistentiam aquæ ut 13 vel 14 ad 1 circiter: id est, ut densitas argenti vivi ad densitatem aquæ. Ubi globum pendulum paulo majorem adhibebam, putà cujus diameter esset quasi $\frac{1}{3}$ vel $\frac{2}{3}$ partes digiti, prodibat resistentia argen-

(o) * *In tabulâ sequente.* Arcuum differentiæ dividantur per numerum oscillationum in casu unoquoque, & prodibunt differentiæ in oscillatione unâ mediocri 1. 1851; 0. 3076; .0827; .0235; .0073; .0023 .0010 quæ sunt quam proximè ut quadrata velocitatum, sive ut 16; 4; 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{64}$ $\frac{1}{256}$ in majoribus oscillationibus. priores enim termini sunt proximè sequentium fere quadrupli, in minoribus verò oscillationibus præcedentes termini sunt in minore ratione ad sequentes.

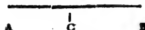
argenti vivi in eâ ratione ad resistentiam aquæ, quam habet numerus 12 vel 10 ad 1 circiter. Sed experimento priori magis fidendum est, propterea quod in his ultimis vas nimis angustum fuit pro magnitudine globi immersi. Ampliato globo, deberet etiam vas ampliari. Constitueram quidem hujusmodi experimenta in vasis majoribus & in liquoribus tum metallorum fusorum, tum aliis quibusdam tam calidis quam frigidis repetere: sed omnia experiri non vacat, & ex jam descriptis satis liquet resistentiam corporum celeriter motorum densitati fluidorum in quibus moventur proportionalem esse quam proximè. Non dico accuratè. Nam fluida tenaciora, pari densitate, proculdubio magis resistunt quàm liquidiora, ut oleum frigidum quam calidum, calidum quàm aqua pluvialis, aqua quàm spiritus vini. Verum in liquoribus, qui ad sensum satis fluidi sunt, ut in aere, in aquâ seu dulci seu salsâ, in spiritibus vini, terebinthi & salium, in oleo à fæcibus per destillationem liberato & calefacto, oleoque vitrioli & mercurio, ac metallis liquefactis, & si qui sint alii, qui tam fluidi sunt ut in vasis agitati motum impressum diutius conservent, effusique liberrimè in guttas decurrendo resolvantur, nullus dubito quin regula allata satis accuratè obtineat: præsertim si experimenta in corporibus pendulis & majoribus & velocius motis instituantur.

Denique cùm nonnullorum opinio sit, medium quoddam æthereum & longè subtilissimum extare, quod omnes omnium corporum poros & meatus liberrimè permeet; à tali autem medio per corporum poros fluente resistentia oriri debeat: ut tentarem an resistentia, quam in motis corporibus experimur, tota sit in eorum externâ superficie, an vero partes etiam internæ in superficiebus propriis resistentiam notabilem sentiant, excogitavi experimentum tale. Filo pedum undecim longitudinis ab unco chalybeo satis firmo, mediante annulo chalybeo, suspendebam pyxidem abiegnam rotundam, ad constituendum pendulum longitudinis prædictæ. Uncus sursum præacutus erat acie concavâ, ut annulus arcu suo superiore acici annixus liberrimè moveretur. Arcui autem inferiori annectebatur filum. Pendulum ita constitutum deducebam à perpendiculo ad distantiam quasi pedum sex, idque secundum planum aciei unci perpendiculare,

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

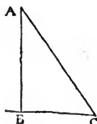
ne annulus, oscillante pendulo, supra aciem unci ultro citroque laberetur. Nam punctum suspensionis, in quo annulus uncum tangit, immotum manere debet. Locum igitur accuratè notabam, ad quem deduxeram pendulum, dein pendulo demisso notabam alia tria loca ad quæ redibat in fine oscillationis primæ, secundæ ac tertiæ. Hoc repetebam sæpius, ut loca illa quam potui accuratissimè invenirem. Tum pyxidem plumbo & gravioribus, quæ ad manus erant, metallis implebam. Sed prius ponderabam pyxidem vacuam, unà cum parte fili quæ circum pyxidem volvebatur ac dimidio partis reliquæ quæ inter uncum & pyxidem pendulam tendebatur. Nam filum tensum (p) dimidio ponderis sui pendulum à perpendiculo digressum semper urget. Huic ponderi addebam pondus aeris quem pyxis capiebat. Et pondus totum erat quasi pars septuagesima octava pyxidis metallorum plenæ. Tum quoniam pyxis metallorum plena, pondere suo tendendo filum, augebat longitudinem penduli, contrahebam filum ut penduli jam oscillantis eadem esset longitudo ac prius. Dein pendulo ad locum primo notatum retracto ac dimisso, numerabam oscillationes quasi septuaginta & septem, donec pyxis ad locum secundo notatum rediret, totidemque subinde donec pyxis ad locum tertio notatum rediret, atque rursus totidem donec pyxis reditu suo attingeret locum quartum. Unde concludo quod resistentia tota pyxidis plenæ non majorem habebat proportionem ad resistentiam

(p) * *Dimidio ponderis sui.* Fili tensi A B homogenei & æqualis ubique crassitiei centrum gravitatis est in loco medio C, (59. *lib.* 1.) ideóque vis quâ filum pondere suo toto P, ad rotandum circà A, urgetur, est ut $AC \times P$, seu ut $\frac{1}{2} P \times AB$.) 63. *lib.* 1.) jam si inveniendum sit pondus Q in B locandum ut momentum $Q \times AB$ æquivaleat momento seu vi fili totius; erit $Q \times AB = \frac{1}{2} P \times AB$, ideóque $Q = \frac{1}{2} P$. Quarè filum tensum dimidio ponderis sui P pendulum à perpendiculo digressum semper urget.



tiam pyxidis vacuæ quàm 78 ad 77. Nam si æquales essent ambarum resistentiæ, pyxis plena ob vim suam insitam septuagies & octies majorem vi insitâ pyxidis vacuæ, motum suum oscillatorium tanto diutius conservare deberet, atque ideo completis semper oscillationibus 78 (q) ad loca illa notata redire. Rediit autem ad eadem completis oscillationibus 77.

Designet igitur A resistentiam pyxidis in ipsius superficie externâ, & B resistentiam pyxidis vacuæ in partibus internis; & si resistentiæ corporum æquivelocium in partibus internis sint ut ma-



(q) * *Ad loca illa notata redire.* Si resistentiæ in singulis oscillationibus essent æquales, motus amissi, ut potè resistentiis proportionales, essent quoque æquales; sed motus amissi, paribus oscillationum temporibus, sunt ut massæ seu pondera corporum & spatia motibus amissis describenda conjunctim; ideoque spatia illa essent ut pondera inversè; hoc est, spatium motu pixidis vacuæ amisso in unâ oscillatione describendum, esset ad spatium motu pixidis plenæ oscillatione unâ amisso percurrendum ut 78 ad 1, & propterea spatia illa, completâ unicâ pixidis vacuæ oscillatione, & pixidis plenæ oscillationibus 78 absolutis, forent æqualia quamproximè, atque ideò pixis plena, completis semper oscillationibus 78, ad loca notata rediret.

Cùm in hâc Sectione 6ª. NEWTONUS de solo corporum in cycloide oscillantium motu egerit, multa verò à recentioribus authoribus inventa sint, quibus generalis motuum in curvis quibuslibet theoria longe promota est, principia quibus usi sunt sequenti problemate breviter exponemus.

PROBLEMA.

188. Tendente vi gravitatis uniformi ubique perpendiculariter ad planum horizontis, definire motum corporis per curvam quamlibet ascendentis vel descendentis in medio uniformi cujus resistentia est ut velocitatis functio quælibet.

De corporum ascensu ac descensu in lineis rectis ad horizontem quomodocumque inclinatis agere hìc necessum non est; 188.
si enim corpus in lineâ rectâ A C ad horizontem B C utcumque inclinatâ ascendat vel descendat, resistentia & celeritas in quibuscumque locis & spatium descriptum ac tempus quo descriptum est, definiuntur per Prop. 3. Sect. 1; 8am. & 9am. Sect. 2; 13am. & 14am. Sect. 3. ac per notas iisdem locis adjunctas. Cum enim vis gravitatis secundum directionem A B urgentis sit ad ipsius partem quæ agit juxtà directionem A C, in datâ ratione lineæ A C ad A B, seu in datâ ratione sinûs totius ad sinum anguli inclinationis A C B; si loco vis gravitatis horizonti perpendicularis adhibeatur in calculis & constructionibus pars illius data quæ secundum directionem A C agit, constructiones calculique in citatis locis non mutantur. Superest igitur ut corporis in curvâ lineâ ascendentis aut descendentis motum definiamus.

Des-

materia, seu numerus particularum quibus resistitur: erit 78 B resistentia pyxidis plenæ in ipsius partibus internis: ideoque pyxidis vacuæ resistentia tota A + B erit ad pyxidis plenæ resistentiam totam A + 78 B ut 77 ad 78, & divisim A + B ad 77 B, ut 77 ad 1, indeque A + B ad B ut 77 × 77 ad 1, & divisim A ad B ut 5928 ad 1. Est igitur resistentia pyxidis vacuæ in partibus internis quinquies millies minor quam ejusdem resistentia in externâ superficie, & amplius. Sic verò disputamus ex hypothesi quod major illa resistentia pyxidis plenæ, non ab aliâ aliquâ causâ latente oriatur, sed ab actione solâ fluidi alicujus subtilis in metallum inclusum.

Hoc

Descendat primùm corpus è loco dato A per curvam A M, ducatur verticalis A P, ad quam ex punctis M, & m, infinitè propinquis demittantur perpendicula M P, m p, & ex M ad p m perpendiculum M n. Gravitas constans secundùm directionem verticali A P parallelam semper agens sit $= g$, resistentia in loco M $= r$, velocitas corporis ibidem $= v$; tempus quo describitur A M $= t$, A P $= x$, A M $= s$, P p $=$ M n $= dx$, & M m $= ds$. Jam verò M m, est ad M n, seu ds ad dx, ut vis gravitatis g ad ipsius partem in directione M m agentem quæ ideo erit $= \frac{g\,dx}{ds}$; subducatur vis resistentiæ r, & vis residua quâ corpus in loco M, juxtà directionem, M m urgetur erit $= \frac{g\,dx}{ds} - r$. Undè (18) fit $g\,dx - r\,ds = v\,dv$. Hujus autem æquationis fluens ità sumi debet ut evanescentibus x & s evanescat quoque v si velocitas corporis in loco A nulla sit, & fiat $v = c$, si velocitas corporis in A, sit $= c$. Simili modo si corpus è loco dato A per arcum A M ascendat, & omnia ut modò supposuimus maneant, erit (18) $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, cujus æquationis fluentem ità sumi oportet ut positis x & $s = 0$, fiat v, æqualis velocitati in loco A datæ.

Si abscissa x in verticali B C per curvæ A C D punctum infimum C ducta capiatur, sitque B P $= x$, & cætera maneant ut supra, erit adhuc pro corporis descensu $g\,dx - r\,ds = v\,dv$; at pro ascensu per arcum C μ si data sint puncta A & B, dicaturque C μ vel A C $\mu = s$, erit $-g\,dx + r\,ds = -v\,dv$, seu adhuc $g\,dx - r\,ds = v\,dv$, quia crescente s decrescit x & contrà. Si vero dicatur C P $= x$ & C M $= s$, quia hæ quantitates respectu aliarum B P, & A M negativæ sunt, fiet pro descensu $-g\,dx + r\,ds = v\,dv$, seu $g\,dx - r\,ds = -v\,dv$, & pro ascensu si dicatur C $\mu = s$ erit $g\,dx + r\,ds = -v\,dv$ quarum æquationum altera in alteram abit, mutato signo quantitati r, præfixo. Ex datâ igitur lege resistentiæ, loco r scribatur ipsius valor per v & datas quantitates, & ex datâ æquatione ad curvam A M, loco dx scribatur valor ejus per ds, s & datas quantitates in superioribus formulis seu æquationibus; & deinde per curvarum quadraturas vel per series, capiantur, ut oportet, formularum fluentes, obtinebitur

Hoc experimentum recitavi memoriter. Nam charta, in qua illud aliquando descripseram, intercidit. Unde fractas quasdam numerorum partes, quae memoriâ exciderunt, omittere compulsus sum.

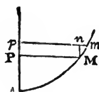
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUNDUS. SECT. VI. PROP. XXXI. THEOR. XXV.

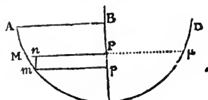
Nam omnia denuò tentare non vacat. Primâ vice, cùm unco infirmo usus essem, pyxis plena citius retardabatur. Causam quaerendo, reperi quod uncus infirmus cedebat ponderi pyxidis, & ejus oscillationibus obsequendo in partes omnes flectebatur. Parabam igitur uncum firmum, ut punctum suspensionis immotum maneret, & tunc omnia ita evenerunt uti supra descripsimus.

SEC-

tur v per s & contrà, atque etiam r per s, & quia tempus t, quo arcus s describitur est S. $\frac{ds}{v}$, dabitur quoque tempus. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit resistentia partim uniformis, partim velocitatis quadrato proportionalis, quae est Hypothesis naturae, seu sit $r = \frac{aa + vv}{b}$, dicanturque BP $= x$, AM $= s$ & aequatio $g\,dx - r\,ds = v\,dv$ in hanc migrabit $g\,dx - \frac{aa\,ds}{b} = v\,dv + \frac{vv\,ds}{b}$; ut hoc secundum aequationis membrum debitam formam acquirat, ponatur $ds = \frac{\frac{1}{2}b\,dz}{z}$, seu $s = \frac{1}{2}b\,L.\,z$, aequatio evadet $gz\,dx - \frac{1}{2}aa\,dz = zv\,dv + \frac{1}{2}vv\,dz$, sumptis fluentibus, fit $g\,S.\,z\,dx - \frac{1}{2}aaz = \frac{1}{2}zvv$. Undè iuvenietur $vv = \frac{2g\,S.\,z\,dx}{z} - aa$. Est autem S. $z\,dx$, area curvae cujus abscissa x & ordinata z; & z datur per s, ope logarithmicae, & x per s ope aequationis ad curvam A M. Sit h numerus cujus logarithmus est unitas, seu $L.\,h = 1$, erit $s\,L.\,h = \frac{1}{2}b\,L.\,z$, & $\frac{2s}{b}L.\,h = L.\,h^{\frac{2s}{b}} = L.\,z$. atquè $h^{\frac{2s}{b}} = z$, undè habetur $vv = \frac{2g\,S.\,h^{\frac{2s}{b}}\,dx}{h^{\frac{2s}{b}}} - aa$.





Si in his aequationibus ponatur $a = 0$, definietur motus corporis in lineâ quali- bet curvâ descendentis & ascendentis in medio uniformi, cujus resistentia velocitatis quadrato proportionalis est. Caeterum totam hanc materiam copiosissimè & accuratissimè tractavit Clariss. *Eulerus* Tom. 2. Mechan. 188.

SECTIO VII.

De motu fluidorum & resistentiâ projectilium.

PROPOSITIO XXXII. THEOREMA XXVI.

Si corporum systemata duo similia ex æquali particularum numero constent, & particulæ correspondentes similes sint & proportionales, singulæ in uno systemate singulis in altero, & similiter sitæ inter se, ac datam habeant rationem densitatis ad invicem, & inter se temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant (eæ inter se quæ in uno sunt systemate & eæ inter se quæ sunt in altero) & si non tangant se mutuo quæ in eodem sunt systemate, nisi in momentis reflexionum, neque attrahant, vel fugent se mutuò, nisi viribus acceleratricibus quæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè: dico quod systematum particulæ illæ pergent inter se temporibus proportionalibus similiter moveri. (r).

Corpora similia & similiter sita temporibus proportionalibus inter se similiter moveri dico, quorum situs ad invicem in fine temporum illorum semper sunt similes: putà si particulæ unius systematis cum alterius particulis correspondentibus conferantur. Unde tempora erunt proportionalia, in quibus similes & proportionales figurarum similium partes à particulis correspondentibus describuntur. Igitur si duo sint ejusmodi systemata, particulæ correspondentes, ob similitudinem inceptorum motuum, pergent similiter moveri, usque donec sibi mutuo occur-

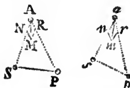
(r) * *Similiter moveri.* Sumto A & a, P & p, S & s, &c. particulæ in duobus systematibus sibi mutuò correspondentes. Particula A in suo systemate tempore T, describat spatium quam minimum A B, & particula correspondens a, in altero systemate tempore t, describat spatium a b, priori A B, simile similiterque situm, ità ut sit A B, ad a b, ut diameter particulæ A, ad diametrum particulæ a, sivè ut A S ad a s, vel P S ad p s, & angulus A S B æqualis angulo a s b, atque S A B æqualis s a b. Et aliæ sibi mutuò correspondentes particulæ quiescant vel simili modo moveantur. His positis, demonstrandum est, quod si sumantur tempora alia quæ sint ut T & t, particulæ correspondentes erunt utrinque similiter positæ.

currant. Nam si nullis agitantur viribus, progredientur uniformiter (f) in lineis rectis per motûs leg. 1. Si viribus aliquibus se mutuo agitant, & vires illæ sint ut particularum correspondentium diametri inversè & quadrata velocitatum directè; quoniam particularum situs sunt similes & vires proportionales, (t) vires totæ quibus particulæ correspondentes

(f) * *In lineis rectis per mot. leg. 1.* Ideóque ob velocitates uniformes & similes motuum directiones pergent similiter moveri temporibus proportionalibus, usque ad occursus suos primos.

(t) * *Vires totæ quibus particulæ correspondentes agitantur similes habebunt determinationes, & erunt ad invicem ut correspondentium particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.*

* Particula *A* inter duas *S* & *P*, & particula *a* inter duas *s* & *p* sint similiter sitæ, & quacumque celeritate in directione similiter positâ particulæ illæ *A* & *a* ferantur, trahanturque vel fugentur illæ particulæ *A* & *a* à particulis *S* & *P*, *s* & *p* per vires quæ sint ut Diametri particularum correspondentium inversè sive ut lineæ homologæ inversè, & quadrata velocitatum directè, dico 1°. quod directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a* similiter posita erit in utroque systemate, nam anguli S A P & s a p, quos faciunt vires agentes, ex hypothesi æquales sunt, vis autem composita sequetur Diagonalem quæ faciat angulos cum directione utriusque vis componentis quorum sinus sint reciprocè ut vires agentes, per nat. virium compositarum, sit ea Diagonalis hic A M, illic a m, erit ergo sinus anguli S A M, ad sinum anguli P A M, inversè ut vis particulæ S ad vim particulæ P sive directè ut lineæ homologæ S A & P A (nam quoniam de unico corpore A nunc agitur ratio quadratorum velocitatum hic nihil mutat) pariter sinus anguli s a m est ad sinum Anguli p a m ut s a ad p a; sed est S A ad P A sicut s a ad p a ex hypothesi, ergo anguli æquales S A P & s a p in eadem ratione secantur per lineas A M, a m, ideoque anguli S A M & s a m, M A P & m a p sunt æquales, ergo directio vis compositæ trahentis particulas *A* & *a*



in singulo systemate similiter est posita. Q. erat 1um. 188.

2°. Vires illæ compositæ erunt ut particularum Diametri inversè & quadrata velocitatum directè.

Secetur utcumque in directione AS lineola AN quæ vim particulæ S exprimat, ducaturque N M, parallela AP, & ex M ducatur M R parallela A S, fiet parallelogrammum A N M R, in quo M R = A N, & angulus A M R = ang. M A N, ideoque A N ad A R ut sinus anguli M A R ad sinum ang. M A N, sive ut P A ad S A, hoc est ut vires particularum *S* & *P*, ideoque A R exprimet vim particulæ *P*, & A M exprimet vim compositam ex viribus *S* & *P*. Sumatur in a s lineola a n, quæ sit ad A N, ut a s ad A S inversè, & ut quadratum velocitatis in *a* ad quadratum velocitatis in *A* directè, ductisque n m & m r parallelis lineis a p, a s erunt a n & a r ut vires particularum s & p, & a m exprimet vim ex iis compositam.

Sed ob similitudinem triangulorum ANM, a n m est A N ad A M sicut a n ad a m, sive vis particulæ *A*, ad vim compositam ex particulis *S* & *P*, ut vis particulæ *a* ad vim compositam ex particulis *s* & *p*, ideoque vicissim, vis particulæ *A* ad vim particulæ *a* ut, vis composita ex vi particularum *S* & *P*, ad vim compositam ex viribus particularum *s* & *p*; Sed vis particulæ *A* est ad vim particulæ *a*, inversè ut

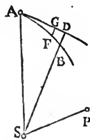
tes agitantur, ex viribus singulis agitantibus (per legum corollarium secundum) compositæ, similes habebunt determinationes, perinde ac si centra inter particulas similiter sita respicerent; & erunt vires illæ totæ ad invicem ut vires singulæ componentes, hoc est, ut correspondentium particularum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: & propterea efficient ut correspondentes particulæ figuras similes describere pergant. (u). Hæc ita se habebunt (*per corol.* 1. *&* 8. *prop.* IV. *lib.* 1.) si modò centra illa quiescant. Sin moveantur, quoniam

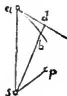
particularum Diametri, & directè ut velocitatum Quadrata ex hypothesi, ergo vires compositæ sunt in eâdem ratione. Q. E. D.

Idem ratiocinium ad vires compositas ex pluribus particulis extendetur. Unde *vires totæ &c.*

(u) * *Hæc ità se habebunt.* (*Per cor.* 1. *&* 8. *prop.* 4. *lib.* 1.) Aut quod idem est per hoc Lemma.

189. *Lemma.* Si corpora duo A, a, circà centra immota S, s, projiciantur secundum directiones A D, a d, quæ cum distantiis A S & a s æquales angulos D A S, d a s constituunt, & urgeantur viribus acceleratricibus centra illa S, s respicientibus, quæ semper sint inter se ut quadrata velocitatum corporum directè & distantiæ à centris inversè, corpora illa figuras similes circà centra S & s describent, similesque & proportionales figurarum illarum partes temporibus proportionalibus percurrent.





In projectilium directionibus capiantur partes quam minimæ A D, a d distantiis A S, a s proportionales. Jungantur S D, s d & corpora A, a temporibus quibusvis T, t describant arcus A B, a b qui lineas S D, s d attingunt. Sumantur arcus A F, a b qui eodem tempusculo descripti sint, & ductâ F G parallelâ S D, erit (4. *lib.* 1.) F G ad b d ut vis centralis quâ corpus A urgetur ad vim centralem quâ urgetur corpus a: & quia vires illæ (*per hyp.*) sunt ut quadratum velocitatum directè & distantiæ A S, a s, inversè, velocitates autem sunt ut spatia quæ simul descripta essent in Tangente A G, a d, erit F G ad b d, ut $AG^2 \times as$ ad $ad^2 \times AS$. Sed (*per cor.* 1. *Lem. XI.*) $BD : FG = AD^2 : AG^2$; quarè (per compositionem rationum & ex æquo) $Bd : bd = AD^2 \times as : ad^2 \times AS$. Cùm igitur ob triangulorum A S D, as d, similitudinem (*ex hyp.*) sit $AD : ad = AS : as$ & ideò $AD^2 \times as : ad^2 \times AS = AS : as$; erit $BD : bd = AS : as$, & ob similitudinem

niam (x) ob translationum similitudinem, similes manent eorum situs inter systematum particulas; similes inducentur mutationes in figuris quas particulæ describunt. Similes igitur erunt correspondentium & similium particularum motus usque (y) ad occursus suos primos, & propterea similes occursus, & similes reflexiones, & subinde (per jam ostensa) similes motus inter se donec iterum in se mutuo inciderint, & sic deinceps in infinitum. *Q. E. D.*

Corol. 1. Hinc si corpora duo quævis, quæ similia sint & ad systematum particulas correspondentes similiter sita, inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri incipiant, sintque eorum magnitudines ac densitates ad invicem ut magnitudines ac densitates correspondentium particularum: hæc pergent temporibus proportionalibus similiter moveri. Est enim eadem ratio partium majorum systematis utriusque atque particularum.

Corol. 2. Et similes & similiter positæ systematum partes omnes quiescant inter se: & earum duæ, quæ cæteris majores sint, & sibi mutuo in utroque systemate correspondeant, secundum lineas similiter sitas simili cum motu utcumque moveri incipiant: hæ similes in reliquis systematum partibus excitabunt motus, & pergent inter ipsas temporibus proportionalibus similiter moveri; atque ideo spatia diametris suis proportionalia describere.

PRO-

nem figurarum, ut A D ad a d, ideoque ob æquales angulos D & d, triangula A D B, a d b erunt similia, & propterea arcus A B, a b, similes & similiter siti. Simili modo demonstrabitur quod corpora è locis B & b progressa similes arcus a c similiter positos describant, atque ità deinceps. Describent ergò figuras similes circà centra S & s. His verò demonstratis patet (196. *lib.* 1.) quod describent similes & proportionales figurarum similium partes temporibus proportionalibus, seu quæ semper sint ut tempora T & t.

(x) * *Ob translationum similitudinem.* Oriuntur enim centrorum illorum translationes ex caussis proportionalibus & similiter agentibus, videlicet ex similibus particularum similium & correspondentium motibus, adeò ut quemadmodum initio motûs centra similiter moveri cœperunt, similiter quoque deinceps moveri pergant. 189.

(y) * *Usque ad occursus suos primos &c.* Nam cùm particularum correspondentium distantiæ, post quævis tempora proportionalia, sint semper in datâ diametrorum ratione in duobus systematibus (*ex dem.*), necesse est ut distantiæ temporibus proportionalibus evanescant, & proindè ut particularum occursus primi

PROPOSITIO XXXIII. THEOREMA XXVII.

Iisdem positis, dico quod systematum partes majores resistuntur in ratione compositâ ex duplicatâ ratione velocitatum suarum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis partium systematum.

Nam resistentia oritur partim ex viribus centripetis vel centrifugis quibus particulæ systematum se mutuo agitant, partim ex occursibus & reflexionibus particularum & partium majorum. Prioris autem generis resistentiæ sunt ad invicem ut vires totæ motrices à quibus oriuntur, (z) id est, ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ in partibus correspondentibus; hoc est (*per hypothesin*) ut quadrata velocitatum directè & distantiæ particularum correspondentium inversè & quantitates materiæ in partibus correspondentibus directè: ideoque cum distantiæ particularum systematis unius sint ad distantias correspondentes particularum alterius, ut diameter particulæ vel partis in systemate priore ad diametrum particulæ vel partis correspondentis in altero, (a) & quantitates materiæ sint ut densitates partium & cubi diametrorum; resistentiæ sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium systematum. *Q. E. D.* (b) Posterioris generis resistentiæ sunt ut reflexionum correspondentium numeri & vires

contingant, ubi particulæ illæ figurarum similium partes similes descripserunt. Ex quo sequitur particularum illarum occursus primos similes fore, tum ratione directionum, quod jam demonstratum est, tum etiam ratione velocitatum & quantitatum motûs. Siquidem spatia percursa temporibus proportionalibus sunt semper in datâ ratione, ideoque velocitates in locis similibus sunt semper in datâ ratione, & indè ob particularum correspondentium similitudinem & datam densitatum rationem, quantitates motûs quæ sunt ut velocitates & densitates & volumina conjunctim, in locis similibus manent in datâ ratione. Reflexiones igitur quæ ex ejusmodi motibus atque occursibus similibus nascuntur, similes erunt.

(z) * *Id est ut vires totæ acceleratrices & quantitates materiæ* (per def. 8. lib. 1.)

(a) * *Et quantitates materiæ sint &c.* Quantitates materiæ sunt ut densitates & volumina partium conjunctim (2. *lib.* 1.), & ob partium similitudinem, volumina sunt ut cubi laterum homologorum, seu diametrorum, ideóque quantitates materiæ sunt ut densitates partium & cubi diametrorum.

(b) * *Posterioris generis resistentiæ &c.* Si enim vires reflexionum supponantur æqua-

vires conjunctim. Numeri autem reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, & spatia inter earum reflexiones inversè. Et vires reflexionum sunt ut velocitates & magnitudines & densitates partium correspondentium conjunctim; id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium. Et conjunctis his omnibus rationibus, resistentiæ partium correspondentium sunt ad invicem ut quadrata velocitatum & quadrata diametrorum & densitates partium conjunctim. *Q. E. D.*

Corol. 1. Igitur si systemata illa sint fluida duo elastica ad modum aeris, & partes eorum quiescant inter se: corpora autem duo similia & partibus fluidorum quoad magnitudinem & densitatem proportionalia, & inter partes illas similiter posita, secundum lineas similiter positas, utcunque projiciantur; vires autem acceleratrices, quibus particulæ fluidorum se mutuo agitant, sint ut corporum projectorum diametri inversè, & quadrata velocitatum directè: corpora illa temporibus proportionalibus similes excitabunt motus in fluidis, & spatia similia ac diametris suis (c) proportionalia describent.

Corol. 2. Proinde in eodem fluido projectile velox resistentiam patitur, quæ est in duplicatâ ratione velocitatis quàm proximè. Nam si vires, quibus particulæ distantes se mutuo agitant,

tant,

quales, resistentiæ sunt ut numeri reflexionum seu occursuum; & si numeri reflexionum æquentur, resistentiæ sunt ut vires reflexionum correspondentium; undè, conjunctis his rationibus, resistentiæ quæ ex particularum & partium majorum occursibus & reflexionibus oriuntur, sunt semper ut reflexionum correspondentium numeri & vires conjunctim. Numeri autem reflexionum, cæteris paribus, sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè, &, cæteris paribus, sunt inversè ut spatia inter particularum & partium correspondentium occursus seu reflexiones intercepta, id est, inversè ut partium correspondentium diametri, ideóque *numeri reflexionum sunt ad invicem ut velocitates partium correspondentium directè* & earumdem diametri inversè. *Et vires reflexionum sunt ut* motûs quantitates in occursibus *id est, ut velocitates & diametrorum cubi & densitates partium correspondentium. Et conjunctis his omnibus rationibus &c.*

(c) * *Proportionalia describent.* Probatur enim ut in dem. prop. 32. lemmate (189) similes similium figurarum partes temporibus proportionalibus à corporibus illis semper describi. Undè corollarium hoc patet (*per cor.* 1. *&* 2. *prop.* 32.). 189.

tant, augerentur in duplicatâ ratione velocitatis, (d) resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè; (e) ideoque in medio, cujus partes ab invicem distantes sese viribus nullis agitant, resistentia est in duplicatâ ratione velocitatis accuratè. Sunto igitur media tria *A*, *B*, *C* ex partibus similibus & æqualibus & secundum distantias æquales regulariter dispositis constantia. Partes mediorum *A* & *B* fugiant se mutuo viribus quæ sint ad invicem ut *T* & *V*, illæ medii *C* ejusmodi viribus omninò destituantur. Et si corpora quatuor æqualia *D*, *E*, *F*, *G* in his mediis moveantur, priora duo *D* & *E* in prioribus duobus *A* & *B*, & altera duo *F* & *G* in tertio *C*; sitque velocitas corporis *D* ad velocitatem corporis *E*, & velocitas corporis *F* ad velocitatem corporis *G* in subduplicatâ ratione virium *T* ad vires *V*: resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *E*, & resistentia corporis *F* ad resistentiam corporis *G*, (f) in velocitatum ratione duplicatâ; & propterea resistentia corporis *D* erit ad resistentiam corporis *F* ut resistentia corporis *E* ad resistentiam corporis *G*. Sunto corpora *D* & *F* æquivelocia ut & corpora *E* & *G*; & augendo velocitates corporum *D* & *F* in ratione quâcunque, ac diminuendo vires particularum medii *B* in eâdem ratione duplicatâ, (g) accedet medium *B* ad formam & conditionem medii *C* pro lubitu,

(d) * *Resistentia foret in eâdem ratione duplicatâ accuratè.* Nam si idem corpus variâ cum velocitate in uno eodemque fluido similiter projiciatur, eædem sunt resistentiæ, ac si corpora duo similia & æqualia similiter projicerentur in duobus fluidis priori omnino paribus; sed in hoc casu, ob æquales inter se partium correspondentium diametros & densitates, resistentiæ sunt in duplicatâ ratione velocitatum accuratè (*per prop. 33. & ejus coroll. 1.*). Ergò &c.

(e) * *Ideoque in medio &c.* In medio cujus partes ab invicem distantes sese viribus quibuscumque in ratione velocitatis duplicatâ crescentibus agitant, resistentia (ex modò dem.) est semper in eâdem ratione duplicatâ; Quarè si vires illæ quibus particulæ sese agitant, supponantur quàm minimæ, manebit semper resistentia in ratione velocitatis duplicatâ accuratè; evanescant tandem illæ vires, manet resistentia in ratione velocitatis duplicata; sed idem melius patet per secundam partem demonstrationis propositionis hujus 32.

(f) * *In velocitatum ratione duplicatâ.* (Ex demonstratis initio coroll. hujus.).

(g) * *Accedet medium B &c.* Si enim velocitates corporum D & F, quam maximè augerentur vires particularum medii B, manentibus viribus medii A & velocitate corporis E quam maximè decrescerent, quia est semper vis medii A ad vim medii B ut quadratum velocitatis corporis D ad quadratum velocitatis corporis E.

bitu, & idcirco resistentiæ corporum æqualium & æquivelocium E & G in his mediis, perpetuò accedent ad æqualitatem, ita ut earum differentia evadat tandem minor quam data quævis. Proinde cùm resistentiæ corporum D & F sint ad invicem ut resistentiæ corporum E & G, accedent etiam hæ similiter ad rationem æqualitatis. Corporum igitur D & F, ubi velocissimè moventur, resistentiæ sunt æquales quam proximè: & propterea cùm resistentia corporis F sit in duplicatâ ratione velocitatis, erit resistentia corporis D in eâdem ratione quàm proximè.

(h) *Corol.* 3. Corporis in fluido quovis elastico velocissimè moti eadem ferè est resistentia ac si partes fluidi viribus suis centrifugis destituerentur, seque mutuo non fugerent: si modo fluidi vis elastica ex particularum viribus centrifugis oriatur, & velocitas adeo magna sit ut vires non habeant satis temporis ad agendum.

Corol. 4. Proinde cùm resistentiæ similium & æquivelocium corporum, in medio cujus partes distantes se mutuo non fugiunt, (i) sint ut quadrata diametrorum; sunt etiam æquivelocium & celerrimè motorum corporum resistentiæ in fluido elastico ut quadrata diametrorum quàm proximè.

Corol. 5. Et cùm corpora similia, æqualia & æquivelocia, in mediis ejusdem densitatis, quorum particulæ se mutuo non fugiunt, sive particulæ illæ sint plures & minores, sive pauciores & majores, in æqualem materiæ quantitatem temporibus æqualibus impingant, eique æqualem motus quantitatem imprimant, & vicissim (per motûs legem tertiam) æqualem ab eâdem reactionem patiantur, hoc est, æqualiter resistantur: manifes-

(h) * *Corollarium* 3. Patet per cor. 2. in quo vis T quâ particulæ medii A in quo corpus D movetur se fugiunt, qualiscumque supponitur; corporum D & F ubi velocissimè moventur, resistentiis manentibus æqualibus quam proximè, licet medii C in quo corpus F movetur, particulæ viribus centrifugis prorsus destituantur. Patet etiam ex eo quod supponatur vires non habere satis temporis ad agendum, unde casus redit ad eum in quo vires illæ nullæ sunt. 189.

(i) * *Sint ut quadrata diametrorum.* Per 2am. partem dem. prop. hujus, ob datas corporum velocitates & medii densitatem datam.

nifestum est etiam quod in ejusdem densitatis fluidis elasticis, ubi velocissimè moventur, æquales sint eorum resistentiæ quam proximè; sive fluida illa ex particulis crassioribus constent, sive ex omnium subtilissimis constituantur. Ex medii subtilitate resistentia projectilium celerrimè motorum non multum diminuitur.

Corol. 6. Hæc omnia ita se habent in fluidis, quorum vis elastica ex particularum viribus centrifugis originem ducit. Quod si vis illa aliunde oriatur, veluti ex particularum expansione ad instar lanæ vel ramorum arborum, aut ex aliâ quâvis causâ, quâ motus particularum inter se redduntur minus liberi: resistentia, ob minorem medii fluiditatem, erit major quàm in superioribus corollariis.

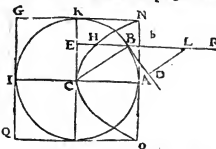
PROPOSITIO XXXIV. THEOREMA XXVIII.

Si globus & cylindrus æqualibus diametris descripti, in medio raro ex particulis æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constante, secundùm plagam axis cylindri, æquali cum velocitate moveantur: erit resistentia globi duplo minor quàm resistentia cylindri.

Nam quoniam actio medii in corpus eadem est (per legum corol. 5.) sive corpus in medio quiescente moveatur, sive medii particulæ eâdem cum velocitate (k) impingant in corpus quiescens: consideremus corpus tanquam quiescens, & videamus quo impetu urgebitur à medio movente. Designet igitur $ABKI$ corpus sphæricum centro C semidiametro CA descriptum, & incidant particulæ medii datâ cum velocitate in corpus illud sphæricum, secundum rectas ipsi AC parallelas: sitque FB ejusmodi recta. In eâ capiatur LB semidiametro CB æqualis, & ducatur BD quæ sphæram tangat in B. In KC &

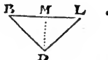
(k) * *Impingant in corpus quiescens.* Eadem enim est in utroque casu velocitas respectiva, eademque proindè vis percussionis (*per dem. in cor. 5. leg. mot.*) idem quoque manifestum est per motûs Leg. 3: quia fluidum & corpus ob reactionem actioni æqualem & contrariam, in utroque casu in se mutuò agunt.

& BD demittantur perpendiculares BE, LD, & vis quâ particula medii, secundùm rectam FB obliquè incidendo, globum ferit in B, erit ad vim quâ particula eadem cylindrum $ONGQ$ axe ACI circa globum descriptum perpendiculariter feriret in b, (l) ut LD ad LB vel BE ad BC. Rursus efficacia hujus vis ad movendum globum secundum incidentiæ suæ plagam FB vel AC, est ad ejusdem efficaciam ad movendum globum secundùm plagam determinationis suæ, id est, secundùm plagam rectæ BC quâ globum directè urget (m) ut BE ad BC. Et (n) conjunctis rationibus, efficacia particulæ in globum secundum rectam FB obliquè incidentis, ad movendum eundem secundùm plagam incidentiæ suæ, est ad



(l) * *Ut L D ad L B vel B E ad B C.* Si enim recta data L B exponat vim quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, & vis illa (*per leg. cor.* 2.) resolvatur in vires B D, L D, vis B D juxtà directionem tangentis in B agens nullam efficaciam habet ad globum promovendum & recta L D vim exponet quâ particula medii globulum perpendiculariter ferit in B. Quia verò radius C B, tangenti perpendicularis est, & ideo (*per constr.*) D L parallela C B, triangula rectangula C E B, B D L, similia sunt, imo ob B L = C B (*per constr.*) æqualia; Est igitur L D ad L B ut B E ad B C.

(m) 190. * *Ut B E ad B C.* Vis L D ductâ ex puncto D ad L B perpendiculari D M, iterum resolvatur in vires L M & M D, & ob triangulorum L M D L D B, similitudinem, erit vis L M ad vim L D, ut L D ad L B, seu ut B E ad B C; nulla verò ratio habenda est vis M D, cujus directio perpendicularis est ad axem A I, quia simili constructione factâ ad alteram hujus axis partem in puncto sphæræ

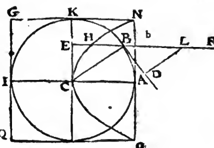


quod puncto B directè oppositum est, vis M D, vi æquali & directè oppositâ eliditur. Unde sola consideranda est vis L M, quæ secundùm directionem axi A I parallelam agit. Est autem vis L M ad vim L B quâ particula medii circularem basim cylindri perpendiculariter ferit in b, ut LD^2 ad LB^2, ob continuè proportionales L M, L D, L B. 190.

(n) * *Conjunctis rationibus.* Et ex æquo.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXIV. THEOR. XXVII.

ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in cylindrum perpendiculariter incidentis, ad ipsum movendum in plagam eandem, ut *BE* quadratum ad *BC* quadratum. Quare si in *b E*, quæ perpendicularis est ad cylindri basem circularem *NAO* & æqualis radio *AC*, sumatur *b H* æqualis $\frac{BE\ quad.}{CB}$: erit *b H* ad *b E* ut effectus particulæ in globum ad effectum particulæ in cylindrum. (°) Et propterea solidum quod à rectis omnibus *b H* occupatur erit ad solidum quod à rectis omnibus *b E* occupatur, ut effectus particularum omnium in globum ad effectum particularum omnium in cylindrum. (p) Sed solidum prius est parabolois vertice *C*, axe *CA* & latere recto *CA* descriptum, & solidum posterius est cylindrus.



para-

(o) * *Et propterea solidum.* Si in omnibus rectæ N A punctis erigantur perpendicula ut b H & b E, sitque N H C curva quam punctum H perpetuò tangit, & recta K C locus omnium punctorum E; solidum quod perpendiculis omnibus b H, per totam basim cylindri ductis occupatur, æquale erit conoidi seu figuræ solidæ quæ ex rotatione figuræ planæ N H C A circà axem C A factâ generatur, & solidum quod à rectis omnibus b E occupatur erit cylindrus ex rotatione rectanguli A K circà eundem axem C A factâ descriptus.

(p) * *Sed solidum prius.* Cùm (*per constr.*) sit $bH = \frac{BE^2}{CB}$ ideoque $bH \times CB = \overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ & (ex naturâ circuli) $BC = CA = KC$, ideoque $BE^2 = KC^2 - CE^2$ & $bH \times CB$, seu $\overline{KC - EH} \times KC$, seu $KC^2 - KC \times EH = KC^2 - CE^2$, ideoque $KC \times EH = CE^2$; sed si ex puncto H duceretur ad C A, ordinata perpendicularis, hæc esset æqualis C E, & abscinderet à C A, partem æqualem E H. Quarè rectangulum sub abscissâ & datâ lineâ K C sive C A, æquale est quadrato ordinatæ ad C A perpendicularis; unde curva C H N, (*per theor. 1. de Parab.*) est Parabola cujus vertex C, axis C A, & latus rectum C A.

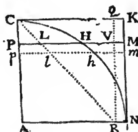
paraboloidi circumſcriptus, & notum eſt (†) quod paraboloïs ſit ſemiſſis cylindri circumſcripti. Ergo vis tota medii in globum eſt duplo minor quam ejuſdem vis tota in cylindrum. Et propterea ſi particulæ medii quieſcerent, & cylindrus ac globus æquali cum velocitate moverentur, foret reſiſtentia globi duplo minor quàm reſiſtentia cylindri. *Q. E. D.*

Scholium.

(q) Eâdem methodo figuræ illæ inter ſe quoad reſiſtentiam comparari poſſunt, eæque inveniri quæ ad motus ſuos in mediis reſiſtentibus continuandos aptiores ſunt. Ut ſi baſe circulari

(†)* *Et notum eſt quod &c.*

191. *Lemma.* Parabolois ſeu ſolidum ex rotatione Parabolæ C H N, circà axem C A genitum eſt ſemiſſis cylindri circumſcripti, qui producitur ex rotatione rectanguli A K circà latus C A. Per punctum mobile P, erigatur ad axem C A normalis P M, parabolam ſecans in H, & rectam K N in M; & in rotatione figuræ totius circà axem C A, lineæ P H & P M circulos deſcribent, qui erunt inter ſe ut radiorum P H, P M quadrata, ſeu (*ex naturâ Parabolæ*) & ob P M = A N, ut abſciſſæ C P, C A. Ducatur jam punctum P cum verticali P H M per totam altitudinem C A, & ſolidum ex rotatione figuræ C H N genitum erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K N A ortum, ut ſumma omnium circulorum quos recta mobilis P H rotando deſcribit, ad ſummam omnium circulorum quos deſcribit recta P M, hoc eſt, ut ſumma omnium C P, ad ſummam omnium C A. In lineâ A N; capiatur A R æqualis A C, jungatur C R ſecans P H in L, & erigatur ad A R, perpendicularis R Q, ſecans P M in V; cum ſit ſemper P L = C P, & P V = C A, ſumma omnium C P, ſeu P L, per totam altitudinem C A, eſt triangulum iſoſcele C R A, & ſumma omnium



C A, ſeu P V, per eandem altitudinem C A, eſt quadratum C A R Q; cum igitur triangulum C R A, ſit ſemiſſis quadrati C A R Q, Parabolois eſt etiam ſemiſſis cylindri circumſcripti. Q. E. D. 191.

(q) 192. *Eâdem methodo &c.* Solidum

lari *CEBH*, quæ centro *O*, radio *O C* describitur, & altitudine *O D*, construendum sit frustum coni *CBGF*, quod omnium eâdem basi & altitudine constructorum & secundum plagam axis sui versus *D* progredientium frustorum minimè resistatur:

dum ex rotatione curvæ cujusvis K B A; circà rectam A I positione datam genitum in medio resistente moveatur secundùm directionem rectæ I A, & oporteat resistentiam quam patitur conferre cum resistentiâ cylindri secundùm eandem directionem moti & cujus basis est circulus radio K C ad A C normali descriptus. Diametro C I ad arbitrium assumptâ describatur semicirculus C S I, agatur per punctum I chorda I S, parallela B D curvam tangenti in puncto quovis B; ducatur per B recta B V parallela A I, & per S recta S H parallela C K, ambæ concurrentes in H, fitque Q H E curva quam punctum H perpetuò tangit; & completo rectangulo CKGI, resistentia solidi rotundi per conversionem curvæ K B A circà C A geniti erit ad resistentiam basis ipsius, seu circuli centro C & radio C K descripti, ut solidum ex rotatione figuræ K Q H E circà C I genitum, ad cylindrum rotatione rectanguli C K G I circà eandem C I factâ descriptum. Producatur enim H B ad L, ut sit B L = C I; ex puncto L demittatur ad B D perpendicularis L D, & ex D ad B L perpendicularis D M; & eodem modo quo suprà (190) patet efficaciam particulæ medii ad movendum solidum totum K B A secundùm plagam incidentiæ suæ L B esse ad efficaciam particulæ ejusdem secundum eandem rectam in basim circularem K C, perpendiculariter in P ad cylindrum qui rotatione rectanguli C K G I describitur movendum in plagam eandem, ut est LD^2 ad LB^2, seu etiam ut est L M ad L B; sed (per constr.) C I = L B, & ob angulum S I C = D B L & angulum I S C = B D I, est etiam C T seu P H = L M; Quarè solidum quod à rectis omnibus P H, occupatur,

patur, erit ad solidum quod à rectis omnibus P V$=$C I, occupatur, aut quod idem est, solidum ex rotatione figuræ C K Q H E circà C I, erit ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I genitum, ut resistentia solidi quod figura C K B A circà C A, rotata describit, ad resistentiam baseos circularis quam describit recta C K quæ eadem est cum resistentiâ cylindri cujuslibet ejusdem basis, quia superficies cylindri quam recta K G rotando circà A I describit, nullam resistentiam patitur, secundùm directionem motûs ipsi K G parallelam. Q. E. D.

193. Ex constructione liquet, si recta quæ curvam K B A tangit in A sit ad axem C A normalis, punctum E coincidere cum puncto I, & si recta tangens curvam K B A, in K perpendicularis sit ad K C, punctum Q in quo curva E H secat latus K G coincidere cum puncto K.

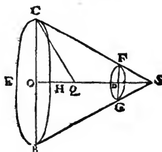
194. Ex puncto B demittatur ad C A perpendicularis B R, dicaturque C I $= a$, A R $= x$, B R $=$ H T $=$ C P $= y$, H P $=$ C T $= z$, B M $= dx$, N n perpendicularis ad B L curvæque occurrens in n $= dy$, ac proindè B n^2 $= dx^2 + dy^2$. Et quoniam triangula B n N, I C S, similia sunt (*per constr.*) erit B n^2 : N n^2 $=$ C I^2 : C S^2 $=$ C I : C T, hoc est, $dx^2 + dy^2 : dy^2 = a$ z. Et propterea $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, formula per quam ex datâ æquatione ad curvam K B A, inveniri potest æquatio ad curvam alteram E H Q & contrà; nam quoniam C P $= y$, si loco dx eruatur ex æquatione curvæ K B A ejus valor in y & dy habebitur æquatio quæ continebit z, y & dy sive C P, P H & fluxionem P C, cum constantibus.

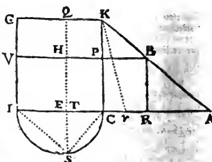
195. Ducta sit ordinata p h alteri P H infinitè propinqua; & si radius sit ad peripheriam circuli ut unitas ad numerum p, erit py peripheria circuli quem linea P C circà axem C I, rotando describit, ideòque annulus cylindricus quem arcus P H h p in eâdem convolutione describit, erit $pzydy$, & inde solidum ex rotatione figuræ C P H E, genitum, erit S. $pzydy$, fluente hâc ità sumptâ ut factâ $y = 0$ ea evanescat. Quare cùm cylindrus convolutione rectanguli C P V I, descriptus sit $\frac{1}{2} payy$, resistentia solidi ex revolutione figuræ A B R geniti, erit ad resistentiam baseos ipsius circuli radio B R descripti ut S. $pzydy$ ad $\frac{1}{2} payy$, seu ut S. $zydy$ ad $\frac{1}{2} ayy$.

196. Sit K B A ellipsis vel hyperbola cujus vertex A axis principalis A I. Sit semiaxis principalis $= b$, semilatus rectum $= c$, A R $= x$, R B $= y$, & erit $byy = 2bcx - cxx$ æquatio ad ellipsim; & $byy = 2bcx + cxx$, æquatio ad hyperbolam. Prioris æquationis fluxio $by\,dy = bc\,dx - cx\,dx$, ex quâ habetur $dx^2 = \frac{b^2y^2dy^2}{(bc - cx)^2}$
$= \frac{by^2dy^2}{b^2cc - 2bccx + ccxx} = \frac{by^2dy^2}{bcc - cyy}$. 196.
Hinc æquatio (194) $a\,dy^2 = z\,dx^2 + z\,dy^2$, in hanc abit * $a\,dy^2 = \frac{zby^2dy^2}{-cy^2 + bcc} + z\,dy^2$ sive dividendo per dy^2 & ad communem denominatorem revocando utrumque æquationis membrum fit $-acy^2 + abcc = by^2z - cy^2z + bccz$ ergo est $z = \frac{-acy^2 + abcc}{\overline{b - c} \times y^2 + bcc}$ & factâ divisione $z = \frac{-ac}{b - c} + \frac{ab^2c^2}{(b-c) \times (\overline{b - c} \times y^2 + bcc)}$ unde erit $zydy = \frac{-acydy}{b - c} + \frac{ab^2c^2ydy}{(b-c) \times (\overline{b-c} \times y^2 + bcc)}$ sumptisque fluentibus est S. $zydy = \frac{-acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L. $\overline{\overline{b - c} \times y^2 + bcc}$ $+ Q$ *const.* (ut patebit si hujus quantitatis fluxio sumatur): Facta autem $y = 0$ erit $0 = \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L. $bcc + Q$ *const.* ideoque Q *const.* $= -\frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L. bcc, unde tandem habetur S. $zydy = -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ (L. $\overline{\overline{b - c} \times y^2 + bcc}$ — L. bcc) sive S. $zydy$ $= -\frac{acy^2}{2(b-c)} + \frac{ab^2c^2}{2(b-c)^2}$ L. $\frac{\overline{b - c} \times y^2 + bcc}{bcc}$, Est ergo resistentia conoidis Elliptici A B R ad resistentiam suæ baseos, seu circuli radio B R descripti ut $-\frac{cy^2}{2(b-c)} + \frac{b^2c^2}{2(b-c)^2}$ L. $\frac{\overline{b - c} \times y^2 + bcc}{bcc}$ ad yy. Pro conoide

Hy-

(r) biseca altitudinem $O\ D$ in Q & produc $O\ Q$ ad S ut sit $Q\ S$ æqualis $Q\ C$, & erit S vertex coni cujus frustum quæritur.



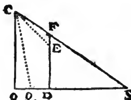


Hyperbolico, invenietur $a\,d\,y^2 = \frac{z\,b\,y^2\,d\,y^2}{c\,y^2 + b\,c\,c} + z\,d\,y^2$ unde eodem iterato calculo prodibit ratio ejus resistentiæ ad resistentiam baseos ut $+ \frac{c\,y^2}{2(b+c)} + \frac{b^2 c^2}{2(b+c)^2} \times$ L. $\frac{\overline{b+c} \times y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2. Pro conoide Parabolico, fiat in formulâ resistentiæ Conoidis Elliptici axis b Infinitus, cæterisque terminis in quibus b non occurrit deletis, erit Conoidis Parabolici resistentia ad resistentiam suæ Baseos ut $\frac{b^2 c^2}{2 b^2} \times$ L. $\frac{b\,y^2 + b\,c\,c}{b\,c\,c}$ ad y^2, sive ut c^2 L. $\frac{y^2 + c\,c}{c\,c}$

197. Sit K B A linea recta, & quia chorda I S parallela est rectæ K A, (192) punctum H est semper in lineâ rectâ T H Q, ideóque resistentia coni revolutione trianguli K A C circà A C geniti erit ad resistentiam circuli radio C K descripti, ut cylindrus ex rotatione rectanguli C K Q L ad cylindrum ex rotatione rectanguli CKGI circà C I, id est, ob communem utriusque cylindri basim, ut altitudo C T ad altitudinem C I; & est C T ad C I, in ratione duplicatâ C S ad C I vel K C ad K A, seu in ratione duplicatâ sinûs anguli K A C ad sinum totum. Simili modo resistentia coni quem recta B A rotata describit est ad resistentiam circuli radio B R descripti in eâdem ratione duplicatâ K C ad K A; & (dividendo) resistentia annuli conici quem recta K B, circà C A rotata describit est ad resistentiam annuli circularis quem in eâdem convolutione describit recta K P in eâdem duplicatâ ratione K C ad K A. Resistentia verò coni truncati convolutione figuræ K B R circà C R, geniti, est ad resistentiam baseos ipsius sive circuli radio C K, descripti ut solidum quod figura CKQHVI, circà C I rotando describit, ad cylindrum ex rotatione rectanguli C K G I ortum. Est autem solidum prius summa duorum cylindrorum, revolutione rectangulorum C K Q T & T H V I circa C I productorum, hoc est, (ob areas circulorum radiorum quadratis proportionales) ut summa $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$.

(r) 198.* *Biseca altitudinem &c.* Datis C K & C R invenienda sit positio rectæ K B ut

(f) Unde obiter, cùm angulus *CSB* semper sit acutus, con-



ut resistentia frusti conici quod per revolutionem figuræ K B R circà C A producitur sit omnium minima. Resistentia illa est ut $CK^2 \times CT + CP^2 \times TI$; sed $KA^2 : CK^2 = CI : CT = \frac{CK \times CI}{KA^2}$; & similiter $KA^2 : CA^2 = CI : TI = \frac{CA^2 \times CI}{KA^2}$. Quarè ob datam C I, resistentia coni truncati erit ut $\frac{CK^4 + CP^2 \times CA^2}{KA^2}$. Dicantur $KC = b$, $CR = 2c$, $CA = x$, ideóque $KA^2 = bb + xx$, & quia $CA\,(x) : KC\,(b) = RA\,(x - 2c) : BR$, seu CP, erit $CP = \frac{bx - 2cb}{x}$, & indè resistentia coni truncati erit ut $\frac{b^4 + (bx - 2cb)^2}{bb + xx} = \frac{b^4 + b^2x^2 - 4b^2cx + 4c^2b^2}{bb + xx} = bb + \frac{4bbcc - 4bbcx}{bb + xx}$. Capiatur hujus quantitatis fluxio & (40) ponatur nihilo æqualis, fiet $\frac{4bbcdx}{bb+xx} - 2xdx\frac{(4bbcc - 4bbcx)}{(bb+xx)^2} = 0$, sive $\frac{1}{bb+xx} - \frac{2cx - 2xx}{(bb+xx)^2} = 0$, ideóque $-bb - xx - 2cx + 2xx = 0$, undè habetur $xx - 2cx = bb$, & indè eruitur $x = c + \sqrt{bb + cc}$. Biseca igitur altitudinem CR in r, ut sit $Cr = c$, & juncta $Kr = \sqrt{bb + cc}$, erit x, seu $CA = Cr + Kr$, sicut NEWTONUS in constructione posuit. 198

(f) 199. * *Undè obiter.* Angulus externus (*vid. fig. textûs*) æqualis est summæ angulorum æqualium Q C S & Q S C, id est, angulo C S B; & quia C O Q rectus est, angulus C Q O ideoque & æqualis C S B, est semper acutus. Altitudo O D quamminima evadat tandemque evanescat; & quoniam (*in hâc hypoth.*) rectæ O C, O S, Q S, C Q æquales fiunt, angulus C S O, & æqualis D F S fit semirectus, ejusque complementum ad duos rectos DFC grad. 135. Ducatur ad F D recta quælibet C E & evanescente O D resistentia coni truncati quem figura C F D circà O S rotata describit, erit in suo genere minima (198), ideóque minor quam resistentia coni truncati ex revolutione figuræ C E D circà O S geniti; subducatur utrinquè resistentia circuli quem recta D E rotando describit; & resistentia superficiei ex rotatione figuræ C F E circà O S, minor erit quam resistentia annuli conici quem in eâdem revolutione describit recta C E,

(t) consequens est, quod si solidum *ADBE*, convolutione figuræ ellipticæ vel ovalis *ADBE* circa axem *AB* factâ generetur, & tangatur figura generans à rectis tribus *FG*, *GH*, *HI* in punctis *F*, *B* & *I*, eâ lege ut *GH* sit perpendicularis ad axem in puncto contactus *B*, & *FG*, *HI* cum eâdem *GH* contineant angulos *FGB*, *BHI* graduum 135, solidum, quod convolutione

(t) 200. *Consequens est.* Ut hæc consequentia pateat, demonstrandum est resistentiam superficiei quæ per rotationem figuræ F G B circà axem A B gignitur, minorem esse resistentiâ superficiei quam in eâdem revolutione arcus F B, describit. Ductis itaquè ad curvam ordinatis verticalibus & infinitè propinquis P N, p n, & ex puncto n ad P N productam rectâ n m, parallelâ F G, atquè ex m & N in p n perpendicularibus m q, N r; dicantur F E ad axem A B normalis $= b$, G B $= c$, B P $= x$, P N $= y$, & quia productâ F G ut axi occurrat in s, est ob angulos E F S, B G S semirectos (*per hyp.*) E S $=$ F E $= b$, & B S $=$ G B $=$ c, erit E B $= b - c$. Est quoquè P p $=$ m q $=$ q n $= dx$, r n $= dy$, & hinc q r $= dy - dx$, ac proindè P m $= y + dy - dx$, & p n $= y + dy$. Vis particulæ fluidi in G B perpendiculariter incidentis sit $= a$, & radius circuli ad peripheriam ut 1 ad p; his positis, resistentia circuli radio P N descripti exponi poterit (195) per $\frac{1}{2} payy$; resistentia circuli radio P m descripti per $\frac{1}{2} pa(y + dy - dx)^2 = \frac{1}{2} payy + paydy - paydx$, neglectis scilicet terminis qui respectu $paydy$ & $paydx$, evanescunt. Hinc resistentia annuli circularis quem recta N m, rotando describit, exponetur per differentiam $paydy - paydx$. Resistentia circuli radio p n descripti erit ut $\frac{1}{2} pa(y + dy)^2 = \frac{1}{2} payy + paydy$, ex quâ si auferatur resistentia circuli radio P m descripti, remanebit resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ q n geniti $= paydx$ & cum sit (197), n m^2 ad n q^2, seu F S^2 ad F E^2, sive 2 ad 1, ut illius annuli resistentia ad resistentiam superficiei ex revolutione rectæ n m genitæ, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{2} paydx$. Quare resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotata describit, exponatur per quantitatem $paydy - \frac{1}{2} paydx$, &, sumptis fluentibus, harum resistentiarum summa per totum arcum B N exponetur per $\frac{1}{2} payy - \frac{1}{2} pa \times$ B N P aream, cui nihil addendum est nec subducendum; cum factâ $y = 0$, hæc fluens evanescat, ut oportet. Si verò loco y scribatur b, seu F E, resistentia om-

tione figuræ *ADFGHIE* circa axem eundem *AB* generatur, minus resistitur quam solidum prius, si modo utrumque secundum plagam axis sui *AB* progrediatur, & utriusque terminus *B* præcedat. Quam quidem propositionem in construendis navibus non inutilem futuram esse censeo.

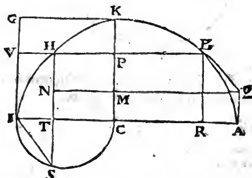
omnium superficierum quæ ex rotatione figurarum n m N, per totum arcum F B, descriptarum generarentur, erit ut $\frac{1}{4} pabb - \frac{1}{4} pa \times$ B N F E aream.

Porrò resistentia circuli radio G B descripti exponenda est per $\frac{1}{4} pacc$, & resistentia circuli radio F E descripti per $\frac{1}{4} pabb$; ideóque ductâ G H ad F E normali, resistentia annuli circularis ex rotatione rectæ F H, per $\frac{1}{4} pabb - \frac{1}{4} pacc$; undè cum sit FS^2 ad FE^2, seu 2 ad 1 ut annuli illius resistentia ad resistentiam superficiei ex rotatione rectæ F G, hæc resistentia erit ut $\frac{1}{8} pabb - \frac{1}{8} pacc$, totaque proindè resistentia coni truncati ex rotatione figuræ F G B geniti exponetur per $\frac{1}{8} pabb + \frac{1}{8} pacc$. Quarè resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, est ad resistentiam frusti conici ex revolutione figuræ F G B orti ut $\frac{1}{4} pabb - \frac{1}{4} pa \times$ B N F E, ad $\frac{1}{8} pabb + \frac{1}{8} pacc$; sive dividendo per $\frac{1}{8} pa$, ut $2bb - 2$ B N F E ad $bb + cc$. Si area B N F E æqualis esset trapezio B G F E, cùm hoc sit $= \frac{1}{2} EB \times \overline{FE + BG} = \frac{bb - cc}{2}$, foret $2bb - 2$ B N F E $= bb + cc$; ideóque prædictæ resistentiæ duæ æquales essent; sed trapezium B G F E majus est areâ B N F E, quæ (per hyp.) tota in trapezio continetur, & propterea quantitas $2bb - 2$ B N F E, major est quantitate $bb + cc$; resistentia igitur omnium superficierum ex rotatione figurarum n m M, superat resistentiam coni truncati ex revolutione figuræ F G B producti. Verùm 200.
(199) resistentia superficiei quam figura n m N circà E B rotando describit, minor est resistentiâ superficiei quam in eadem rotatione describit n N; ideòque resistentia omnium superficierum quas figuræ n m N, per totum arcum B N F distributæ rotando describunt, minor est resistentiâ totius superficiei ex rotatione arcûs B N F genitæ. Ergò resistentia coni truncati per rotationem figuræ F G B descripti minor quoque est quam resistentia superficiei ex rotatione arcûs B N F productæ. Q. E. D.

201. Quæcumque igitur sit figura (in textu) A N B, regularis vel irregularis,

 modò

modò arcus F B concavitatem axi A B obvertat, & totus intrà lineas F G, B G contineatur, per hanc NEWTONI propositionem inveniri semper potest alia figura majoris capacitatis & minoris resistentiæ; Quod in construendis navibus usum habere potest. Resistentia adhuc minuitur si loco circuli radio G B descripti adjungatur conus quem recta G R, ad axem productum utcumque ducta rotando describit. In omnibus autem curvis, quæ æquatione inter abscissas x & ordinatas y definiuntur, facillimè invenitur punctum B per quod ducta tangens angulum semirectum cum ordinatâ perpendiculari constituit. Quia in illo puncto B, ordinatæ fluxio dy æqualis est fluxioni abscissæ dx ut si æquatio ad curvam sit $a^2 x = y^3$, & sumptis fluxionibus $a^2 dx = 3y^2 dy$, ponendo $dx = dy$, habetur $a^2 = 3y^2$, & hinc $y = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, undè per æquationem $a^2 x = y^3$, invenitur $x = \frac{1}{3} a \sqrt{\frac{1}{3}}$.



PROBLEMA.

202. Datâ curvâ K B A quam recta Q A ad axem C A perpendicularis tangit in A, invenire punctum B per quod si ducatur tangens altera B Q priori Q A occurrens in Q, resistentia solidi per convolutionem figuræ K B Q A, circà axem C A descripti sit in suo genere minima.

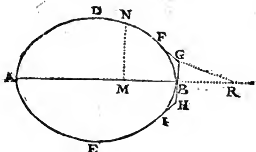
Eâdem constructione quâ suprà (192) factâ; ex puncto Q ducatur ad H T perpendicularis Q N secans K C in M dicanturque C I $= a$, A R $= x$, B R seu P C $= y$, P H seu T C $= z$, Q A $= v$, & peripheria circuli radio 1 descripti $= p$. His positis resistentia solidi ex revolutione arcûs B A circà axem C A geniti exponi potest per $S.\,pzydy$, (195); resistentia verò coni truncati ex rotatione figuræ B Q A circà C A, per $\frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$ Sit R resistentia data solidi ex rotatione arcûs totius K B A geniti, & resistentia superficiei quam in eâdem rotatione describit arcus K B, erit $R - S.\,pzydy$, ideòque resistentia solidi per rotationem figuræ K B Q A, erit $R - S.\,pzydy + \frac{1}{2}pavv + \frac{1}{2}pyyz - \frac{1}{2}pvvz$. Hujus quantitatis fluxio nihilo æqualis fiat (40) & ob datam R, habebitur $-pzydy + pavdv + pzydy + \frac{1}{2}pyydz - pzvdv - \frac{1}{2}pvvdz = 0$; undè invenitur $(z-a)\,2vdv = (yy - vv)\,dz$. Cùm igitur sit etiam (194) $ady^2 = zdx^2 + zdy$, ex his æquationibus & ex æquatione ad curvam K B A, invenientur valores litterarum x, y, v, seu R A, R B, & A Q. Q. E. I.

Exempli causâ. Sit K B A parabola, cujus vertex A, axis A C, latus rectum $= 4c$, & ideò $4cx = yy$, erit A Q $= v = \frac{1}{2}y$, ex naturâ Tangentis Parabolæ, $\frac{1}{4}yy = cx = vv$, $cdx = 2vdv$, $yy - vv = 3cx$. $ydy = 2cdx$, $dy^2 = \frac{cdx^2}{x}$. Undè æqua-

tio

(n) Quòd si figura $DNFG$, ejusmodi sit curva, ut, si ab ejus puncto quovis N ad axem AB demittatur perpendiculum NM, & à puncto dato G ducatur recta GR quæ parallela sit rectæ figuram tangenti in N, & axem productum secet in R, fuerit MN ad GR ut GR *cub.* ad $4\ BR \times GBq$; solidum

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VI. PROP. XXXIV. THEOR. XXVIII.



quod figuræ hujus revolutione circa axem AB factâ describitur, in medio raro prædicto ab A versus B movendo, minus resistetur quam aliud quodvis eâdem longitudine & latitudine descriptum solidum circulare.

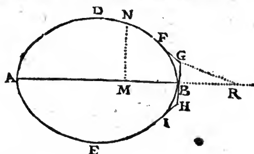
tio $ddy^2 = zdx^2 + zdy^2$, in hanc mutatur $\frac{acdx^2}{x} = zdx^2 + \frac{czdx^2}{x}$, ex quâ habetur $z = \frac{ac}{c+x}$, & $dz = \frac{-acdx}{(c+x)^2}$. Ex his verò omnibus æquatio $(z-a)\,2vdv = (yy-vv)\,dz$, in hanc migrat $-\frac{acxdx}{c+x} = -\frac{3accxdx}{(c+x)^2}$, sive $1 = \frac{3c}{c+x}$ ex quâ eruitur $x = 2c$; & hinc $y = 2c\sqrt{2}$; & $z = \frac{1}{3}a$. Quarè cùm sit a ad z, in ratione duplicatâ sinûs totius ad sinum anguli B Q M, erit $\sqrt{3}$ ad 1 ut sinus totus ad sinum anguli B Q M, qui proindè est 35°. 16′, angulus Q B R, 54°. 44′ & angulus B Q A 125°. 46′. 203

(n) 203. *Quòd si figura &c.* Invenienda

sit

sit curva L D, quæ circà axem C B rotata describat superficiem solidi quod in fluido motum secundùm axis directionem à C versus B, minorem patiatur resistentiam quàm solidum quodvis aliud per puncta L & D pari ratione descriptum & similiter motum. Ex punctis curvæ infinitè propinquis N, n, Q, demittantur ad axem C B ordinatæ N M, n m, P Q & ad n m, Q P, perpendicula N r, n s. Sit p peripheria circuli cujus radius est unitas, & data a vim exponat quâ singulæ fluidi particulæ in rectam N M perpendiculariter incurrunt. His positis resistentia annuli circularis quem recta n r, circà axem C B rotata describit, exponi potest, ut suprà, per $\frac{1}{2} pa(nm^2 - NM)^2$ seu per $pa\, NM \times nr$, ob $nm^2 - NM^2 = nm \times NM \times nm - NM = 2\, MN \times nr$. Et quia nN^2 est ad nr^2 ut resistentia illa ad resistentiam superficiei quam linea n N circà C B rotata describit (196) hæc resistentia erit ut $\frac{pa \times MN \times nr^3}{nN^2}$; eodemque modo patet resistentiam superficiei ex rotatione lineæ Q n genitæ exponi posse per $\frac{pa \times mn \times QS^3}{Qn^2}$. Fingatur curvam hanc in aliam mutari Q h N inter puncta N, Q ductam & Q S, n r tanquam magnitudine datas assumi variantibus N r, & n s, dicanturque constantes $MN = b$, $mn = c$, $nr = f$, $Qs = g$ & variabiles $Nn = v$, $nQ = z$, $Nr = m$, $ns = n$, & resistentia superficiei quam arculus Q n N circà C B rotando describit, exponetur per $\frac{pabf^3}{vv} + \frac{pacg^3}{zz}$, si curva Q n N sit ea quæ minimam resistentiam patitur, hujus quantitatis fluxio (40 & per hyp.) nihilo æquanda est, & indè habetur $-\frac{2pabf^3vdv}{v^4} - \frac{2pacg^3zdz}{z^4} = 0$. Productâ ergo lineâ s n, usque ad novum punctum h, ad quod ducuntur lineæ N h, Q h, in has cadant perpendicula n e, n t, & evanescente n h, erit $th = dz$ & $eh = -dv$. Quia verò, evanescente n h triangula n e h, n r N, & n t h, Q s n, similia sunt; erit $Nn\,(v) : Nr\,(m) = nh : eh\,(-dv)$,

&



& sn(nv) : Qn(z) = th(dz) : nh; ideòque ex æquo, $nv : mz = dz : -dv = \frac{mz\,dz}{nv}$. Loco $-dv$, scribatur hic ipsius valor in æquatione modò inventâ, & illa in hanc migrabit $\frac{2pabf^3mzv\,dz}{nv^3} = \frac{2paeg^3z\,dz}{z^4}$, & hinc fit $\frac{2pabf^3m}{v^4} = \frac{2paeg^3n}{z^4}$ seu $\frac{2pa \times MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{2pa \times mn \times Qs^3 \times ns}{Qn^4}$. Undè manifestum est quantitatem $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ pro quolibet curvæ puncto N, datam seu constantem esse.

* Quæ quidem curva D N F G (*vide figuram textus*) talis esse debet, ut angulus quem facit in G cum lineâ B G sit semirecti complementum per notam 200. illic ergo linea B G data, est ipsa ordinata M N & Triangulum nRN est Rectangulum æquicrurum, ideoque $Nr = nr$ & $Nn^2 = 2nr^2$ ergo quantitas constans $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4}$ in hanc abit $\frac{GB \times nr^4}{4nr^4} = \frac{GB}{4}$. Talis ergo est hujus curvæ natura ut quovis in puncto ducatur ordinata M N sit semper $\frac{MN \times nr^3 \times Nr}{Nn^4} = \frac{GB}{4}$, sive ponendo pro MN, y; pro nr, dy; pro Nr, dx; pro Nn², $dx^2 + dy^2$, erit $\frac{y\,dy^3\,dx}{dx^2+dy^2} = \frac{GB}{4}$: sive adhibendo constructionem Newtoni, si ducatur G R Tangenti Parrallela, ob triangula G B R, n r N ubique similia, erit $\frac{GB}{GR} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ & $\frac{BR}{GR} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$ ideoque $\frac{GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{dy^3\,dx}{dx^2+dy^2}$ & $\frac{MN \times GB^3 \times BR}{GR^4} = \frac{GB}{4}$ sive $MN \times GB^2 \times 4BR = GR^4$ unde est $MN : GR = GR^3 : GB^2 \times 4BR$; Q. E. D. 203.

Dicatur G B = a, fiet $\frac{y\,dy^3\,dx}{(dx^2+dy)^2} = \frac{a}{4}$ ideoque $4y\,dx\,dy^3 = a(dx^2+dy)^2$; ex quâ curvæ L N D per Logarithmicam constructio eruitur. Ponatur $dx = \frac{z\,dy}{a}$, & hoc valore loco dx in æquatione ad curvam substituto, habetur $\frac{4yz\,dy^4}{a} = \frac{a(zz+aa)^2\,dy^4}{a^4}$, undè invenitur $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z} = \frac{z^3}{4aa} + \frac{1}{2}z + \frac{aa}{4z}$, & (sumptis fluxionibus) $dy = \frac{3z^2\,dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aa\,dz}{4zz}$; loco dy scribatur hic ipsius valor in æquatione assumptâ $dx = \frac{z\,dy}{a}$, &

fit

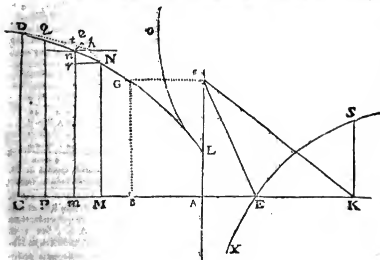
fit $dx = \frac{3zzdz}{4a^3} + \frac{zdz}{2a} - \frac{adz}{4z}$, sumptisque fluentibus $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{1}{4}aL.z + Q$ *const.* Porrò si assumatur abscissæ initium in loco B, ubi ordinata B L est omnium minima, id est (40) ubi $dy = 0$ quo supposito, fit $\frac{3z^2dz}{4aa} + \frac{1}{2}dz - \frac{aadz}{4zz} = 0$, ideoque $3z^2 + 2aa = \frac{a^4}{z^2}$ & $z^4 + \frac{2}{3}a^2z^2 = \frac{1}{3}a^4$ unde habetur $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ (& $y = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$), substituto hoc valore loco z, in æquatione quæ dat abscissæ x valorem, hababitur ex Hypothesi initium axeos eritque $x = 0 = \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}} + Q$.*const.* & ideo $Q = -\frac{5a}{48} + \frac{1}{4}aL.a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

* Erit igitur abscissa $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$ & ut habeatur origo abscissarum, notendum quod ordinata in B sive G B æqualis sit a, ex suprà demonstratis; cùm itaque sit ubique $y = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ erit in eo puncto $a = \frac{(zz+aa)^2}{4a^2z}$ ex quâ æquatione si eruatur valor z invenietur $z = a$, ac per consequens erit $x = \frac{3a^4}{16a^3} + \frac{aa}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}aL.\frac{a}{a\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}aL.\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{a}{3} - \frac{1}{4}a \times L.\sqrt{3}$. Describatur ergo Logarithmica X V, Asymptoto Y Z & subtangente æquali $\frac{1}{4}$ G B, sive $\frac{1}{4}a$, in quâ sumatur ubivis ordinata p m, quæ producatur in r donec p r = 3 p m, ducatur ad Logarithmicam r t quæ sit Asymptoto parallela, erit $\frac{1}{2}$ r t æqualis Logarithmo $\sqrt{3}$ in Logarithmica cujus subtangens $\frac{1}{4}a$, itaque $\frac{GB}{3} - \frac{1}{2}rt = x$, quo valore translato ex B ad A in axe producto habetur A origo abscissarum: In eo puncto A ductâ perpendiculari A L g, describatur Logarithmica S X cujus ea linea A L g sit Asymptotus, & $\frac{1}{4}$ G B sive $\frac{1}{4}a$ subtangens, & quæ producto axe ih E ut sit A E $= a\sqrt{\frac{1}{3}}$ transeat per punctum E " & sumptâ A R magnitudinis arbitrariæ pro z, ductâque R S parallelâ B L logarithmicæ occurrente in S capiatur abscissa A M, seu $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} \mp$ R S nimirum $-$ R S, cum est A R $>$ A E, & $+$ R S ubi A R $<$ A E; ac denique capiatur ordinata M N, seu $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$; punctum N erit in curvâ quæsitâ L D. Quod ut pateat, demonstrandum superest, esse $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}a\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Hoc autem manifestum est; nam RS, est differentia logarithmorum correspondentium quantitatibus A R & A E, sive z & $a\sqrt{\frac{1}{3}}$) sumptorum in Logisticâ cujus subtangens est $\frac{1}{4}a$, & hæc differentia positiva est, ubi A R (z) $>$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$) negativa ubi A R (z) $<$ A E ($a\sqrt{\frac{1}{3}}$), & nulla, cùm sit A R = A E, seu $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, ut oportet. Quarè cùm A R superat A E, est $-$ R S $= -\frac{1}{4}a \times \overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$, & ubi A E superat A R, fit $+$ R S $= -\frac{1}{4}a\,\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Est igitur semper $\mp$ R S $= -\frac{1}{4}a\,\overline{L.z - L.a\sqrt{\frac{1}{3}}}$.

204. Datâ minimâ ordinatâ A L, curva L N D, describi potest. Nam cùm sit (*ex dem.*) A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$ A E, & G B sive A g $= a$, datâ A L dantur A g, A E, & subtangens Logarithmicæ quæ proindè poterit describi.

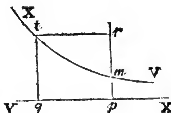
205. Datis duabus ordinatis M N & C D magnitudine, curva describi potest. Si enim in æquatione $y = \frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$ loco y scribantur seorsim datæ M N, & C D dabuntur z & a undè dabitur minima ordinata A L $= \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{1}{3}}$.

206. Datâ ordinatâ quâlibet C D cum abscissâ correspondente C A, curva describi potest. Si enim in æquatione $y =$ (z z



$\frac{(zz+aa)^2}{4aaz}$, loco y scribatur data C D; habebitur z per a & datas quantitates; deindè si in æquatione alterâ $x = \frac{3z^4}{16a^3} + \frac{zz}{4a} - \frac{5a}{48} - \frac{1}{4}a\,L.z - L\,a\sqrt{\frac{1}{3}}$, loco x substituatur data C A & loco z, ejus valor per a & datas inventus, dabitur æquatio inter a & datas quantitates, & ex hâc æquatione invenietur linea a, quâ datâ, datur ordinata minima A L.

207. Recta g R, parallela est tangenti per punctum N ductæ. Est enim (per constr.) $dx = \frac{z\,dy}{a}$, ideoque n r (dy) : r N (dx) = g A (a) : A R (z) ex quâ proportione & propter angulum rectum in r, & in A, patet triangula n r N, g A R, similia esse, & proptereà g R parallelam n N, seu tangenti per N ductæ. Hinc cum A E sit æqualis $a\sqrt{\frac{1}{3}} = z$ ubi $z = o$ (103) erit g E tangenti per L ductæ parallela, sitque A g = a est g E$^2 = \frac{a^2}{3} +$



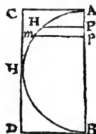
$a^2 = \frac{4a^2}{3}$ atque adeo g E $= 2a\sqrt{\frac{1}{3}} = 2$ 207.
A E erit g E ad A E ut 2, ad 1, & ità sinus totus ad sinum anguli A g E, sivè ad sinum anguli quem curva constituit cum minimâ ordinatâ A L, qui proindè est 30°.

208. Quoniam A R, in infinitum crescere ac decrescere potest si capiatur semper A R > B E, describetur curvæ ramus L N D, qui concavitatem axi B C obvertit, & ab utroque axe A C, A g, in infinitum recedit; at si semper sumatur B R < B E, describetur alter curvæ ramus LO,

qui priori L D convexitatem offert, & ab utroque axe B C, B G, in infinitum abscedit; curva igitur D L O punctum regressûs habet in L, & solidum minimæ resistentiæ ex ejus circà axem A C revolutione genitum, convexum vel concavum, & partim convexum, partim concavum esse potest.

209. Quoniam $d x = \frac{z d y}{a}$, erit areæ curvæ elementum $y d x = \frac{z y d y}{a}$, elementum arcus curvæ $\sqrt{d x^2 + d y^2} = \frac{d y \sqrt{a a + z z}}{a}$, elementum superficiei à curvâ circà axem A C rotatâ genitæ $= \frac{z p y d y \sqrt{a a + z z}}{a}$ (si p sit semiperipheria circuli cujus radius est unitas); elementum solidi in eâdem revolutione descripti $= \frac{p z y^2 d y}{a}$; & resistentia superficiei $\frac{2 p y d y \sqrt{a a + z z}}{a}$, erit $\frac{a d y^2}{d x^2 + d y^2} y d y = \frac{a d y^2}{d y^2 \times a a + z z} y d y$ sive ut $\frac{y d y}{a a + z z}$. Porrò si in his fluxionibus loco y, & $d y$, substituantur ipsarum valores qui ex æquationibus $y = \frac{(zz + aa)^2}{4 a a z}$, & $d y = \frac{3 z^2 d z}{4 a a} + \frac{1}{2} d z - \frac{a a d z}{4 z z}$ habentur, fluens $S. y d x$, seu area curvæ inveniri poterit algebraicè, aliæ verò fluentes ab hyperbolæ quadraturâ pendent.

Schol. Quæ ad solidum minimæ resistentiæ spectant, ea ferè omnia mutuati sumus ex Illmo. Marchione *Hospitalio*, tum in Act. Lipsiens. an. 1699, tum in Monum. Paris. ejusdem anni. De eodem solido plurima etiam dederunt celeb. viri *Joh. Bernoull.* in Act. Lips. an. 1699. 1700. *Hermannus* in Phoronomiâ, & *Facio* ad calcem libri de murorum inclinatione &c. Sed qui totam hanc NEWTONI propositionem maximâ universalitate pertractatam habere volunt, legant tractatum à Clariss. *Bouguero* editum, & ab Academiâ Regiâ Parisiensi an. 1727. præmio condecoratum, cui titulus; *De la mâture des Vaisseaux*, nec non *Monum. Paris.* an. 1733. in quibus elegantissima & universalissima legitur ultimæ Scholii *Newtoniani* partis solutio. Rem à clariss. Autore demonstratam hic observatu dignissimam judicamus, videlicet, solidum rotundum cujus constructionem modò dedimus, in quâlibet hujus solidi directione & juxtà quamlibet fluidi impulsionem, minimam omnium pati resistentiam, exceptis quibusdam casibus qui in navigationis praxi vix unquam occurrunt, cum scilicet directio solidi majores angulos cum axe constituit; & quod mirum est, in his casibus, solidum illud quod erat minimæ resistentiæ & navigationi aptissimum, solidum maximæ resistentiæ & ad usum navigationis omnium minime idoneum evadit. Quæ verò ad universalem solidorum in fluidis resistentiam pertinent, peti possunt ex aureo *Joh. Bernoullii* libello qui inscribitur: *Essai d'une Nouvelle Theorie de la manœuvre des Vaisseaux*, & ex *Hermanni* Phoronomiâ.



210. Lemma. *Sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria.* Sphæra generatur per revolutionem semicirculi A H B circà diametrum A B, & cylindrus sphæræ circumscriptus per revolutionem rectanguli A C B D, cujus latera A C, B D circuli radio sunt æqualia. Ductis ordinatis infinitè propinquis P M, p m, dicantur A C $= r$, semiperipheria A H B $= p$, A P $= x$, P p $= d x$, & quia circulorum areæ sunt in ratione duplicatâ radiorum, erit quadratum radii C A, seu $r r$, ad aream circuli A H B, nempè $r p$, ut M P^2, seu $2 r x - x x$ ad aream circuli radio P M descripti, quæ ideò erit $2 p x - \frac{p x x}{r}$; & hinc

so-

PROPOSITIO XXXV. PROBLEMA VII.

Si medium rarum ex particulis quam minimis quiescentibus æqualibus & ad æquales ab invicem distantias liberè dispositis constet: invenire resistentiam globi in hoc medio uniformiter progredientis.

Cas. 1. Cylindrus eâdem diametro & altitudine descriptus progredi intelligatur eâdem velocitate secundum longitudinem axis sui in eodem medio. Et ponamus quòd particulæ medii, in quas globus vel cylindrus incidit, vi reflexionis quam maximâ resiliant. Et cùm resistentia globi (per propositionem novissimam) sit duplo minor quam resistentia cylindri, & globus sit ad cylindrum ut duo ad tria, & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas, ipsasque quàm maximè reflectendo, (x) duplam sui ipsius velocitatem ipsis communicet: cylindrus, quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, communicabit motum particulis, (y) qui sit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri; & globus, quo tempore totam longitudinem diametri suæ uniformi-

solidum ex rotatione elementi P M m p, circà A B genitum, erit $2 p x d x - \frac{p x x d x}{r}$, sumptisque fluentibus, solidum ex rotatione segmenti circularis A M P ortum, erit $p x x - \frac{p x^3}{3 r}$, & factâ A P = A B, seu $x = 2 r$, sphæra tota habetur $= 4 p r r - \frac{8}{3} p r r = \frac{4}{3} p r r$. Sed cylindrus sphæræ circumscriptus est factum ex areâ circuli radio A C descripti in cylindri altitudinem A B, seu est $2 p r r$. Quarè sphæra est ad cylindrum circumscriptum ut $\frac{4}{3} p r r$ ad $2 p r r$, id est, ut 4 ad 6, sivè ut 2 ad 3. Q. E. D.

(x) * *Duplam sui ipsius velocitatem* &c. Cùm singulæ particulæ, cylindri respectu, minimæ sint, si nulla esset particularum medii reflexio, eâdem cum cylin- 210.
dro velocitate moverentur; ac accedente vi reflexionis perfectâ, velocitas illa duplicatur (53. lib. 1.).

(y) * *Qui sit ad totum cylindri motum* &c. Quantitates motûs sunt ut velocitates & massæ conjunctim; massæ verò sunt ut volumina & densitates; ideòque quantitates motûs ut velocitates & volumina & densitates conjunctim. Cùm igitur cylindrus quo tempore dimidiam longitudinem axis sui uniformiter progrediendo describit, medii volumen dimidio volumini cylindri æquale duplâ cum velocitate moveat, sitque proindè factum ex volumine cylindri in ipsius velocitatem æquale facto ex volumine medii moto in ejus velocitatem, motus particulis medii communicatus, erit ad totum cylindri motum ut densitas medii ad densitatem cylindri.

miter progrediendo describit, (z) communicabit motum eundem particulis; (a) & quo tempore duas tertias partes diametri suæ describit, communicabit motum particulis, qui sit ad totum globi motum ut densitas medii ad densitatem globi. Et propterea globus resistentiam patitur, quæ sit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari quo tempore duas tertias partes diametri suæ uniformiter progrediendo describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Cas. 2. Ponamus quòd particulæ medii in globum vel cylindrum incidentes non reflectantur; & cylindrus incidendo perpendiculariter in particulas simplicem suam velocitatem ipsis communicabit, ideoque resistentiam patitur duplo minorem quàm in priore casu, & resistentia globi erit etiam duplo minor quàm prius.

Cas. 3. Ponamus quòd particulæ medii vi reflexionis neque maximâ neque nullâ, sed mediocri aliquâ resiliant à globo; & resistentia globi erit in eâdem ratione mediocri inter resistentiam in primo casu & resistentiam in secundo. *Q. E. I.*

Corol. 1. Hinc si globus & particulæ sint infinitè dura, & vi omni elasticâ, & propterea etiam vi omni reflexionis destituta: resistentia globi erit ad vim quâ totus ejus motus vel auferri possit vel generari, quo tempore globus quatuor tertias partes diametri suæ describit, ut densitas medii ad densitatem globi.

Co-

(z) * *Communicabit motum eundem particulis*, ob resistentiam globi resistentiâ cylindri duplo minorem (prop. 34. lib. 2.)

(a) *Et quo tempore duas tertias partes &c.* * Hùc redit compositio rationum à NEWTONO indicata: Totus Globi motus est ad Cylindri motum, ut 2 ad 3, hæc enim est utriusque massæ ratio; Totus Cylindri motus est ad motum à cylindro communicatum quo tempore dimidiam suam longitudinem describit ut densitas Cylindri (sive Globi) ad densitatem medii, motus ille à cylindro communicatus idem est cum motu à Globo communicato dum totam suam Diametrum percurrit; Denique motus ille a Globo communicatus dum totam suam Diametrum percurrit est ad motum ab eo Globo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ tertias partes ut 3 ad 2, Ideoque totus Globi motus est ad motum ab eo communicatum dum percurrit duas Diametri suæ partes conjunctim ut 2 ad 3, ut densitas Globi ad densitatem medii, & ut 3 ad 2, sive primâ ratione & hâc ultimâ sese compensantibus ut densitas Globi ad densitatem medii. Q. E. D.

Corol. 2. (b) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione velocitatis.

Corol. 3. (†) Resistentia globi, cæteris paribus, est in duplicatâ ratione diametri.

Corol. 4. Resistentia globi, cæteris paribus, est ut densitas medii.

Corol. 5. Resistentia globi est in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis & duplicatâ ratione diametri & ratione densitatis medii.

Corol. 6. Et motus globi cum ejus resistentia sic exponi potest. Sit AB tempus quo globus per resistentiam suam uniformiter continuatam totum suum motum amittere potest. Ad AB

(b) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicata ratione velocitatis.* * Sint globi æquales in eodem medio moti diversâ cum velocitate; motus totus uniuscujusque est ad motum ab ipso communicatum tempore quo duas tertias suæ Diametri percurrit, ut Densitates globorum ad densitates mediorum, ideoque ex hypothesi in eâdem ratione, ergo etiam velocitas unius est ad velocitatem alterius ut motus ab illis communicati temporibus quibus duas tertias suarum Diametrorum (æquales quippe longitudines) percurrunt. Dividantur illa tempora in partes minimas utrinque æquales, & quia Resistentia singulis momentis, ejusdem Globi respectu, uniformis censetur, Resistentiæ momentaneæ erunt directè ut motus amissi & inversè ut tempora quibus amittuntur, sed motus amissi sunt ut velocitates directè & tempora sunt inversè ut velocitates, quia æquales longitudines percurruntur motibus qui uniformes, saltem quam proximè, censentur, ergo resistentiæ momentaneæ sunt bis ut velocitates, hoc est in ratione duplicatâ velocitatis.

(†) * *Resistentia globi cæteris paribus est in duplicatâ ratione Diametri.* * Sint globi æquiveloces, æque densi, in eodem medio moti, sed diversæ sint earum Diametri, fingantur duo Cylindri ejusdem cum iis Diametri, & etiam æquiveloces & æque densi, resistentiæ quas patientur Cylindri singulis momentis erunt ut numerus partium in quas incurrunt, illi verò numeri partium sunt ut Quadrata Diametrorum: Sed facile liquet resistentias Cylindrorum & globorum æquivelocium, ejusdem Diametri, in eodem medio esse in datâ ratione, ergo ut resistentia unius Cylindri ad resistentiam alterius, ita resistentia unius Globi ad resistentiam alterius, sunt ergo Globorum resistentiæ ut Quadrata Diametrorum.

219.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXV. Probl. VII.

A B erigantur perpendicula *A D*, *B C*. Sitque *B C* motus ille totus, & per punctum *C* asymptotis *A D*, *A B* describatur hyperbola *C F*. Producatur *A B* ad punctum quodvis *E*. Erigatur perpendiculum *E F* hyperbolæ occurrens in *F*. Compleatur parallelogrammum *C B E G*, & agatur *A F* ipsi *B C* occurrens in *H*. Et si globus tempore quovis *B E*, motu suo primo *B C* uniformiter continuato, in medio non resistente describat spatium *C B E G* per aream parallelogrammi expositum, idem in medio resistente describet spatium *C B E F* per aream hyperbolæ expositum, & motus ejus in fine temporis illius exponetur per hyperbolæ ordinatam *E F*, amissâ motus ejus parte *F G*. (c) Et resistentia ejus in fine temporis ejusdem exponetur per longitudinem *B H*, amissâ resistentiæ parte *C H*. Patent hæc omnia *per corol.* 1. & 3. *prop.* V. *lib. II.*

Corol. 7. Hinc si globus tempore T per resistentiam R uniformiter continuatam amittat motum suum totum M: idem globus tempore *t* in medio resistente per resistentiam R in duplicatâ velocitatis ratione decrescentem, (d) amittet motus sui M partem $\frac{t M}{T+t}$, manente parte $\frac{T M}{T+t}$; & describet spatium quod sit ad spatium motu uniformi M eodem tempore *t* de-scrip-

(c) *Et resistentia ejus in fine &c.* Resistentia sub initio ubi velocitas est B C, exponatur per eandem lineam B C, & quia resistentiæ sunt ut velocitatum quadrata, atque B C ad F E, ut velocitas sub initio ad velocitatem in fine temporis B E ad FE^2 ut B C ad lineam quæ resistentiam exponit in fine temporis B E, ideòque linea hæc $= \frac{FE^2}{BC}$. Sed (*per theor.* 4. *de hyp.*) & ob similitudinem triangulorum A B H, A E F, est B C : F E = A E : A B = F E : H B, & hinc H B $= \frac{FE^2}{BC}$. Quare recta H B exponet resistentiam in fine temporis B E, & proindè recta C H partem amissam resistentiæ illius quæ sub initio exponebatur per lineam B C.

(d) * *Amittet motûs sui partem &c.* Pars motûs M in fine temporis *t* residua dicatur *m*, & quia (ex dem.) T : t = A B : B E, & hinc T × t ; T = A E : A B, & præterea M : *m* = C B : F E = A E : A B; erit T × t : T = M : *m*, unde habetur $m = \frac{MT}{T+t}$, & inde motûs *M* pars amissa est $M - \frac{MT}{T+t} = \frac{tM}{T+t}$.

scriptum, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2, 302585092994 est ad numerum $\frac{t}{T}$, (e) propterea quod area hyperbolica $BCFE$ est ad rectangulum $BCGE$ in hàc proportione.

Scholium.

In hâc propositione exposui resistentiam & retardationem projectilium sphæricorum in mediis non continuis, & ostendi quod hæc resistentia sit ad vim quâ totus globi motus vel tolli possit vel generari quo tempore globus duas tertias diametri suæ partes velocitate uniformiter continuata describat, ut densitas medii

(e) * *Propterea quod area hyperbolica.* Dicantur A B $= a$, B C $= b$, B E $= x$, A E $= a+x$; & quia (*theor. 4. de hyp.*) F E $= \frac{ab}{a+x}$, elementum areæ C F E B, erit $\frac{abdx}{a+x}$, & area ipsa C F E B $= abS.\frac{dx}{a+x}$, quæ fluens ità sumenda est ut evanescat ubi fit $x=0$, sed fluens S. $\frac{dx}{a+x}$ ità sumpta est logarithmus numeri $\frac{a+x}{a}$, desumptus ex logisticâ cujus subtangens est unitas, aut quod idem est, ex hyperbolâ cujus dignitas unitati æqualis est (382. *lib. 1. & 40. lib. 2.*); Si enim ponatur $x=0$, numerus $\frac{a+x}{a}$, evadit $=1$, & ideò $L.\frac{a+x}{a}=0$. Quarè area B C F E $= ab\,L.\frac{a+x}{a}$; rectangulum verò B C G E $= bx$. Est ergò area hyperbolica B C F E ad rectangulum B C G E, ut $ab\,L.\frac{a+x}{a}$ ad bx, hoc est, dividendo per ab, ut $L.\frac{a+x}{a}$ ad $\frac{x}{a}$. Verum (ex dem. & hyp.) $\frac{a+x}{a} = \frac{T+t}{T}$, & $\frac{x}{a}=\frac{t}{T}$; Quare area Hyperbolica B C F E, est ad rectangulum B C G E, ut $L.\frac{T+t}{T}$ ad $\frac{t}{T}$. Superest igitur inveniendus logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$; per logarithmicam cujus subtangens est unitas. Porrò ejusdem numeri logarithmi diversæ speciei sunt inter se in datâ ratione (38) & numerus 2, 302585092994 est logarithmus numeri denarii sumptus in logarithmicâ cujus subtangens est unitas, & ejusdem numeri denarii logarithmus in tabulis sumptus est 1, 0000000 $=1$; Quarè ut 1, ad 2, 302585092994, ità logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ in tabulis sumptus ad logarithmum ejusdem numeri sumptum in logarithmicâ cujus subtangens est unitas, vel in Hyperbolâ cujus dignitas est 1; habetur ergò logarithmus quæsitus, si logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ ex tabulis sumptus multiplicetur per numerum 2, 302585092994.

210.

medii ad densitatem globi, si modo globus & particulæ medii sint summè elastica & vi maximâ reflectendi polleant: quodque hæc vis sit duplo minor ubi globus & particulæ medii sunt infinitè dura & vi reflectendi prorsus destituta. In mediis autem continuis qualia sunt aqua, oleum calidum, & argentum vivum, in quibus globus non incidit immediatè in omnes fluidi particulas resistentiam generantes, sed premit tantum proximas particulas & hæ premunt alias & hæ alias, resistentia est adhuc duplò minor. Globus utique in hujusmodi mediis fluidissimis resistentiam patitur quæ est ad vim quâ totus ejus motus vel tolli possit vel generari quo tempore, motu illo uniformiter continuato, partes octo tertias diametri suæ describat, ut densitas medii ad densitatem globi. Id quod in sequentibus conabimur ostendere.

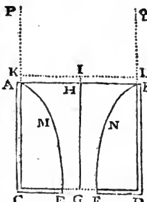
PROPOSITIO XXXVI. PROBLEMA VIII.

Aquæ de vase cylindrico per foramen in fundo factum effluentis definire motum.

Sit $ACDB$ vas cylindricum, AB ejus orificium superius; CD fundum horizonti parallelum, EF foramen circulare in medio fundi, G centrum foraminis, & GH axis cylindri horizonti perpendicularis. Et finge cylindrum glaciei $APQB$ ejusdem esse latitudinis cum cavitate vasis, & axem eumdem habere, & uniformi cum motu perpetuo descendere, & partes ejus quam primum attingunt superficiem AB liquescere, & in aquam conversas gravitate suâ defluere in vas; & cataractam vel columnam aquæ $ABNFEM$ cadendo formare, & per foramen EF transire, idemque adæquatè implere. Ea verò sit uniformis velocitas glaciei descendentis ut & aquæ contiguæ in circulo AB, quam aqua cadendo (f) & casu suo describendo altitudinem IH acqui-

(f) * *Et casu suo describendo altitudinem IH.* Hâc igitur Hypothesi idem præstatur ac si in loco A B nova superficies aquæ continuò crearetur, cum motu initiali qualem cadendo ex altitudine I H singula ejus superficiei particula acquirere potuisset, & deinde particulæ aquæ è loco A B vi propriæ gravitatis cadendo sese mutuò attrahe-

quirere poteſt; & jaceant IH & HG in directum, & per punctum I ducatur recta KL horizonti parallela & lateribus glaciei occurrens in K & L. Et velocitas aquæ effluentis per foramen EF (g) ea erit quam aqua cadendo ab I & caſu ſuo deſcribendo altitudinem IG acquirere poteſt. (h) Ideoque per theoremata *Galilæi* erit IG ad IH in duplicatâ ratione velocitatis aquæ per foramen effluentis ad velocitatem aquæ in circulo AB, hoc eſt,



in duplicatâ ratione circuli AB ad circulum EF; (i) nam hi circuli ſunt reciprocè ut velocitates aquarum quæ per ipſos eodem tempore & æquali quantitate, adæquatè tranſeunt. De velocitate aquæ horizontem verſus hîc agitur. Et motus horizonti parallelus, quo partes aquæ cadentis ad invicem accedunt, cùm non oriatur à gravitate, nec motum horizonti perpendicularem à gravitate oriundum mutet, hic non conſideratur. Supponimus quidem quod partes aquæ aliquantulum cohærent, & per cohæſionem ſuam inter cadendum accedant ad invicem per motus horizonti parallelos, ut unicam tantum efforment cataractam & non in plures cataractas dividantur; ſed motum horizon-

herem horizontaliter ad cataractam vel columnam A B N F E M formandam.

(g) * *Ea erit quam aqua* (per hyp).

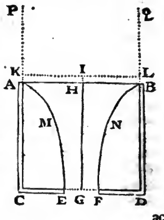
(h) * *Ideoque per theoremata Galilæi.* 28. lib. 1.

(i) 271. *Nam hi circuli* &c. Quoniam aqua per totam cataractam A B N F E M, eodem ſemper tenore fluere ſupponitur, neceſſe eſt ut eadem aquæ quantitas per ſingulas cataractæ ſectiones axi I G perpendiculares, ſeu per ſingulos circulos A B, M N, E F horizonti parallelos eodem tempore tranſeat. Nam ſi dato tempore major vel minor aquæ copia per circulum A B quàm per circulum M N tranſiret; 271 aqua inter illos circulos vel intumeſceret vel decreſceret, & cataractæ figuram mutaret (contrà Hyp.). Quantitas aquæ per circulum quemlibet M N, dato tempore fluentis æquatur cylindro aqueo, cujus baſis eſt circulus M N, & altitudo eſt æqualis longitudini quam ſuperficies aquæ M N, cum velocitate acquiſitâ uniformiter progrediendo eodem tempore dato deſcriberet; & longitudo illa eſt ut aquæ per circulum M N fluentis velocitas (5. *lib.* 1.) & ideo quantitas aquæ per

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT: VII. PROP. XXXVI. PROBL. VII.

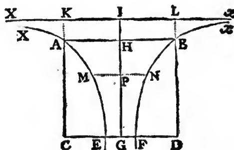
rizonti parallelum, à cohæsione illâ oriundum, hic non consideramus.

Cas. 1. Concipe jam cavitatem totam in vase, in circuitu aquæ cadentis *A B N F E M*, glacie plenam esse, ut aqua per glaciem tanquam per infundibulum transeat. Et si aqua glaciem tantùm non tangat, vel, quod perinde est, si tangat & per glaciem propter summam ejus polituram quam liberrimè & sine omni resistentiâ labatur; hæc defluet per foramen *E F* eâdem velocitate



ac

per circulum M N dato tempore fluentis ; est ut circulus M N & velocitas conjunctim. Quarè cùm data sit quantitas aquæ per singulos circulos dato tempore transeuntis ; circulus M N est reciprocè ut velocitas aquæ quæ per ipsum transit, Q. E. D.



172. His itâ constitutis ; facile est cataractæ figuram geometricè definire. Secet M N axem I G in P; & quia altitudo I P est in duplicatâ ratione velocitatis aquæ in P, hæc vero velocitas est inverse ut circulus M N, & denique circulus M N est in ratione duplicatâ radii M P, & ideo I P seu abscissa in ratione quadruplicatâ inversâ radii seu ordinatæ M P, sive I P ut $\frac{1}{MP^4}$, & ideo $MP^4 \times IP$, quantitas data. Est igitur curva E M A, Hyperbola quarti gradûs, asymptotos habens I G, I K, quibus convexitatem obvertit. Producantur arcus E M A, & asymptotus I K

ad

ac prius, (k) & pondus totum columnæ aquæ *ABNFEM* impendetur in defluxum ejus generandum uti prius, & fundum vasis sustinebit pondus glaciei columnam ambientis.

Liquescat jam glacies in vase; & effluxus aquæ, quoad velocitatem, idem manebit ac prius. (l) Non minor erit, quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere: non major, quia glacies in aquam resoluta non potest descendere nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem. Eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.

Sed foramen in fundo vasis, propter obliquos motus particularum aquæ effluentis, paulo majus esse debet quàm prius. Nam

ad partes X in infinitum, & figura EAXXIG circà asymptotum seu axem I G, rotata cataractam describet in infinitum ad partes X, x, productam; figura verò EMAHG, hanc cataractæ partem quæ intra vas ABDC, continetur, generabit.

273. Tota cataracta E A X x B F, æquatur cylindro cujus basis est circulus E F, & altitudo 2 I G. Sint enim altitudo I G $= x$, ordinata E G $= y$, a linea data, & (272) $x = \frac{a^5}{y^4}$, ideoque $y^4 x = a^5$ æquatio ad Hyperbolam E M A X. Et si semiperipheria circuli cujus radius est unitas, dicatur p, erit circuli E F area $= pyy$, & cylindrus E G $\times$ 2 I G $= 2pyyx = \frac{2pa^5}{yy}$. Cùm verò sit $x = \frac{a^5}{y^4}$, ac proindè $dx = -\frac{4a^5 dy}{y^5}$, cataractæ elementum $pyy\,dx = -\frac{4pa^5 dy}{y^3} = -4pa^5 y^{-3} dy$, & sumptis fluentibus, tota cataracta ad asymptotum usque X x producta, erit $= \frac{2pa^5}{yy} = 2$ E F $\times$ I G. Q. E. D.

(k) 274. *Et pondus totum &c.* Pondus quidem totum columnæ aquæ A B N F E M in defluxum ejus generandum impenditur; attamen totum aquæ motum non generat, cùm motûs illius pars pendeat à motu superficiei A B, quæ (per hyp.) eam habet velocitatem quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem I H acquirere potest. Sed totum aquæ defluxum mathematicè considerare possumus tanquam genitum pondere aquæ totius, quæ in cataractâ E A X x B F, usque ad asymptotum X x producta continetur, quæque æqualis est cylindro aqueo basi E F & altitudine 2 I G, descripto (273). 274.

(l) * *Non minor erit quia glacies in aquam resoluta conabitur descendere*, atque ita aquæ descensum accelerare; *non tamen major erit, quia glacies in aquam resoluta*, ob reactionem actioni æqualem & contrariam, *non potest descendere, nisi impediendo descensum aquæ alterius descensui suo æqualem.* Idem igitur manet in aquâ totâ ad descendendum & per foramen E F effluendum conatus. At *eadem vis eandem aquæ effluentis velocitatem generare debet.*

(m) Nam particulæ aquæ jam non transeunt omnes per foramen perpendiculariter; sed à lateribus vasis undique confluentes & in foramen convergentes, obliquis transeunt motibus; & cursum suum deorsum flectentes in venam aquæ exilientis conspirant, quæ exilior est paulo infra foramen quàm in ipso foramine, existente ejus diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel $5\frac{1}{2}$ ad $6\frac{1}{2}$ quam proximè, si modò diametros rectè dimensus sum. Parabam utique laminam planam pertenuem in medio perforatam, existente circularis foraminis diametro partium quinque octavarum digiti. Et ne vena aquæ exilientis, cadendo acceleraretur & acceleratione redderetur angustior, hunc laminam non fundo sed lateri vasis effixi sic, ut vena illa egrederetur secundùm lineam horizonti parallelam. Dein ubi vas aquâ plenum esset, aperui foramen ut aqua efflueret; & venæ diameter, ad distantiam quasi dimidii digiti à foramine quàm accuratissimè mensurata, prodiit partium viginti & unius quadragesimarum digiti. (n) Erat igitur diameter foraminis *hujus* cir-

(m) * *Nam particulæ aquæ &c.* Clariss. *Daniel Bernoullius* paragr. 3. Sect. 4[a]. *Hydrodynamicæ* observavit particulas ceræ hispanicæ aquis innatantes ità cum aquâ in vase moveri, ut quæ foraminis centro C imminent, per lineam verticalem H G, descendant, aliæ verò omnes utrinque positæ motu fere verticali descendant primùm per lineas m p, n q, fere ad fundum usque C D, tumque cursum suum versus foramen E F per lineas P E, q F sensim inflectant. Itaque vena aquæ exilientis E F f e duplici de causâ contrahitur usque in e f paulo infra foramen E F. Prima contractionis illius causa est acceleratio motûs, quæ omnibus gravibus cadentibus communis est, & quâ fit ut major sit velocitas aquæ in loco inferiori e f quàm in superiore E F; quia enim aquam esse in statu manente, eandemque proindè (271) illius quantitatem per sectiones E F & e f, eodem tempore effluere supponimus, sectio e f est ad sectionem E F in ratione velocitatis aquæ in loco E F, ad ejus velocitatem in loco e f (271) & ideo sectio e f, cæteris paribus, minor esse debet sectione E F. Secunda contractionis venæ causa, quam solam hic considerat NEWTONUS, est obliquitas motûs particularum aquæ per lineas P E, q F, ad foramen E F tendentium; hinc enim fit, ut seclusâ etiam omni acceleratione motûs à gravitate ortâ, particulæ aquæ convergant, venamque contrahant, atque ideo motum suum accelerent.

(n) * *Erat igitur diameter foraminis hujus circularis ad diametrum venæ ut* 25 *ad*

circularis ad diametrum venæ ut 25 ad 21 quàmproximè. Aqua igitur transeundo per foramen, convergit undique, & postquam effluxit ex vase, tenuior redditur convergendo, & per attenuationem acceleratur donec ad distantiam semissis digiti à foramine pervenerit, & ad distantiam illam tenuior (o) & celerior fit quàm in ipso foramine in ratione 25 × 25 ad 21 × 21 seu 17 ad 12 quamproximè, id est in subduplicatâ ratione binarii ad unitatem circiter. (p) Per experimenta verò constat quòd quantitas aquæ, quæ per foramen circulare in fundo vasis

ad 21 quamproximè. Hæc ratio in experimentis constans ferè manet, si aqua è vase satis amplo per exiguum foramen laminæ tenuissimæ insculptum effluat, licet in vase mutetur aquæ foramini incumbentis altitudo. Experimenta illa iterarunt celeberrimi Mathematici, Marchio *Polenus* lib. de Castellis & *Daniel Bernoullius* sect. 4ª. Hydrodynamicæ. Hæc sunt Illustr. Marchionis verba pag. 38. 39. « Proclive autem erit intelligere, confirmari ex allatis experimentis rationem inter diametros foraminum & aquæ contractæ diametros à viro summo *Isaaco* NEWTONO, ut antè diximus, constitutam. Non tamen inficias iverim perexiguam aliquam differentiam intercessisse inter contractiones aquæ effluentis ex minoribus foraminibus, & aquæ contractiones ex majoribus effluentis. Anteà descripti foraminis in laminâ ferreâ diameter ad diametrum aquæ contractæ fuit in eâ ratione quam habet numerus 52 ad 41; cùm *Newtoniana* sit ratio numeri 50 ad 42. sic omninò eâdem lege, non semper contrahi aquæ venas ostendunt variæ contractiones in aquæ à variis frustis conicis effluxu observatæ, quò etiam huc debebunt referri illæ quas animadverti differentiæ inter diametros ad perpendiculum sumptas, & diametros secundum lineam horizonti parallelam mensas. At quanta sit differentia inter aquæ contractiones non ausim definire, neque verò illa *Newtoniana* ratio inter diametrum foraminis & contractæ aquæ diametrum sumi debet ceu præcisa, cùm ipse vir summus in citato opere hæc habeat; existente ejus (nempè aquæ contractæ) diametro ad diametrum foraminis ut 5 ad 6, vel 5 & $\frac{1}{2}$ ad 6 & $\frac{1}{2}$, quamproximè, si modò diametros rectè dimensus sum. » *Bernoullius* verò Sect. 4. parag. 7°. hæc habet; « Interim assumptis laminâ tenui, vase amplissimo, foramine ad 4 vel 6 lineas in diametro assurgente, solet ratio inter foramen & Sectionem venæ contractæ non multum recedere ab illâ quam NEWTONUS statuit. » Verùm utriusque authoris experimenta demonstrant, rationem illam diametri venæ contractæ ad diametrum foraminis multum variari, si per oblongos variæque figuræ canales, non verò ex simplici foramine in tenuissimâ laminâ insculpto è vase effluat aqua. 274.

(o) * *Et celerior fit quàm in ipso foramine.* Nam velocitates sunt reciprocè ut circuli per quos aqua eodem tempore transit (271), circuli verò sunt in ratione duplicatâ diametrorum; & ideo velocitas aquæ per sectionem circularem venæ contractæ transeuntis est ad velocitatem aquæ per foramen effluentis ut 25 × 25 ad 21 × 21 hoc est, 625 ad 441; quod utrumque divisum per 37 dat rationem 17 ad 12, vel utrumque divisum per 441, dat rationem 1.41 &c. ad 1, est verò Radix binarii numeri 1.41 &c., est ergo velocitas aquæ per venam contractam ad velocitatem per foramen in ratione radicis binarii numeri ad unitatem

(p) *Per experimenta verò constat.* Datâ quantitate aquæ per datum foramen seu per datam venæ contractæ Sectionem dato tempore effluentis, sic illius veloci-

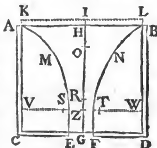
ſis factum, dato tempore effluit, ea ſit quæ cum velocitate prædictâ, non per foramen illud, ſed per foramen circulare, cujus diameter eſt ad diametrum foraminis illius ut 21 ad 25, eodem tempore effluere debet. Ideoque aqua illa effluens velocitatem habet deorſum in ipſo foramine quam grave cadendo & caſu ſuo (q) deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirere poteſt quamproximè. Sed poſtquam exivit ex vaſe, acceleratur convergendo donec ad diſtantiam à foramì-

tas inquiritur. Quoniam data aquæ quantitas æquatur cylindro vel priſmati cujus baſis eſt foramen datum aut venæ contractæ ſectio, & altitudo ſpatium quod aqua tempore dato cum illâ velocitate quam in foramine aut venæ Sectione habet, uniformiter progrediendo deſcriberet, dividitur quantitas aquæ data per foraminis aut Sectionis venæ aream, & quotiens erit ſpatium quod aqua dato tempore uniformiter progrediendo deſcriberet, atquè ità nota ſit aquæ velocitas cujus dimidium eſt altitudo ex quâ cadere debuit ut eam velocitatem acquireret. Sit jam a altitudo quam corpus grave tempore minuti unius ſecundi ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit, v velocitas hoc caſu acquiſita, & ideò $2a$ ſpatium quod velocitate uniformi v tempore minuti unius ſecundi deſcribi poteſt (30. *lib.* 1.) ſit b altitudo aquæ in vaſe ſtagnantis, e celeritas quam grave per altitudinem b ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit, & s ſpatium quod cum celeritate e uniformiter progrediendo tempore minuti unius ſecundi deſcriberet, erit $a:b=vv:ee$ (28. lib. 1) & $2a:s=v:e$ (5. lib. 1.) ideóque $a:b=4aa:ss$; undè habetur $ss=4ab$, & $s=\surd 4ab$. Si igitur aqua è vaſe per venæ contractæ Sectionem effluat cum velocitate e quam grave cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem b aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, ſpatium s quod ex quantitate aquæ tempore minuti unius ſecundi è vaſe effluentis, ut ſuprà dictum eſt, habetur, debet eſſe æquale $\surd 4ab$. Hinc ſi altitudo a, ſit pedum Pariſ. 14, erit $ss=56b$, quæ eſt ipſa regula quam D. *Pitot* in Monum. Acad. Pariſ. an. 1730. tradidit. At ſi altitudo a ponatur eſſe pedum Pariſ. $15\frac{1}{12}$ ſeu $\frac{181}{12}$ (471. lib. 1.) erit $ss=\frac{181}{3}b$. Verùm ut aquæ in vaſe ſtagnantis altitudo & velocitas per foramen effluentis quo tempore experimentum capitur, eadem ad ſenſum maneant, ut oportet, uſurpari poteſt vas ſatis amplum exiguo pertuſum foramine, vel ſi vas paulò anguſtius adhibeatur, tantum aquæ affundi supernè debet quantum per inferius lumen effluit, & cavendum eſt ne affuſa aqua cum aliquo impetu cadendi extimam aquæ in vaſe ſtagnantis ſuperficiem attingat. Quibus autem artibus id poſſit effici fusè exponunt locis ſuprà citatis Marchio *Polenus* & *Daniel Bernoullius* quos lector conſulere poteſt. Attamen his adhibitis cautelis, velocitas aquæ per venæ contractæ Sectionem effluentis paulò minor per experimenta quàm per theoriam invenitur, quod variis reſiſtentiis tribuendum eſſe videtur, & certè Illuſtr. Marchio *Polenus*, cùm in libro de Caſtellis pag. 64. opinatus fuiſſet velocitatem illam in experimentis valde eſſe minorem quàm in theoriâ, pluribus deinde experimentis ad calculos revocatis priorem ſententiam mutavit in Epiſtolâ ad *Marinonium*.

(q) *Deſcribendo dimidiam altitudinem.* Velocitas quam corpus quodlibet grave, ſine reſiſtentiâ cadendo & caſu ſuo deſcribendo dimidiam altitudinem aquæ in vaſe ſtagnantis acquirit, eſt ad velocitatem ejus per totam altitudinem aquæ cadendo acquiſitam ut 1 ad $\surd 2$ (28. lib. 1.)

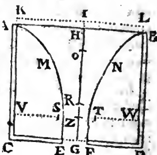
ramine diametro foraminis prope æqualem pervenerit, & velocitatem acquisiverit majorem in ratione subduplicatâ binarii ad unitatem circiter; quam utique grave cadendo, & casu suo describendo totam altitudinem aquæ in vase stagnantis, acquirere potest quàmproximè.

In sequentibus igitur diameter venæ designetur per foramen illud minus quod vocavimus *E F*. Et plano foraminis *E F* parallelum duci intelligatur planum aliud superius VW ad distantiam diametro foraminis æqualem circiter & foramine majore *ST* pertusum; per quod utique vena cadat, quæ adæquatè impleat foramen inferius *E F*, atque ideo cujus diameter sit ad diametrum foraminis inferioris ut 25 ad 21 circiter. Sic enim vena per foramen inferius perpendiculariter transibit; & quantitas aquæ effluentis, pro magnitudine foraminis hujus, ea erit quam solutio problematis postulat quamproximè. Spatium verò, quod planis duobus & venâ cadente clauditur, pro fundo vasis haberi potest. Sed ut solutio problematis simplicior sit & magis mathematica, præstat adhibere planum solum inferius pro fundo vasis, & fingere quod aqua quæ per glaciem ceu per infundibulum defluebat, & è vase per foramen *E F* in plano inferiore factum egrediebatur, motum suum perpetuo



5.) Sed, ex suprà ostensis, velocitas aquæ per vasis foramen transeuntis est ad velocitatem per venæ contractæ Sectionem fluentis, id est, ad velocitatem quam grave cadendo per totam altitudinem aquæ in vase stagnantis acquirit, in eâdem ratione 1, ad $\sqrt{2}$; Quarè velocitas quam grave per dimidiam altitudinem aquæ stagnantis cadendo acquirit, æqualis est velocitati aquæ per foramen effluentis, modò tamen aqua per simplex foramen in tenuissimâ laminâ factum, ut suprà expositum est, effluat è vase. 274

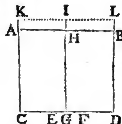
petuo servet, & (r) glacies quietem suam. In sequentibus igitur sit ST diameter foraminis circularis centro Z descripti per quod cataracta effluit ex vase ubi aqua tota in vase fluida est. Et sit EF diameter foraminis per quod cataracta cadendo adæquatè transit, sive aqua exeat ex vase per foramen illud superius ST, sive cadat per medium glaciei in vase tanquam per infundibulum. Et sit diameter foraminis superioris ST ad diametrum inferioris EF ut 25 ad 21 circiter, & distantia perpendicularis inter plana foraminum æqualis sit diametro foraminis minoris EF. Et velocitas aquæ è vase per foramen ST exeuntis ea erit in ipso foramine deorsum quam corpus cadendo à dimidio altitudinis IZ acquirere potest: velocitas autem cataractæ utriusque cadentis ea erit in foramine EF, quam corpus cadendo ab altitudine totâ IG (s) acquiret.

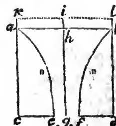


Cas.

(r) * *Et glacies quietem suam.* Sunto vasa duo æqualia ABDC, abdc, in quorum primo glacies omnis in aquam resoluta sit, & in altero glacies quietem suam conservet, ut aqua cataractam abnfem formando effluat per foramen ef Sectioni venæ contractæ è foramine EF exilientis æquale; & loco vasis ABDC, in problematis solutione substitui poterit vas alterum abdc, in quo aquæ per lumen ef effluentis eadem est velocitas quam aqua è vase ABDC exiliens habet in Sectione venæ contractæ, eademque proindè aquæ quantitas in defluxum impenditur, & propterea idem aquæ pondus fundo incumbit in utroque vase. Quoniam enim cataractæ abnfem figura & lex secundùm quam aqua cataractâ illâ movetur notæ sunt, problematis solutio & facilior & magis mathematica fiet, si loco vasis ABDC mente substituatur vas abdc.

(s) * *Acquiret.* Hæc ex suprà demonstratis patent.





Cas. 2. Si foramen *E F* non sit in medio fundi vasis, sed fundum alibi perforetur: aqua effluet eàdem cum velocitate ac priùs, si modò eadem sit foraminis magnitudo. Nam grave majori quidem tempore descendit ad eandem profunditatem (t) per lineam obliquam quàm per lineam perpendicularem, sed descendendo eandem velocitatem acquirit in utroque casu, (u) ut *Galilæus* demonstravit.

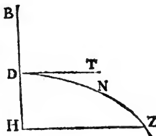
Cas. 3. Eadem est aquæ velocitas effluentis per foramen in latere vasis. Nam si foramen parvum sit, (x) ut intervallum inter superficies *A B* & *K L* quoad sensum evanescat, & vena aquæ horizontaliter exilientis figuram parabolicam efformet: ex (y) latere recto hujus parabolæ colligetur, quod velocitas aquæ effluentis ea sit quam corpus ab aquæ in vase stagnantis altitudine *H G* vel *I G* cadendo acquirere potuisset. Facto

(t) * *Per lineam obliquam.* In hoc secundo casu pars aquæ per lineas ad foramen obliquas descendit.

(u) * *Ut Galilæus demonstravit.* (81. & 85. lib. 1.).

(x) 275.* *Ut intervallum inter superficies A B & K L.* I H est ad I G in ratione quadruplicatâ diametri E F ad diametrum A B (272), aut quod idem est, in ratione duplicatâ areæ circuli E F ad aream circuli A B, ideòque si ratio E F ad A B parva sit, minor adhuc erit ratio I H ad I G, & H G, I G erunt ad sensum æquales.

(y) * *Ex latere recto hujus Parabolæ.* Aquæ gutta è loco D, secundùm directionem quamlibet D T exiliat cum eâ velocitate quam per altitudinem B D cadendo acquirere potest, & sublatâ medii resistentiâ, describat parabolam D N Z, cujus vertex D, tangens D T, & diameter D H seu verticalis B D producta (40. lib. 1.); capiatur abscissa D H æqualis altitudini B D, ducaturque ordinata H Z, quæ tangenti D T parallela erit; & quo tempore gutta aquæ vi gravitatis cadendo altitudinem B D vel D H describit uniformi illâ velocitate quam casu per B D acquisivit, describit longitudinem H Z ipsius B D vel D H duplam, (30. *lib.* 1.). Latus rectum



Parabolæ D N Z, pertinens ad diametrum D H est $\frac{HZ^2}{DH}$ (*theor.* 1. *de parab.*) ideòque cùm sit H Z = 2 D H = 2 B D, latus rectum est 4 B D. Igitur altitudo B D quam aqua cadendo describere debet ut velocitatem acquirat cum quâ è loco D exilit, est quarta pars lateris recti ad diametrum D H parabolæ D N Z pertinentis. 275;

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

ĉto utique experimento inveni quod, si altitudo aquæ stagnantis supra foramen esset viginti digitorum & altitudo foraminis supra planum horizonti parallelum esset quoque viginti digitorum, vena aquæ prosilientis incideret in planum illud ad distantiam digitorum 37 circiter à perpendiculo quod in planum illud à foramine demittebatur captam. Nam sine resistentiâ, vena (z) incidere debuisset in planum illud ad distantiam digitorum 40, existente venæ parabolicæ latere recto digitorum 80.

Cas. 4. Quin etiam aqua effluens, si sursum feratur, eâdem egreditur cum velocitate. Ascendit enim aquæ exilientis vena parva motu perpendiculari ad aquæ in vase stagnantis altitudinem GH vel GI, nisi quâtenus ascensus ejus ab aeris resistentiâ aliquantulum impediatur; (a) ac proinde eâ effluit cum velocitate quam ab altitudine illâ cadendo acquirere potuisset. Aquæ stagnantis particula unaquæque undique premitur æqualiter (*per prop.* XIX. *lib.* 2.) & pressioni cedendo æquali impetu in omnes partes fertur, sive descendat per foramen in fundo vasis, sive horizontaliter effluat per foramen in ejus latere, sive egrediatur in canalem & inde ascendat per foramen parvum in superiore canalis parte factum. Et velocitatem quâ aqua effluit. eam esse, quam in hâc propositione assignavimus, non solùm ratione colligitur, sed etiam per experimenta notissima jam descripta manifestum est.

Cas. 5. Eadem est aquæ effluentis velocitas, sive figura foraminis sit circularis, sive quadrata vel triangularis aut alia quæcunque circulari æqualis. Nam velocitas aquæ effluentis non pendet à figurâ foraminis, sed oritur ab ejus altitudine infra planum K L.

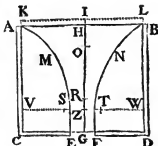
Cas. 6. Si vasis $ABDC$ pars inferior in aquam stagnantem im-

(z) * *Incidere debuisset in planum illud.* Sit enim (*in fig. notæ superioris*) altitudo B D = D H digit. 20, & quia B D est pars quarta lateris recti parabolæ D N Z, quam aqua sine resistentiâ describeret, latus illud rectum est digit. 80, & ordinata H Z æqualis 2 D H est digit. 40. differentia 3. digit. inter distantias 40. & 37. digit. resistentiis tribuenda est.

(a) * *Ac proinè eâ effluit cum velocitate.* (25. 26. lib. 1.)

immergatur & altitudo aquæ ſtagnantis ſupra fundum vaſis ſit *GR*: velocitas quâcum aqua quæ in vaſe eſt, effluet per foramen *EF* in aquam ſtagnantem, ea erit quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *IR* acquirere poteſt. Nam pondus aquæ omnis in vaſe quæ inferior eſt ſuperficie aquæ ſtagnantis, ſuſtinebitur in æquilibrio per pondus aquæ ſtagnantis, ideoque motum aquæ deſcendentis in vaſe minimè accelerabit. Patebit etiam & hic caſus per experimenta, (b) menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit.

(c) *Corol.* 1. Hinc ſi aquæ altitudo *CA* producatur ad *K*, ut ſit *AK* ad *CK* in duplicatâ ratione areæ foraminis in quâvis fundi parte facti, ad aream circuli *AB*: velocitas aquæ effluentis æqualis erit velocitati quam aqua cadendo & caſu ſuo deſcribendo altitudinem *KC* acquirere poteſt.



(d) *Corol.* 2. Et vis, quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt, æqualis eſt ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen *EF*, & altitudo 2 *GI* vel 2 *CK*. Nam aqua exiliens, quo tempore hanc columnam æquat, pondere ſuo ab altitudine *GI* cadendo velocitatem ſuam, quâ exilit, acquirere poteſt.

Co-

(b) * *Menſurando ſcilicet tempora quibus aqua effluit*, & quantitates aquæ iiſdem temporibus effluentis.

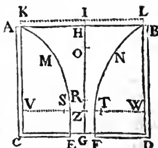
(c) * *Cor.* 1. Patet per not. 275. & caſ. 2um. ac 5um.

(d) * *Cor.* 2. De hujus corollarii veritate diù multumque diſputatum eſt inter Comitem *Riccatum*, Danielem *Bernoullium*, Petrum Antonium *Michelottum*, Jacobum *Jurinum*, alioſque eruditiſſimos viros. Cùm enim in primâ principiorum editione, NEWTONUS, nondum obſervatâ contractione venæ, ſtatuiſſet, vim quâ totus aquæ exilientis motus generari poteſt; æqualem eſſe ponderi cylindricæ columnæ aquæ, cujus baſis eſt foramen E F, & altitudo G I, & in ſecundâ editione, habitâ ratione venæ contractæ, vim illam duplam feciſſet, priorem vis illius menſuram adverſus Comitem *Riccatum* & *Jurinum* tuebatur cum *Michelotto* Daniel *Bernoullius*, quorum Diſſertationes videre eſt in Exercitationibus Mathematicis quæ an. 1724. *Venetiis* editæ ſunt. Verùm *Daniel Bernoullius* paragr. 9°. ſect. 12æ. *Hydrodynamicæ* poſteriori ſententiæ NEWTONI ità ſuffragatur: « iſta ſententia a me olim «& ab aliis fuit impugnata ab aliis rur- 275.

«,ſus

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XXXVI. Probl. VIII.

Corol. 3. Pondus aquæ totius in vase *ABDC* est ad ponderis partem, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut summa circulorum *AB* & *EF* ad duplum circulum *EF*. Sit enim *IO* media proportionalis inter *IH* & *IG*; & aqua per foramen *EF* egrediens, quo tempore gutta cadendo ab *I* describere posset altitudinem *IG*, æqualis erit cylindro cujus basis est circulus *EF* & altitudo est 2 *IG*, id est, cylindro cujus basis est circulus *AB* & altitudo est 2 *IO*, (c) nam circulus *EF* est ad circulum *AB* in subduplicatâ ratione altitudinis *IH* ad alti-



"sus confirmata. Nunc autem postquam "hanc aquarum motarum theoriam meditatus sum, lis ità dirimenda mihi videtur ut cum aquæ ad motum uniformem "pervenerint, quæ quidem Hypothesis est "NEWTONI, tunc rectè altitudine 2 G I, vis "illa definiatur, sed ab initio fluxûs, ubi "velocitas adhuc nulla est, vis simplici altitudini G I respondeat; moxque crescente velocitate, simul vis aquam ad effluxum animans crescat, & tandem ad "eam magnitudinem exsurgat quam NEWTONUS assignavit..... Rectè etiam Ill. "*Riccatus*, cum quo mihi de hoc argumento res erat, interrogatus, undè vis illa "duplæ aquarum altitudini conveniens oriri possit, cum obturato orificio, gutta "eidem imminens vi simplicis altitudinis "urgeri manifestè appareat, respondit distinguendum esse statum quietis à statu motûs. „ Jam verò hujus cor. 2. demonstrationem dedimus (274.); aliam, quam NEWTONUS indicat, exposuerunt Comes *Riccatus* in citatis Exercitationibus, & *Eustachius Manfredius* in adnotationibus ad cap. 1. tractatûs *Guilelmini* de natura fluminum (quod præclarum opus post fata summi viri, Clariss. Fratres *Gabriel* & *Heraclitus Manfredi*. an. 1739. Bononiæ edi curarunt.) Demonstratio sic potest exponi. Quo tempore cylindrus aquæ, cujus basis æqualis est foramini E F, & altitudo G I vi ponderis sui cadendo describeret altitudinem I G, & velocitatem aquæ exilientis acquireret; eodem tempore è *foramine* E F efflueret aquæ quantitas æqualis alteri cylindro aqueo, cujus basis est foramen E F, & longitudo 2 G I (30. *lib.* 1.), id est, cylindro prioris duplo; & ideò ob velocitatem quam cylindrus per altitudinem I G, cadendo acquirit, æqualem velocitati aquæ exilientis, quantitas motûs in illo cylindro vi ponderis ejusdem cylindri genita, est ad quantitatem motûs eodem tempore in aquâ exiliente productam ut 1 ad 2. Sed vires uniformes quibus cylindri cadentis & aquæ exilientis motus generantur, sunt ut motûs quantitates eodem tempore à viribus illis genitæ (15. *lib.* 1). Quare pondus cylindri aquæ, cujus basis est foramen E F, & altitudo G I, est ad vim quâ totus aquæ exilientis motus generari potest ut 1 ad 2, & proinde hæc vis æqualis est ponderi cylindricæ columnæ aquæ cujus basis & foramen E F & altitudo 2 G I. Q. E. D.

(c) * *Nam circulus E F est ad circulum A B, in subduplicatâ ratione altitudinis I H, ad altitudinem I G* (per cor. 1.) *id est, in simplici ratione mediæ proportionalis I O, ad altitudinem I G*, ideoque factum ex circulo A B in altitudinem 2 I O æquale est facto

titudinem IG, hoc est, in simplici ratione mediæ proportionalis IO ad altitudinem IG: & quo tempore gutta cadendo ab I describere potest altitudinem IH, aqua egrediens (f) æqualis erit cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo est $2\,IH$: & quo tempore gutta cadendo ab I per H ad G describit altitudinum differentiam HG, aqua egrediens, (g) id est, aqua tota in solido $ABNFEM$ æqualis erit differentiæ cylindrorum, id est, cylindro cujus basis est AB & altitudo $2\,HO$. Et propterea aqua tota in vase $ABDC$ est ad aquam totam cadentem in solido $ABNFEM$ ut (h) HG ad $2\,HO$, id est, ut $HO+OG$ ad HO, seu $IH+IO$ ad $2\,IH$. Sed pondus aquæ totius in solido $ABNFEM$ in aquæ defluxum (i) impenditur: ac proinde pondus aquæ totius in vase est ad ponderis partem quæ in defluxum aquæ impenditur, ut $IH+IO$ ad $2\,IH$, (k) atque ideo ut summa circulorum EF & AB ad duplum circulum EF.

(l) *Corol.* 4. Et hinc pondus aquæ totius in vase $ABDC$ est

facto ex circulo E F in altitudinem 2 I G, aut, quod idem est, cylindrus cujus basis est circulus E F & altitudo 2 I G, æquatur cylindro cujus basis est circulus A B & altitudo 2 I O.

(f) * *Æqualis erit cylindro cujus basis est circulus AB & altitudo* 2 I H. Eadem enim aquæ quantitas eodem tempore transit per circulos A B, & E F (271) & quantitas aquæ per circulum A B, transeuntis eo tempore quo gutta cadendo describere potest altitudinem I H, æqualis erit cylindro aqueo cujus basis est circulus A B & altitudo 2 I H. (30. lib. 1.).

(g) * *Id est aqua tota.* Nam ex iis quæ ante cas. 1. dicta sunt, manifestum est aquam totam prædicto solido contentam, per foramen E F eodem tempore effluere, quo aquæ gutta vi gravitatis suæ è loco I per H ad G cadendo describit altitudinem H G.

(h) * *Ut H G ad* 2 *H O &c.* Volumen aquæ in vase A B D C contentæ æquatur capacitati vasis seu cylindro cujus basis est circulus A B, & altitudo H G; & propterea aqua tota in vase A B D C, est ad aquam totam cadentem in solido ABNFEM, ut H G ad 2 H O (ex dem.), id est, ut H O + O G ad 2 H O, & quia (per hyp.) I H : I O = I O : I G = I O — I H : I G — I O = H O : O G, erit H O + O G : 2 H O = I H + I O : 2 I H.

(i) *Impenditur*, ut probatum est initio cas. 1.

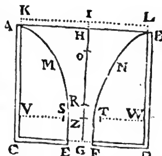
(k) * *Atquè ideò ut summa circulorum.* Quoniam enim (*per hyp.*) est I H ad I O ut I O ad I G, erit etiam I H + I O ad 2 I H ut I G + I O ad 2 I O, sed (ex modò dem.) circulus A B est ad circulum E F ut I G ad I O, ideóque summa circulorum A B & E F ad duplum circulum E F ut I G + I O ad 2 I O seu ut I H + I O ad 2 I H. Quarè patet propositum.

275. (l) * *Cor.* 4. Pondus aquæ totius in vase A B D C sit *P* ponderis illius pars quæ in defluxum impenditur sit *p* & hinc *P—p*, pars ponderis totius quæ fundo vasis seu plano æquali differentiæ circulorum C D & E F sustinetur & in defluxum non impenditur. Et (*per cor.* 3.) erit $P : p =$ A B + E F : 2 E F, ac proindè $P : P - p =$ A B + E F : A B — E F.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVI. PROBL. VIII.

est ad ponderis partem alteram quam fundum vasis sustinet, ut summa circulorum *A B* & *E F* ad differentiam eorundem circulorum.

(m) *Corol.* 5. Et ponderis pars, quam fundum vasis sustinet, est ad ponderis partem alteram, quæ in defluxum aquæ impenditur, ut differentia circulorum *A B* & *E F* ad duplum circulum minorem *E F*, sive ut area fundi ad duplum foramen.



(n) *Corol.* 6. Ponderis autem pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad summa circulorum *A B* & *E F*, sive ut circulus *A B* ad excessum dupli circuli *A B* supra fundum. Nam ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius in vase, ut differentia circulorum *A B* & *E F* ad summam eorundem circulorum, per cor. 4.: & *pondus* aquæ totius in vase est ad pondus aquæ totius quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad differentiam circulorum *A B* & *E F*. Itaque ex æquo perturbatè, ponderis pars, quâ solâ fundum urgetur, est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit, ut circulus *A B* ad summam circulorum *A B* & *E F* (o) vel excessum dupli circuli *A B* supra fundum.

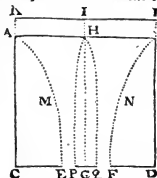
Corol. 7. Si in medio foraminis *E F* locetur circellus *P Q* cen-

(m) * *Cor.* 5. Cùm sit $P : p = AB + EF : 2 EF$, erit quoque $P - p : p = AB - EF : 2 EF$. Est autem area fundi æqualis differentiæ circulorum A B & E F.

(n) * *Cor.* 6. *Ponderis autem pars quâ solâ fundum urgetur*, sive pondus aquæ quæ in spatio solido C E M A D F N B continetur, *est ad pondus aquæ totius, quæ fundo perpendiculariter incumbit* & quæ æquatur solido aqueo cujus basis est differentia circulorum A B & E F, & altitudo G H, *ut circulus &c.*

(o) * *Vel excessum dupli circuli A B suprà fundum.* Cùm fundum æquale sit differentiæ circulorum A B & E F, excessus dupli circuli A B, suprà fundum est $2 AB - AB + EF$, seu $AB + EF$.

centro *G* descriptus & horizonti parallelus: pondus aquæ quam circellus ille sustinet, majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *G H*. Sit enim *A B N F E M* cataracta vel columna aquæ cadentis axem habens *G H* ut supra, & congelari intelligatur aqua omnis in vase, (p) tam in circuitu cataractæ quàm supra circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum non requiritur. Et sit *P H Q* columna aquæ supra circellum congelata, verticem habens *H* & altitudinem *G H*. Et finge cataractam hancce pondere suo toto cadere & non incumbere in *P H Q*, nec eandem premere, sed liberè & sine frictione prætérlabi, nisi forte in ipso glaciei vertice quo cataracta ipso cadendi initio incipiat esse cava. Et quemadmodum aqua in circuitu cataractæ congelata *A M E C*, *B N F D*



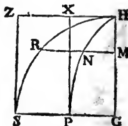
(p) * *Tam in circuitu cataractæ.* Quemadmodum enim suprà antè cas. 1um., aqua omnis cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ descensum illiusque effluxum per foramen E F inutilis erat, in circuitu cataractæ congelata supponebatur, idque rectè factum experimentis posteà ostensum est, ità hic loci congelata supponi potest aqua omnis in vase tam in circuitu cataractæ quàm suprà circellum, cujus fluiditas ad promptissimum & celerrimum aquæ effluxum per spatium annulare E P, Q F, non requiritur; Et quemadmodum glacies in circuitu cataractæ constituta, C E M A, D F N B pertingebat ad superficiem A B seu terminum glaciei continuò liquescentis K A B L, ità aqua suprà circellum congelata producitur ad punctum H, in eâdem superficie A B positum; & uti glacies *in circuitu cataractæ convexa est versùs cataractam cadentem* (272), *sic etiam columna aquæ suprà circellum congelatæ PHQ convexa erit versùs cataractam cadentem AHPEM, BHQFN*; 275.
* Considerari enim potest axis H G ut paries vasis cujus sectio sit H G C A, & foramen in fundo factum sit E P, qualiscumque autem sit Lex quâ effluit aqua ex vase, eodem modo quo factum est à NEWTONO in hujus demonstrationis casu primo, concipi potest cataracta trans glaciem effluens, adhibitis cautionibus illic notatis, ut hæc Hypothesis Mathematica congruat cum verâ effluxus aquæ Lege, quâtenus ad copiam aquæ effluentis dato tempore, quo posito evidens est lineam H P convexam sumi debere. Quâpropter si ex punctis P & Q ad punctum H ducantur lineæ rectæ, quæ cum diametro P Q triangulum constituant, conus ex revolutione hujus trianguli circà axem H G genitus, totus continebitur in solido quod per rotationem figuræ convexæ P H Q circà eundem axem H G generatur. Hoc igitur solidum, seu columna P H Q suprà circellum congelata, magnitudine superat conum illum,

BNFD convexa est in superficie internâ *AME*, *BNF* versus cataractam cadentem, sic etiam hæc columna *PHQ* convexa erit versus cataractam, & propterea major cono cujus basis est circellus ille *PQ* & altitudo *GH*, id est, major tertiâ parte cylindri eâdem base & altitudine descripti. Sustinet autem circellus ille pondus hujus columnæ, id est, pondus quod pondere coni seu tertiæ partis cylindri illius majus est.

Corol. 8. Pondus aquæ quam circellus valde parvus *PQ* sustinet, minus esse videtur pondere duarum tertiarum partium cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est *HG*. Nam stantibus jam positis, describi intelligatur dimidium sphæroidis cujus basis est circellus ille & semiaxis sive altitudo est *HG*. (q) Et hæc figura æqualis erit duabus tertiis partibus cylindri illius & comprehendet columnam aquæ congelatæ *PHQ* cujus pondus circellus ille sustinet. Nam ut motus aquæ sit maximè directus, columnæ illius superficies externa concurret cum basi *PQ* (r) in angulo nonnihil acuto, propterea quod aqua

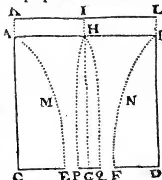
illum cujus basis est circellus P Q & altitudo H G. Quarè (*per prop. X. lib.* 12. *Elem.*) columna congelata P H Q, major est tertiâ parte cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q & altitudo G H. Sed sicut fundum E C, F D sustinet pondus aquæ in spatio solido C E M A, D F N B contentæ, ità circellus P Q sustinet pondus columnæ aquæ P H Q, id est, pondus quod majus est pondere tertiæ partis cylindri aquæ cujus basis est circellus P Q & altitudo G H.

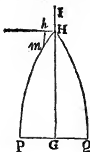
(q) * *Et hæc figura æqualis erit &c.* Centro G, & semiaxibus conjugatis G H & G P, describatur ellipseos quadrans H N P, & centro eodem G ac radio G H circuli quadrans H R S, compleanturque rectangula H G P X & H G S Z. Ducatur in circulo ordinata quævis R M, ellipsi occurrens in N, erit R M ad N M, in datâ ratione S G ad P G (247. *lib.* 1.) & propterea si figuræ illæ circà axem H G revolvantur, circulus quem radius M R in hâc revolutione describet, erit ad circulum radio M N descriptum in datâ ratione SG^2 ad PG^2, seu in datâ ratione cylindri quem rectangulum H G S Z rotando describit ad cylindrum ex rotatione rectanguli H G P X genitum; undè (*per cor. Lem. IV. lib.* 1.) hæmisphærium ex revolutione quadrantis circuli H R S G genitum, est ad hemisphæroidem ex rotatione quadrantis ellipseos H N P G in eâdem ratione. Cum igitur hemisphærium sit ad cylindrum circumscriptum ut 2 ad 3 (170. *lib.* 2.) erit etiam hemisphærois ad cylindrum circumscriptum qui per rotationem rectanguli H G P X generatur, in eâdem ratione 2 ad 3. Q. E. D.



(r) * *In angulo nonnihil acuto.* Nam quemadmodum angulus quem cataractæ ABNFEM

aqua cadendo perpetuò acceleratur & propter accelerationem fit tenuior; & cùm angulus ille sit recto minor, hæc columna ad inferiores ejus partes (ſ) jacebit intra dimidium sphæroidis. (t) Eadem verò sursum acuta erit seu cuspidata, ne horizontalis motus aquæ ad verticem sphæroidis sit infinitè velocior quàm ejus motus horizontem versus. (u) Et quò minor est circellus PQ, eò acutior erit vertex columnæ; & circello in



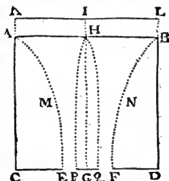


ABNFEM superficies externa AME, BNF cum basi CE, DF constituit, est semper acutus, quia aqua cadendo semper acceleratur (272.) Sic etiam, ob eandem rationem, columnæ PHQ superficies externa concurret cum basi PQ in angulo acuto HPQ, HQP. Quia verò circulo PQ evanescente, seu coincidente HP cum axe HG, angulus ille HPG rectus evadit; si circulus est valdè parvus; angulus HPG erit fere rectus seu nonnihil acutus.

(ſ) *Jacebit intrà dimidium sphæroidis.* Quia (ex naturâ ellipseos) in quâ tangentes per axium vertices ductæ angulos rectos cum axibus constituunt, sphæroidis superficies cum circello PQ, concurrit in angulo recto.

(t) * *Eadem verò sursum acuta erit.* Cùm enim partes aquæ duplici motu cieantur in H, alio verticali qui lapsu per altitudinem IH acquiritur, alio horizontali quo partes aquæ ad cataractam formandam ad se mutuò accedunt, uti suprà antè (cas. 1**. dictum est, atquè ideò guttula aquæ in H, lineam curvam HP motu composito describat, necessum est ut angulus PHG sit acutus, & proindè columna PHQ cuspidata in H. Describat enim guttula aquæ lineam quam minimam Hh, motu horizontali, & eodem temporis momento lineam hm, motu verticali, atquè arcum Hm motu composito; & velocitas horizontalis erit ad velocitatem verticalem ut Hh ad hm, id est, ut sinus hmH seu mHG ad sinum anguli hHm. Sed evanescente angulo hHm, seu angulo mHG recto existente, sinus anguli mHG, infinitè major est sinu anguli hHm. Quare si angulus mHG rectus sit, horizontalis motus aquæ erit infinitè major quàm motus ejus verticalis. Quod absurdum est; angulus igitur mHG acutus est. 276.

(u) * *Et quò minor est circellus PQ.* Nam si circellus PQ ità augeatur, ut adæquet foramen EF illudque occludat, columna PHQ evadet cylindrica, & rectâ mh coincidente cum Hh angulus mHG rectus erit; & contrà circello in infinitum diminuto, coincidet HmP, cum axe HG, angulusque mHG evanescet. Columna igitur tam ad superiores partes versùs H, quàm ad inferiores partes versùs P & Q, jacebit intrà dimidium sphæroidis.



in infinitum diminuto, angulus PHQ in infinitum diminuetur & propterea columna jacebit intra dimidium sphæroidis. Est igitur columna illa minor dimidio sphæroidis, seu duabus tertiis partibus cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo GH. Sustinet autem circellus vim aquæ ponderi hujus columnæ æqualem, cùm pondus aquæ ambientis in defluxum ejus impendatur.

Corol. 9. Pondus aquæ quam circellus valde parvus PQ sustinet, æquale est ponderi cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$ quamproximè. (x) Nam pondus hocce est medium arithmeticum inter pondera coni & hemisphæroidis prædictæ. At si circellus ille non sit valde parvus, sed augeatur donec æquet foramen EF; hic sustinebit pondus aquæ totius sibi perpendiculariter imminentis, id est, pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est GH.

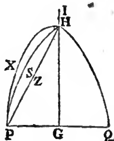
Corol. 10. Et (quantum sentio) pondus quod circellus sustinet, est semper ad pondus cylindri aquæ, cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} GH$, (y) ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$, sive ut circulus EF ad excessum circuli hujus supra semissem circelli PQ quamproximè.

(x) * *Nam pondus hocce est medium arithmeticum.* Cùm enim columna illa aquæ, quam circellus valde parvus sustinet, major sit tertiâ parte cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo HG (*cor.* 7.), & minor duabus tertiis partibus ejusdem cylindri (*cor.* 8.), erit ferè æqualis medio arithmetico inter cylindros $\frac{1}{3} PQ \times HG$; & $\frac{2}{3} PQ \times HG$. Est autem medium illud arithmeticum æquale dimidiæ summæ illorum cylindrorum, id est, cylindro $\frac{1}{2} PQ \times HG$, cujus basis est circellus PQ, & altitudo $\frac{1}{2}$ HG.

(y) * *Ut* EFq *ad* $EFq - \frac{1}{2} PQq$. Hæc enim suppositio superioribus determinationibus satisfacit. Nam sit p. pondus aquæ quam circellus sustinet; P. pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo GH; & si (juxtà corol. 10.) ponatur $p : \frac{1}{2} P = EF^2 : EF^2 -$

$\frac{1}{2}$ B.

$\frac{1}{2}PQ^2$, erit $p = \frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2}$. Sed quantitas $\frac{\frac{1}{2}P \times EF^2}{EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2} = \frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$ semper major est quantitate $\frac{1}{3}P$, quod cor. 7. satisfacit. Et contrà quantitas illa $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2}$, minor est quàm $\frac{2}{3}P$, ubi circellus est, satis parvus seu quamdiu $\overline{2PQ}^2 < EF^2$ (cùm enim sit $\overline{PQ}^2 = \frac{EF^2}{2}$, tunc illa quantitas p est $\frac{2P \times \overline{EF}^2}{3EF^2} = \frac{2}{3}P$, (quæ est determinatio cor. 8.). Tandem ubi circellus infinitè minor est quàm foramen EF, fit $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = \frac{1}{2}P$, & ubi circellus adæquat foramen EF, est $\frac{P \times EF^2}{2EF^2 - PQ^2} = P$, quæ duo cum cor. 9. determinationibus congruunt.



277. Si circellus P Q sit valdè parvus; & vertice P axe P G describatur per punctum H, parabolæ arcus P S H, & figura PSHG circà HG convolvatur, solidum inde genitum columnam aquæ quam circellus sustinet exhibebit quam proximè. Nam angulus S P G quem parabola cum axe P G, continet, rectus est, & ideò quam proximè æqualis angulo quem prædictæ columnæ superficies cum circello valdè parvo P Q efficit (*cor.* 8.); & evanescente P Q, angulus S H G arcu parabolæ S H & rectâ H G comprehensus fit infinitè parvus, ut oportet (*per idem cor.* 8.). Præterea si jungatur recta P Z H, & centro G, ac semiaxibus conjugatis G H, & G P describatur ellipseos quadrans P X H; & figuræ P Z H G, P S H G, P X H G circà axem H G convolvantur, solidum quod per revolutionem figuræ parabolicæ P S H G generatur, majus erit cono ex rotatione trianguli P Z H G genito, & minus hemisphæroide quam figura P X H G rotata describit, quod cor. 7°. & 8°. satisfacit. Tandem, calculo inito, facile patet solidum quod per convolutionem figuræ PSHG, gignitur, esse ad cylindrum cujus basis est circellus P Q, & altitudo G H, ut 8 ad 15, quæ ratio non multùm aberrat à ratione 1 ad 2 quam NEWTONUS in cor. 9. invenit. 277.

LEMMA IV.

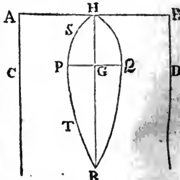
Cylindri, qui secundum longitudinem suam uniformiter progreditur; resistentia ex auctâ vel diminutâ ejus longitudine non mutatur; ideoque eadem est cum resistentia circuli eâdem diametro descripti & eâdem velocitate secundùm lineam rectam plano ipsius perpendicularem progredientis.

(z) Nam latera cylindri motui ejus minimè opponuntur: & cylindrus, longitudine ejus in infinitum diminutâ, in circulum vertitur.

PRO-

278. Si circulus P Q valdè parvus maneat respectu foraminis E F, foramen verò E F quantumvis augeatur finitum sit, & vas A B D C infinitum evadat, æquales erunt altitudines I G & H G, & velocitas aquæ in loco P Q, ea erit quàm aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem H G, acquirere potest (*per cor. 1. Prop. hujus 36.*). Iisdem positis, si vas A B D C infrà circulum P Q continuetur, & aqua postquam pervenit ad locum P Q, solâ vi insitâ pergat uniformiter moveri cum illâ velocitate quam habet in loco P Q, sitque P Q R columna aquæ congelatæ, cujus fluiditas ad promptissimum alterius aquæ motum non requiritur, ut suprà de columnâ P H Q dictum est; erit G R = 2 G H & P T R ferè arcus parabolæ cujus vertex P axis P G, & ordinata G R. Nam * fingatur considerari lapsum ejus aquæ quæ per conocidem HPQ moveretur seorsim à lapsu reliquæ aquæ Vasis, liquet quod eo tempore quo aquæ gutta motu verticali uniformiter accelerato cadit ex H in G effluet bis ea aquæ copia quæ in conoeide H P Q continetur; ea ergo aquæ copia erit æqualis cylindro cujus altitudo erit H G, & Basis circulus P Q, particula verò G celeritate ex lapsu per H acquisita describet 2 H G sive G R, tota ergo aqua quæ per Conoidem H P Q movebitur occupabit figuram cujus Basis est circulus P Q, cujus altitudo est 2 H G, & soliditas dimidium cylindri cujus P Q foret Basis & altitudo 2 H G, sed per præcedentem Paraboloeides est ferè dimidium cylindri circumscripti: ergo aqua quæ per Conoidem effluit eum Paraboloeidem occuparet: est ergo columna P Q R columna aquæ congelatæ quæ ad promptissimum aquæ reliquæ circumpositæ motum non requiritur. Hæc ad demonstrationem Scholii proximi hic adnectenda visa sunt; utrum satis rectè NEWTONIANÆ demonstrationis indolem simus assecuti, videat B. Lector,

Si quid novisti rectiùs. istis
Candidus imperti; si non, his utere mecum.



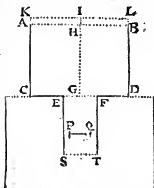
(z) * *Nam latera cylindri &c.* Hic enim latera cylindri esse politissima, & medii tenacitatem & frictionem esse nullam supponitur.

279. Lemma. *Vires uniformes sunt directè ut quantitates motus quas generant, & inversè ut tempora quibus illas generant,* (13. & 15. lib. 1.); & quia motûs quantitates sunt ut massæ & velocitates conjunctim, sive ut volumina & densitates & velocitates, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositá ex rationibus directis voluminum, densitatum & velocitatum & ratione inversá temporum quibus velocitates illas generant;* cùmque tempora illa sint

ut

PROPOSITIO XXXVII. THEOREMA XXIX.

Cylindri, qui in fluido compresso infinito & non elastico secundum longitudinem suam uniformiter progreditur, resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, est ad vim quâ totus ejus motus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri quamproximè.



Nam si vas $ABDC$ fundo suo CD superficiem aquæ stagnantis tangat, & aqua ex hoc vase per canalem cylindricum $EFTS$ horizonti perpendicularem in aquam stagnantem effluat, locetur autem circellus PQ horizonti parallelus ubivis in medio canalis, & producatur CA ad K, ut sit AK ad CK in duplicatâ ratione quam habet excessus orificii canalis EF supra circellum PQ ad circellum AB: manifestum est (*per cas. 5. cas. 6. & cor. 1. prop.* XXXVI.) quod velocitas aquæ transeuntis per spatium annulare inter circellum & latera vasis, ea erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem KC vel IG acquirere potest.

Et

ut spatia descripta directè & velocitates inversè (31. lib. 1.); *vires uniformes sunt quoque in ratione compositâ ex rationibus directis voluminum, densitatum & quadratorum velocitatis & ratione inversâ spatiorum descriptorum*, & quia velocitates sunt ut spatia descripta directè & tempora inversè, *vires uniformes sunt etiam in ratione compositâ ex ratione voluminum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.*

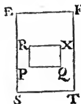
280. *Cor.* Quoniam cylindrorum volumina sunt ut eorum altitudines & diametrorum quadrata conjunctim; *vires uniformes quibus urgentur cylindri, sunt in ratione quæ componitur ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & velocitatum à viribus illis genitarum, & ratione inversâ temporum quibus velocitates illas generant*; sunt etiam in ratione quæ componitur ex *rationibus directis altitudinum, quadratorum diametrorum, densitatum & quadratorum velocitatum, & ratione inversâ spatiorum descriptorum*; Sunt quoque vires illæ in ratione compositâ *ex rationibus directis altitudinum cylindrorum, quadratorum diametrorum, densitatum & spatiorum descriptorum, & ratione inversâ duplicatâ temporum, quibus spatia illa describuntur.* Ubi prædictarum quantitatum, ex quibus virium ratio composita est, aliquæ datæ sunt, iis deletis habetur virium ratio. 280.

Et (*per corol.* x. *prop.* XXXVI.) ſi vaſis latitudo ſit infinita; (a) ut lineola HI evaneſcat & altitudines IG, HG æquentur: vis aquæ defluentis in circellum erit ad pondus cylindri cujus baſis eſt circellus ille & altitudo eſt $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quam proximè. Nam vis aquæ, (b) uniformi motu defluentis per totum canalem, eadem erit in circellum PQ in quâcunque canalis parte locatum.

Claudantur jam canalis orificia EF, ST, & aſcendat circellus in fluido undique compreſſo, & aſcenſu ſuo cogat aquam ſuperiorem deſcendere per ſpatium annulare inter circellum & latera canalis: & velocitas circelli aſcendentis erit ad velocitatem aquæ deſcendentis (c) ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ, & velocitas circelli aſcendentis ad ſummam velocitatum, (d) hoc eſt, ad velocitatem relativam aquæ deſcendentis quâ præterfluit circellum aſcendentem, ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum EF, ſive ut $EFq - PQq$ ad EFq.

(a) * *Ut lineola HI evaneſcat.* Per cor. 1. prop. 37. aut (per not. 275.).

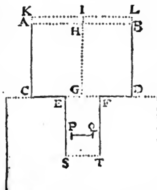
(b) * *Uniformi motu defluentis.* (Per caſ. 6. prop. 36.).



(c) * *Ut differentia circulorum.* Velocitates uniformes ſunt ut ſpatia eodem tempore deſcripta; ſed inter eadum circulus PQ ſpatium ſolidum, ſeu cylindrum PQXR deſcribit, deſcendit aquæ quantitas huic cylindro æqualis, & propterea altitudo verticalis per quam aqua deſcendit, æquatur longitudini quæ habetur dividendo valorem cylindri PQXR per valorem ſectionis annularis inter circulum PQ & vaſis latera ES, FT comprehenſam, ideóque ſi $\overline{EF}^2$ & $\overline{PQ}^2$, circulos, & RP, lineam rectam ſignificent, altitudo illa per quam aqua deſcendit eſt $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$. Quarè velocitas circuli aſcendentis eſt ad velocitatem aquæ deſcendentis ut altitudo RP, ad altitudinem $\frac{\overline{PQ}^2 \times RP}{\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2}$, id eſt, ut $\overline{EF}^2 - \overline{PQ}^2$ ad $\overline{PQ}^2$, ſivè ut differentia circulorum EF & PQ ad circulum PQ.

(d) * *Hoc eſt ad velocitatem relativam.* Cùm circulus aſcendat & aqua deſcendat, velocitas relativa æqualis eſt ſummæ velocitatum oppoſitarum circuli & aquæ. Velocitas abſoluta circuli aſcendentis dicatur V, velocitas abſoluta aquæ deſcendentis v, & quia circuli ſunt ut diametrorum quadrata, ſi EF, & PQ, pro circulorum diametris ſumantur; erit (*ex dem.*) $V : v = EF^2 - PQ^2 : \overline{PQ}^2$, & ideo $V : V + v = EF^2 - PQ^2 : EF^2$.

EFq. Sit illa velocitas relativa æqualis velocitati, quâ supra ostensum est aquam transire per idem spatium annulare dum circellus interea immotus manet, id est, velocitati quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest: & vis aquæ in circellum ascendentem eadem erit ac prius (*per legum corol.* v.) id est, resistentia circelli ascendentis erit ad pondus cylindri aquæ cujus basis est circellus ille & altitudo est $\frac{1}{2} IG$, ut EFq ad $EFq - \frac{1}{2} PQq$ quamproximè. Velocitas autem circelli erit ad velocitatem, quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirit, ut $EFq - PQq$ ad EFq.



Augeatur amplitudo canalis in infinitum: & rationes illæ inter $EFq - PQq$ & EFq, interque EFq & $EFq - \frac{1}{2} PQq$ accedent ultimo ad rationes æqualitatis. Et propterea velocitas circelli ea nunc erit quam aqua cadendo & casu suo describendo altitudinem IG acquirere potest, resistentia verò ejus æqualis evadet ponderi cylindri cujus basis est circellus ille & altitudo dimidium est altitudinis IG, à quâ cylindrus cadere debet ut velocitatem circelli ascendentis acquirat; (e) & hâc velocitate cylindrus, tempore cadendi, quadruplum longitudinis suæ describet. Resistentia autem cylindri, hâc velocitate secundum longitudinem suam progredientis, eadem est cum resistentiâ circelli (*per lemma* IV.) ideoque æqualis est vi quâ motus ejus, interea dum quadruplum longitudinis suæ describit, (f) generari potest quamproximè.

Si

(e) * *Et hâc velocitate*, cylindrus tempore cadendi duplum longitudinis IG, seu quadruplum longitudinis suæ $\frac{1}{2} IG$, describet (30. *lib.* I.).

(f) * *Generari potest quamproximè.* Quo enim tempore cylindrus cum prædictâ velocitate uniformiter progrediendo, describit spatium $2\, IG$, proprio pondere cadendo describeret altitudinem IG, & velocitatem illam acquireret (30. *lib.* I.). Cùm igitur resistentia æqualis sit ponderi cylindri, patet propositum. 280.

Si longitudo cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & tempus, quo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit (g), augebitur vel minuetur in eâdem ratione, ideoque vis illa, quâ motus auctus vel diminutus, tempore pariter aucto vel diminuto, generari vel tolli poſſit, non mutabitur; ac proinde etiamnum æqualis eſt reſiſtentiæ cylindri, nam & hæc quoque immutata manet per lemma IV.

(h) Si denſitas cylindri augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur. Reſiſtentia itaque cylindri cujuſcunque erit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, vel generari poſſit vel tolli, ut denſitas medii ad denſitatem cylindri quamproximè. *Q. E. D.*

Fluidum autem comprimi debet ut ſit continuum, (i) continuum verò eſſe debet & non elaſticum, ut preſſio omnis, quæ ab ejus compreſſione oritur, propagetur in inſtanti, & in omnes moti corporis partes æqualiter agendo reſiſtentiam non mutet. Preſſio utique, quæ à motu corporis oritur, impenditur in motum partium fluidi generandum & reſiſtentiam creat.

(g) * *Augebitur vel minuetur.* Quantitas motûs in cylindro cujus baſis, denſitas & velocitas datæ ſunt, augetur vel minuitur in ratione longitudinis cylindri ſeu voluminis, & tempus quo cylindrus datâ illâ velocitate uniformiter progrediendo quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, augetur vel minuitur in eâdem longitudinis auctæ vel diminutæ ratione (5. lib. 1.) ideoque (179) vis *illa quâ motus auctus* &c.

(h) * *Si denſitas cylindri* cæteris manentibus, *augeatur vel minuatur, motus ejus ut & vis quâ motus eodem tempore generari vel tolli poteſt, in eâdem ratione augebitur vel minuetur* (279). Cùm igitur cylindri cujuſcunque reſiſtentia æqualis ſit vi quâ motus cylindri aquæ ejuſdem baſis, altitudinis & velocitatis, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poſſit, & vis hæc ſit ad vim quâ totus prioris cylindri motus eodem tempore generari poſſit vel tolli, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri, conſequens eſt ut reſiſtentia cylindri cujuſcumque ſit ad vim quâ totus ejus motus, intereadum quadruplum longitudinis ſuæ deſcribit, generari vel tolli poteſt, ut denſitas aquæ ad denſitatem cylindri quamproxime.

(i) * *Continuum verò eſſe debet & non elaſticum.* Nam ſi fluidum eſſet elaſticum, ipſius partes per compreſſionem condenſarentur, & deinde rareſierent, atque ità preſſio per motum progreſſivum, qui inſtantaneus eſſe non poteſt, propagaretur. At ſi fluidum continuum ſit & denſari compreſſione nequeat, preſſio propagabitur in inſtanti. Experimentis verò conſtat aquam in ſtatu naturali conſtitutam vix poſſe condenſari, ſeu in ſpatium minus compreſſione redigi; cùm è contrà aër maximæ condenſationis & rarefactionis ſit capax.

creat. Pressio autem quæ oritur à compressione fluidi, utcunque fortis sit, si propagetur in instanti, nullum generat motûm in partibus fluidi continui, nullam omnino inducit motus mutationem; ideoque resistentiam nec auget nec minuit. Certè actio fluidi, quæ ab ejus compressione oritur, fortior esse non potest in partes posticas corporis moti quàm in ejus partes anticas, ideoque resistentiam in hac propositione descriptam minuere non potest: & fortior non erit in partes anticas quàm in posticas, si modo propagatio ejus infinitè velocior sit quàm motus corporis pressi. Infinitè autem velocior erit & propagabitur in instanti, si modo fluidum sit continuum & non elasticum.

(k) *Corol.* 1. Cylindrorum, qui secundum longitudines suas in mediis continuis infinitis uniformiter progrediuntur, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatum & duplicatâ ratione diametrorum & ratione densitatis mediorum.

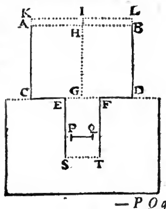
(l) *Corol.* 2. Si amplitudo canalis non augeatur in infinitum, sed cylindrus in medio quiescente incluso secundum longitudinem suam progrediatur, & interea axis ejus cum axe canalis coincidat: resistentia ejus erit ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit, vel generari possit

vel

(k) *Cor.* 1. Sic demonstratur. Resistentia cylindri cujusque est directè ut densitas medii & vis uniformis quâ totus cylindri motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ describit vel generari vel tolli possit, & inversè ut densitas cylindri (ex dem.); Sed vis illa uniformis est in ratione compositâ ex rationibus directis longitudinis cylindri, quadrati diametri, densitatis & quadrati velocitatis & ex ratione inversâ spatii descripti, seu ex ratione inversâ longitudinis cylindri (280.) Quarè (per compositionem rationum & ex æquo), resistentia cylindri cujuscumque, si conferatur cum resistentiâ alterius cylindri, est in ratione quæ componitur ex ratione densitatis medii, & ratione duplicatâ diametri & duplicatâ ratione velocitatis. 280.

(l) * *Cor.* 2. Sic demonstratur. * Si Canalis non sit infinitus respectu baseos cylindri inclusi, resumantur ea quæ sub initium Theor. istius 37. dicebantur; Primo nempe quod ascendente circello in canali clauso, velocitas relativa aquæ semper sit ad ejus velocitatem, ut basis canalis

vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione EFq ad $EFq - \frac{1}{2}PQq$ semel, & ratione EFq ad $EFq - PQq$ bis, & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri.



Corol. 3. Iisdem positis, & quod longitudo L sit ad quadruplum longitudinis cylindri in ratione quæ componitur ex ratione $EFq - \frac{1}{2}PQq$ ad EFq semel, & ratione EFq $- PQq$

lis E F ad annulum E P sive ad differentiam circulorum E F & P Q sive ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$; Quæratur igitur altitudo I G talis ut velocitas lapsu per eam acquisita sit ad velocitatem circelli, ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$, & si fingatur circellus immotus in medio foraminis E F & aqua cadens ex altitudine I G ex vase amplissimo A B D B per illud foramen, cùm velocitas aquæ juxta circellum transiens eadem sit ac velocitas respectiva aquæ juxta cylindrum in canali clauso motum, actio aquæ in circellum utrinque æqualis censenda est, sed actio aquæ sive ejus pondus in circellum per Cor. 10. Prop. 36. est ad cylindrum cujus basis est circellus altitudo $\frac{1}{2}$ I G sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, hæc itaque erit ratio Resistentiæ ad pondus cylindri aquei cujus basis est circellus & altitudo $\frac{1}{2}$ I G; Sed gravitas est vis quæ tempore quo percurritur uniformiter quadruplum longitudinis $\frac{1}{2}$ I G sive 2 I G velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest eam ipsam velocitatem, & pondus cylindri est ipsa gravitas per massam cylindri multiplicata, ergo pondus cylindri, est vis quæ dum percurritur quadruplum longitudinis cylindri velocitate lapsu per I G acquisitâ, generare potest motum ejus cylindri eâ velocitate moti.

Cùm verò celeritas quæ lapsu per I G acquiritur sit ad eam cum quâ cylindrus movetur ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$. Quadruplum longitudinis cylindri propriâ suâ celeritate alio tempore percurret quàm si moveatur celeritate lapsu per I G acquisitâ. Gravitas ergo cylindri, erit ad eam vim quâ cylindri velocitas acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur, directè ut celeritates quæ iis viribus acquiruntur & inversè ut tempora quibus acquiruntur, quæ tempora (cum agatur de describendo uniformiter eodem spatio quadruplo nempe longitudinis cylindri) sunt inversè ut velocitates, ideoque Pondus cylindri est ad vim quâ ejus cylindri motus acquiritur tempore quo quadruplum longitudinis suæ propriâ suâ celeritate describitur bis directe ut celeritas lapsu per I G acquisita, ad celeritatem Cylindri, sive bis ut EF^2, ad $EF^2 - PQ^2$.

Ergo ex æquo Resistentia est ad eam vim sicut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ$. At, nec resistentia nec ea vis mutantur longitudine cylindri mutata, sed tantum densitate mutatâ ut ex ipsa propositionis demonstratione liquet, est autem vis quâ motus in Cylindro aqueo generatur, dato tempore quo quadruplum suæ longitudinis suâ cum velocitate percurrit, ad eam vim qua motus in æquali cylindro, sed diversæ densitatis æquali cum velocitate moto, eodem tempore generatur, ut densitas

—PQq ad EFq bis: (m) resistentia cylindri erit ad vim quâ totus ejus motus, interea dum longitudinem L describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri.

Scholium.

In hâc propositione resistentiam investigavimus quæ oritur à solâ magnitudine transversæ sectionis cylindri, neglectâ resistentiæ parte quæ ab obliquitate motuum oriri possit. Nam quemadmodum in casu primo propositionis XXXVI. obliquitas motuum, quibus partes aquæ in vase, undique convergebant in foramen EF, impedivit effluxum aquæ illius per foramen; sic in hâc propositione, obliquitas motuum, quibus partes aquæ ab anteriore cylindri termino pressæ, cedunt pressioni & (n) undique divergunt, retardat eorum transitum per loca in circuitu termini illius antecedentis versus posteriores partes cylindri, efficitque ut fluidum ad majorem distantiam commoveatur & resistentiam auget, (o) idque in eâ ferè ratione quâ effluxum aquæ è vase diminuit, id est in ratione duplicatâ 25 ad 21 circiter. Et quemadmodum, in propositionis illius casu primo, effecimus ut partes aquæ perpendiculariter & maximâ copiâ transirent per foramen EF, ponendo quod aqua omnis in vase

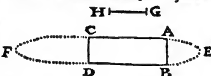
sitas aquæ sive medii, ad densitatem Cylindri, ergo tandem Resistentia est ad vim quâ motus in Cylindro generari vel tolli potest quo tempore quadruplum suæ longitudinis propriâ cum velocitate describit, ut EF^2 ad $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ & bis ut EF^2 ad $EF^2 - PQ^2$ & ut densitas medii ad densitatem Cylindri. Q. E. D.

(m) * *Resistentia cylindri erit ad vim* Nam (per cor. 2. & hyp.) resistentia cylindri est ad vim quâ totus eius motus, quo tempore quadruplum longitudinis suæ uniformiter describit vel generari possit vel tolli, in ratione compositâ ex ratione quadruplæ longitudinis cylindri ad longitudinem L & ratione densitatis medii ad densitatem cylindri, & (279) vis quâ totus cylindri motus, intereadum quadruplum longitudinis suæ describit, generari vel tolli possit, est ad vim quâ idem ejusdem cylindri motus quo tempore longitudinem L uniformiter describit vel tolli possit vel generari, in ratione inversâ temporum, sive ob eamdem utrinque celeritatem in ratione inversâ spatiorum, hoc est, in ratione longitudinis L ad quadruplum longitudinis cylindri. Quare (ex æquo) resistentia cylindri est ad vim quâ totus ejus motus, intereadum longitudinem L uniformiter describit tolli possit vel generari, ut densitas medii ad densitatem cylindri. 280.

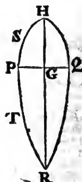
(n) * *Et undiquè divergunt.* Vid. Prop. 41. & 42. lib. hujus.

(o) * *Idque in eâ ferè ratione.* Eodem enim ferè modo motus obliqui in aquæ partibus excitantur, sive aqua in planum circuli immotum impingat, sive circulus eâdem cum velocitate in aquâ quiescente feratur.

se quæ in circuitu cataractæ congelata fuerat, & cujus motus obliquus erat & inutilis, maneret sine motu: sic in hâc propositione, ut obliquitas motuum tollatur & partes aquæ motu maximè directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum cylindro, & sola maneat resistentia, quæ oritur à magnitudine sectionis transversæ, quæque diminui non potest nisi diminuendo diametrum cylindri, concipiendum est quod partes fluidi, quarum motus sunt obliqui & inutiles & resistentiam creant, quiescant inter se ad utrumque cylindri terminum, & cohæreant & (p) cylindro jungantur. Sit *ABCD* rectangulum, & sint *AE* & *BE* arcus duo parabolici axe *AB* descripti, latere autem recto quod sit ad spatium *HG*, describendum à cylindro cadente dum veloci-



(p) * *Et Cylindro jungantur.* Ut num. 277. 278. factum est, ubi circulo P Q in quem aqua influebat cum eâ velocitate quam cadendo & casu suo describendo altitudinem H G acquirit & deinde movebatur uniformiter junctæ sunt glaciei columnæ duæ parabolicæ P H Q & P R Q, quæ aquas exhibent, quarum fluiditas ac motus sunt inutiles, & parabolarum P S H, P T S erat vertex principalis P, axis P G, & ordinatæ G H, ac G R, ideòque parabolæ P S H, latus rectum $\frac{GH^2}{PG}$, & parabolæ P T R latus rectum $\frac{GR^2}{PG}$ seu $\frac{4\,GH^2}{PG}$ prioris $\frac{GH^2}{PG}$, quadruplum (per theor. 1. de parab.). Hinc si aqua quiescat & circulus P Q in aquâ moveatur cum eâdem velocitate quam grave cadendo & casu suo describendo altitudinem H G acquirit, columnæ illæ P H Q & P R Q aquas fere exponent quarum fluiditas ac motus inutiles sunt ut partes aquæ motu maximè directo & brevissimo cedentes facillimum præbeant transitum circulo. Sed (per Lem. IV.) loco circuli P Q substitui potest cylindrus A B D C



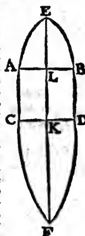
eâdem velocitate motus, & cujus bases A B, C D circulo P Q æquales sint, quibus proinde basibus adjungendæ sunt columnæ duæ A E B, C F D columnis P H Q, P R Q æquales respectivè, atque idipsum est quod NEWTONUS in hoc scholio fecit. Siquidem junctâ E F, mediis basibus A B, C D, occurrente in L & K, & positis A B

locitatem suam acquirit, ut *HG* ad $\frac{1}{3}$ *AB*. Sint etiam *CF* & *DF* arcus alii duo parabolici, axe *CD* & latere recto quod sit prioris lateris recti quadruplum descripti; & convolutione figuræ circum axem *EF* generetur solidum cujus media pars *ABDC* sit cylindrus de quo agimus, & partes extremæ *ABE* & *CDF* contineant partes fluidi inter se quiescentes & in corpora duo rigida concretas, quæ cylindro utrinque tanquam caput & cauda adhæreant. Et solidi *EACFDB*, secundum longitudinem axis sui *FE* in partes versus *E* progredientis, resistentia ea erit quamproxime quam in hâc propositione descripsimus, id est, quæ rationem illam habet ad vim quâ totus cylindri motus, interea dum longitudo 4 *AC* motu illo uniformiter continuato describatur vel tolli possit vel generari, quam densitas fluidi habet ad densitatem cylindri quamproximè. (q) Et hâc vi resistentia minor esse non potest quàm in ratione 2 ad 3. *per corol.* 7, *prop.* XXXVI.

LEM-

A B & C D ipsi P Q æqualibus; est (*per Newt. constr.*) Parabolæ A E latus rectum $\frac{HG^2}{AL} = \frac{HG^2}{PG} = \frac{EL^2}{AL}$, & ideò E L = H G. Et simili modo parabolæ C F, *Newtonianâ* constructione descriptæ, latus rectum est $\frac{4HG^2}{PG} = \frac{KF^2}{CK} = \frac{KF^2}{PG}$, ac proindè K F = 2 H G = G R. Columnæ igitur A E B & C F D, non differunt à columnis P H Q & P R Q.

(q) * *Et hâc vi resistentia minor esse non potest* &c. Resistentia (per cor. 7. prop. 36.) minor esse non potest pondere cylindri aquæ, cujus basis est circellus P Q (sive A B) & altitudo $\frac{1}{3}$ E L seu $\frac{1}{3}$ H G. (vid. figuras superiores.) Velocitas quam hic cylindrus aquæ, vi ponderis sui cadendo & casu suo describendo altitudinem E L acquirit, æqualis est velocitati cum quâ cylindrus A C D B, in aquâ movetur (ex dem.) & ideò cùm basis A B sit etiam utrique cylindro communis, pondus cylindri aquæ erit ad vim quâ totus cylindri A B D C motus, quo tempore longitudinem 4 A C uniformiter describit, generari possit vel tolli, in ratione composità ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri A B D C, & ratione altitudinis $\frac{1}{3}$ E L ad altitudinem A C, & ratione spatii 4 A C ad spatium 2 E L (280), 280.
id est, in ratione compositâ ex ratione densitatis aquæ ad densitatem cylindri ABDC & ratione 2 ad 3. Si itaque vis quâ totus cylindri A B D C motus, intereadum longitudinem 4 A C, uniformiter describit, generari vel tolli possit, sit ad vim aliquam P, ut densitas cylindri A B D C ad densitatem aquæ, erit (ex æquo) pondus prædicti cylindri aquæ ad vim P ut 2 ad 3, atque ideò pondus cylindri aquæ, quo resistentia minor esse non potest; quam in ratione 2 ad 3.



PROP. XXXVII.

LEMMA V.

Si cylindrus, sphæra & sphærois, quorum latitudines sunt æquales; in medio canalis cylindrici ita locentur successivè ut eorum axes cum axe canalis coincidant: hæc corpora fluxum aquæ per canalem æqualiter impedient.

(r) Nam spatia inter canalem & cylindrum, sphæram, & sphæroidem per quæ aqua transit, sunt æqualia: & aqua per æqualia spatia æqualiter transit.

Hæc ita se habent ex hypothesi, quòd aqua omnis supra cylindrum sphæram vel sphæroidem congelatur, cujus fluiditas ad celerrimum àquæ transitum non requiritur, ut in *corol.* VII. *prop.* XXXVI. explicui.

LEMMA VI.

Iisdem positis, corpora prædicta æqualiter urgentur ab âquâ per canalem fluente.

Patet per lemma V. & motus legem tertiam. Aqua utique & corpora in se mutuo æqualiter agunt.

LEMMA VII.

Si aqua quiescat in canali, & hæc corpora in partes contrarias æquali velocitate per canalem ferantur: æquales erunt eorum resistentiæ inter se.

Constat ex lemmate superiore, nam motus relativi iidem inter se manent.

Scho-

(r) * *Nam spatia inter canalem & transversas sectiones, seu latitudines maximas cylindri, sphæræ & sphæroidis per quæ aqua ransit; sunt æqualia.* Vid. Schol. sequens.

Scholium.

Eadem eſt ratio corporum omnium convexorum & rotundorum, quorum axes cum axe canalis coincidunt. Differentia aliqua ex majore vel minore frictione oriri poteſt; ſed in his lemmatis corpora eſſe politiſſima ſupponimus, & medii tenacitatem & frictionem eſſe nullam, & quod partes fluidi, quæ motibus ſuis obliquis & ſuperfluis fluxum aquæ per canalem perturbare, impedire, & retardare poſſunt, quieſcant inter ſe tanquam gelu conſtrictæ, & corporibus ad ipſorum partes anticas & poſticas adhæreant, perinde ut in ſcholio propoſitionis præcedentis expoſui. Agitur enim in ſequentibus de reſiſtentiâ omnium minimâ quam corpora rotunda, datis maximis ſectionibus tranſverſis deſcripta, habere poſſunt.

Corpora fluidis innatantia, ubi moventur in directum, efficiunt ut fluidum ad partem anticam aſcendat, ad poſticam ſubſidat, præſertim ſi figura ſint obtuſa; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quàm ſi capite & caudâ ſint acutis. Et corpora in fluidis elaſticis mota, ſi ante & poſt obtuſa ſint, fluidum paulo magis condenſant ad anticam partem & paulo magis relaxant ad poſticam; & inde reſiſtentiam paulo majorem ſentiunt quam ſi capite & caudâ ſint acutis. Sed nos in his lemmatis & propoſitionibus non agimus de fluidis elaſticis, ſed de non elaſticis; non de inſidentibus fluido, ſed de altè immerſis. Et ubi reſiſtentia corporum in fluidis non elaſticis innoteſcit, augenda erit hæc reſiſtentia aliquantulum tam in fluidis elaſticis; qualis eſt aer, quàm in ſuperficiebus fluidorum ſtagnantium, qualia ſunt maria & paludes.

PRO-

PROPOSITIO XXXVIII. THEOREMA XXX.

Globi, in fluido compresso infinito & non elastico uniformiter progredientis, resistentia est ad vim quâ totus ejus motus, quo tempore octo tertias partes diametri suæ describit, vel tolli possit vel generari, ut densitas fluidi ad densitatem globi quamproximè.

(s) Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria; & propterea vis illa, quæ tollere possit motum omnem cylindri interea dum cylindrus describat longitudinem quatuor diametrorum, globi motum omnem tollet interea dum globus describat duas tertias partes hujus longitudinis, id est, octo tertias partes diametri propriæ. Resistentia autem cylindri est ad hanc vim quamproximè ut densitas fluidi ad densitatem cylindri vel globi per prop. XXXVII. & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri per lem. V, VI, VII. *Q. E. D.*

(t) *Corol.* 1. Globorum, in mediis compressis infinitis, resistentiæ sunt in ratione quæ componitur ex duplicatâ ratione velocitatis, & duplicatâ ratione diametri, & ratione densitatis mediorum.

Corol. 2. Velocitas maxima quâcum globus, vi ponderis sui comparativi, in fluido resistente potest descendere, ea est quam acquirere potest globus idem, eodem pondere, sine resistentiâ cadendo & casu suo describendo spatium quod sit ad quatuor tertias partes diametri suæ ut densitas globi ad densitatem

(s) * *Nam globus est ad cylindrum circumscriptum ut duo ad tria* (170. lib. 1.) & propterea, cum eadem sit globi & cylindri densitas eademque velocitas (ex hyp.) quantitas motûs globi est ad quantitatem motûs cylindri ut duo ad tria, & tempus quo globus octo tertias partes diametri propriæ uniformiter describit, est ad tempus quo cylindrus eâdem uniformi velocitate quadruplum longitudinis suæ, seu duodecim tertias diametrorum globi describit, etiam ut duo ad tria. Quare (178) vis uniformis quâ totus globi motus intereadum octo tertias partes diametri propriæ describit tolli possit vel generari, est ad vim uniformem quâ totus cylindri motus, quo tempore longitudinem quatuor diametrorum globi describit vel tolli vel generari possit ut duo ad tria directè & duo ad tria inversè, id est, in ratione æqualitatis. *Resistentia autem cylindri &c.*

(t) * *Cor.* 1. Patet per cor. 2. prop. 37., quià resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri circumscripti.

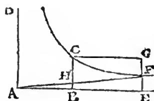
tatem fluidi. Nam globus tempore casus sui, cum velocitate cadendo acquisitâ, (u) describet spatium quod erit ad octo tertias diametri suæ, ut densitas globi ad densitatem fluidi; & vis ponderis motum hunc generans, erit ad vim quæ motum eundem generare possit, quo tempore globus octo tertias diametri suæ eadem velocitate describit, ut (x) densitas fluidi ad densitatem globi: ideoque per hanc propositionem, vis ponderis æqualis erit vi resistentiæ, & propterea globum accelerare non potest.

(y) *Corol.* 3. Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus, ut & densitate fluidi compressi quiescentis in quo globus movetur; datur ad omne tempus & velocitas globi & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum, per *corol.* VII. *prop.* XXXV.

(u) * *Describet spatium quod erit ad octo tertias partes diametri suæ &c.* Describet enim spatium duplum illius quod vi ponderis sui comparativi sine resistentia cadendo descripsit (30. lib. 2.), id est, *spatium quod erit ad octo tertias partes &c.*

(x) * *Ut densitas fluidi ad densitatem globi.* Sit D diameter globi, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{8}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem fluidi; & tempus quo globus uniformiter describit spatium $\frac{8}{3}D$, erit ad tempus quo eadem uniformi velocitate describit spatium $2F$, ut $\frac{8}{3}D$ ad $2F$ (5. *lib.* 1.), id est, ut densitas fluidi ad densitatem globi. Cùm igitur vires uniformes sint reciprocè ut tempora quibus motus æquales generant (279), patet propositum.

(y) 282. Cor. 3. *Datâ & densitate globi & velocitate ejus sub initio motus & densitate fluidi datur ad omne tempus & velocitas globi, & ejus resistentia & spatium ab eo descriptum.* * Primum, ex datâ densitate globi, & densitate fluidi, invenietur, per Cor. 2, vis æqualis resistentiæ cùm velocitas ea est quam



acquirere potest is globus, cadendo in vacuo per vim sui ponderis comparativi & describendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut densitas globi ad densitatem fluidi. 282.

Secundò, ex datâ hac resistentiâ invenietur resistentia quæ competit velocitati globi de quo agitur sub initio ejus motus, quia resistentiæ hic supponuntur esse ut quadrata velocitatum; istâ autem resistentiâ cognitâ dabitur tempus quo si hæc resistentia uniformiter ageret, totam velocitatem quam habet globus sub initio motus destruere posset, sicque si B C designet eam velocitatem initio motus simulque resistentiam ipsi competentem, designeturque per A B illud tempus quo ea velocitas per resistentiam uniformem destrui potest, & erecto perpendiculo A D, asymptotis A D, A B per punctum C describatur Hyperbo-

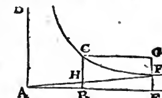
DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XXXVIII. THEOR. XXX.

la, ex ejus Hyperbolæ constructione dabitur ad quodlibet tempus (quod designabitur per BE) velocitas reliqua EF, resistentia BH, & spatium descriptum CBEF; Quâ autem ratione hæc singula ad calculum revocentur, dicendum.

I. Vis illa quæ resistentiæ æqualis esse debet cùm Corpus habet velocitatem maximam quam lapsu suo in fluido dato acquirere potest, est ipsum pondus comparativum corporis, sit ergo A ejus pondus, Densitas data corporis est ad densitatem fluidi, ut A ad pondus æqualis voluminis fluidi, quo invento, detrahatur illud ex pondere A, relinquitur pondus comparativum globi in fluido quod dicatur B.

Ut præterea determinetur tempus quo eo pondere B corpus percurret cadendo spatium quod sit ad quatuor tertias Diametri suæ ut ejus densitas ad densitatem fluidi, sive, si dicatur *D* Diameter & dicatur *F* spatium quod sit ad $\frac{4}{3}$ *D* ut densitas globi ad densitatem medii, ut determinetur tempus quo globus pondere *B* cadendo percurret spatium *F* posito quod grave cadendo in vacuo pondere A tempore unius minuti secundi pedes Parisienses 15 $\frac{1}{12}$ percurrit, & cùm spatia diversis viribus acceleratricibus descripta eodem tempore sint ut illæ vires, spatium 15 $\frac{1}{12}$ pedum pondere A uno minuto secundo percursum est ad spatium eodem tempore pondere *B* percursum ut A ad B. Ut autem est illud spatium, ad spatium *F*, ita quadratum minuti unius secundi ad quadratum temporis quo eo pondere *B* spatium *F* percurretur, quod tempus dicatur *G*, cumque velocitate per lapsum acquisitâ duplum spatii lapsu percursi uniformiter describatur ipso lapsus tempore, ideo velocitate pondere *B* tempore *G* acquisitâ, eodem tempore *G* describeretur 2 *F*, cùmque velocitas omnis exprimatur per spatium divisum per tempus, erit ea velocitas maxima $\frac{2F}{G}$ quæ in posterum dicatur *H*.

II. Datâ autem quâvis aliâ ejusdem globi velocitate in eodem fluido eaque dicatur *M*, resistentia ipsi competens ita obtinetur, ut quadratum velocitatis H ad quadratum velocitatis hujusce *M*, ita est resistentia adversus velocitatem H cui pondus B æquiponet, ad resistentiam adversus velocitatem *M*, quam vocabo R; cum ergo prius data sit ratio *A* ad *B* dabitur etiam ratio *A* ad *R* ideoque dabitur spatium quod actione vi *R* uniformi suppositâ per unum minutum secundum describeretur, siquidem spatia per diversas vires uniformes acceleratrices descripta iisdem temporibus sunt ut illæ vires, ideoque *A* ad *R* ut 15 $\frac{1}{12}$ ped. ad spatium uno minuto secundo descriptum, cujus spatii duplum per unum minutum secundum divisum exprimit velocitatem vi *R* per unum minutum secundum productam. Unde invenietur tempus quo per eam vim *R* uniformiter agentem velocitas *M* produci vel etiam destrui posset, velocitates enim per eamdem vim acquisitæ sunt ut tempora quibus acquiruntur; Ergo velocitas tempore unius minuti secundi acquisita est ad velocitatem *M*, ut unum minutum secundum ad tempus quo vis R velocitatem *M* generare vel tollere posset. Unde tandem in Hyperbolæ constructione datur valor temporis per lineam A B designati.



Sumatur ergo B E quod sit ad A B ut tempus quod assumere lubet ad tempus illud quo vis R velocitatem *M* quæ per BC exprimitur generare vel tollere potest uniformiter agendo, & ducatur ordinata EF, ea designabit velocitatem globi eo tempore superstitem quæ ex naturâ Hyperbolæ habebitur, est enim A E, ad A B, sicut B C sive *M* ad E F, unde cum sit A E = A B + B E; sitque A B tempus mox inventum, B E tempus

(z) *Corol.* 4. Globus in fluido compresso quiescente ejusdem secum densitatis movendo, dimidiam motus sui partem prius amittet quam longitudinem duarum ipsius diametrorum descripserit, per idem *corol.* VII.

PRO-

tempus assumptum, B C sive *M* velocitas data, datur etiam E F.

Datur pariter resistentia B H, est enim B C ^{2} ad E F ^{2} ut R ad hancce novam resistentiam, quæ, prioribus datis, etiam dabitur.

Denique datur spatium à corpore descriptum, datur enim spatium quod velocitate constanti *M* tempore B E percurritur; Est verò area B C G E ad spatium Hyperbolicum B C F E, ut spatium velocitate constanti *M* tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente, at ex naturâ Logarithmorum Hyperbolicorum spatium Hyperbolicum B C F E est Logarithmus quantitatis $\frac{AE}{AB}$; & quia Logarithmi earumdem quantitatum in diversis Logarithmorum seriebus sumpti sunt proportionales, sumatur Logarithmus illius quantitatis $\frac{AE}{AB}$ in Tabulis vulgaribus, fiatque ut Logarithmus denarii numeri in Tabulis (sive unitas) ad 2.30258509 qui est Logarithmus Hyperbolicus ejusdem denarii numeri, ita Logarith. quantitatis $\frac{AE}{AB}$ ex Tabulis desumptus ad Logarithmum Hyperbolicum ejus quantitatis, habebitur area B C F E, sit ergo dignitas Hyperbolæ $=1$, erit BC $= \frac{1}{AB}$ & area B C G E $= \frac{1}{AB} \times$ B E, ideoque ut $\frac{BE}{AB}$, ad Logarithmum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ è Tabulis desumptum & multiplicatum per 2.30258509. Ita spatium velocitate constanti B C tempore B E percursum, ad spatium percursum cum velocitate per resistentiam decrescente. Q. E. I. 282.

(z) * *Cor.* 4. ;* Cum globus & fluidum ejusdem densitatis supponantur, resistentia isto in casu erit æqualis vi quâ totus motus globi generari vel tolli posset quo tempore octo tertias Diametri suæ uniformiter describeret, itaque sit B C motus globi, erit A B tempus quo uniformiter percurreret octo tertias suæ Diametri, sit E F, dimidium B C, quoniam EF exprimit residuum motum, PE erit tempus quo dimidia pars motus amissa fuerit, sed BC ad E F ut A E ad A B & est B C ad E F ut 2 ad 1, per const. ergo etiam A E $=$ 2 A B & B E $=$ A B, ideoque dimidium motum amittet quo tempore percurreret uniformiter octo tertias Diametri suæ; Sed illud spatium uniformiter percursum est ad spatium percursum velocitate per resistentiam decrescente ut $\frac{BE}{AB}$ (sive $\frac{1}{1}$) ad Logarithmum è Tabulis desumptum quantitatis $\frac{AE}{AB}$ (sive $\frac{2}{1}$) multiplicatum per 2.30258509, & ille Logarithmus est. 3010300, productum ergo erit .6931 &c. ideo 1. ad .6931 &c. ut $\frac{8}{3}$ *D*, ad 1.84832 *D*, quod quidem paulo minus est quam 2 D, ideo Globus in fluido ejusdem densitatis dimidiam sui motus partem prius describet *quam longitudinem duarum ipsius Diametrorum descripserit.* Q. E. D.

PROPOSITIO XXXIX. THEOREMA XXXI.

Globi, per fluidum in canali cylindrico clausum & compressum uniformiter progredientis, resistentia est ad vim, quâ totus ejus motus, interea dum octo tertias partes diametri suæ describit, vel generari possit vel tolli, in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicatâ orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi quamproximè.

Patet *per corol.* 2. *prop.* XXXVII. procedit verò demonstratio (a) quemadmodum in propositione præcedente.

Scholium.

In propositionibus duabus novissimis (perinde ut in lem. V.) suppono quòd aqua omnis congelatur quæ globum præcedit, & cujus fluiditas auget resistentiam globi. Si aqua illa omnis liquescat, augebitur resistentia aliquantulum. Sed augmentum illud in his propositionibus parvum erit & negligi potest, propterea quòd convexa superficies globi totum ferè officium glaciei faciat.

PROPOSITIO XL. PROBLEMA IX.

Globi, in medio fluidissimo compresso progredientis, invenire resistentiam per phænomena.

Sit A pondus globi in vacuo, B pondus ejus in medio resisten-

(a) * *Quemadmodum in propositione præcedente.* Demonstratio eadem manet, quæ in nota 281. adjungenda tantum hæc sunt: resistentia autem cylindri est ad hanc vim quam proximè in ratione quæ componitur ex ratione orificii canalis ad excessum hujus orificii supra dimidium circuli maximi globi, & ratione duplicata orificii canalis ad excessum hujus orificii supra circulum maximum globi, & ratione densitatis fluidi ad densitatem globi (*per cor.* 2. *prop.* XXXVII.); & resistentia globi æqualis est resistentiæ cylindri, per Lem. V, VI, VII. Q. E. D.

ſiſtente, D diameter globi, F ſpatium quod ſit ad $\frac{4}{3}$ D ut denſitas globi ad denſitatem medii, id eſt, (b) ut A ad A — B, G tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit ſpatium F, & H velocitas quam globus hocce caſu ſuo acquirit. Et erit H velocitas maxima quâcum globus, pondere ſuo B, in medio reſiſtente poteſt deſcendere, *per corol.* 2. *prop.* XXXVIII. & reſiſtentia, quam globus eâ cum velocitate deſcendens patitur, æqualis erit ejus ponderi B: reſiſtentia verò, quam patitur in aliâ quâcunque velocitate, erit ad pondus B in duplicatâ ratione velocitatis hujus ad velocitatem illam maximam H, *per corol.* 1. *prop.* XXXVIII.

Hæc eſt reſiſtentia quæ oritur ab inertiâ materiæ fluidi. Ea verò quæ oritur ab elaſticitate, tenacitate, & frictione partium ejus, (c) ſic inveſtigabitur.

De-

(b) 283. * *Id eſt, ut A ad A — B.* Denſitates corporum ejuſdem voluminis ſunt eorumdem pondera in vacuo (2. & 3. *lib.* 1.); Sed A eſt pondus globi in vacuo, & A — B pondus æqualis globi aquæ etiam in vacuo; nam globus A aquæ immerſum ponderis ſui partem amittit æqualem ponderi paris voluminis aquæ (*per cor.* 6. *prop.* XX). Ergo &c.

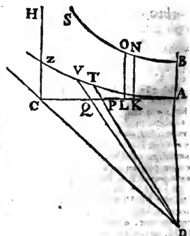
(c) 284. * *Sic inveſtigabitur.* Ut eorum quæ hic NEWTONUS profert, demonſtratio facilius intelligatur, non nulla revocanda ſunt, quæ in propoſitionibus VIII. & IX. demonſtravit. Sunto C H & A B rectæ ad datam A C perpendiculares, C H quidem infinita, & B A æqualis $\frac{1}{4}$ A C. Centro C aſymptotis G H, C A deſcribatur per punctum B hyperbola B N S capiantur A C, A P, A K continuè proportionales, & per punctum K ducatur ad hyperbolam recta K N parallela A B. Et ſi corpus grave è quiete cadat in medio quod in duplicatâ velocitatis ratione reſiſtit, exponatque area A B N K ſpatium à corpore cadente deſcriptum; velocitas corporis hocce caſu acquiſita exponi poterit per lineam A P, & ipſius velocitas maxima per datam A C (*per cor.* 1. *& 2 prop.* VIII). Producatur jam B A ad D ut ſit A D æqualis A C, jungatur D C, & centro D, aſymptoto D C ac vertice principali A deſcribatur altera hyperbola A T Z, quæ lineam D P productam ſecet in T, & lineam D Q ipſi D P infinitè propinquam in V; & ſector evaneſcens D T V erit æqualis 284.

Rr 3

Demittatur globus ut pondere suo B in fluido descendat; & sit P tempus cadendi, idque in minutis secundis si tempus G in minutis secundis habeatur. Inveniatur numerus absolutus N qui congruit logarithmo $0,4342944819\ \frac{2P}{G}$, sitque L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$: & velocitas cadendo acquisita

lis $\frac{PDQ \times AC}{CK}$, & sector ATD tempus exponet quo corpus cadendo describit spatium ABNK & quo velocitatem AP acquirit (per casum 2. prop. IX.). Spatium verò quod corpus tempore quovis ATD cadendo describit, erit ad spatium quod corpus velocitate maximâ AC, eodem tempore uniformiter progrediendo, describere potest, ut area ABNK ad aream ATD (*per cor.* 1. *prop.* IX), & tempus quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem AP acquirit, erit ad tempus quo velocitatem maximam AC in medio non-resistente vi ponderis sui comparativi cadendo acquirere posset, ut sector ATD ad triangulum ADC (per cor. 5. prop. IX.).

285. His præsuppositis, dicantur $AC = AD = a$, $AB = \frac{1}{4}a$, $AP = x$, $PQ = dx$, & quia $AC : AP = AP : AK$, erit $AK = \frac{xx}{a}$, $CK = \frac{aa - xx}{a}$, triangulum $PDQ = \frac{1}{2}a\,dx$, & sector $DTV = \frac{PDQ \times AC}{CK} = \frac{\frac{1}{2}a^3 dx}{aa - xx} = \frac{\frac{1}{4}aadx}{a+x} + \frac{\frac{1}{4}aadx}{a-x}$; unde, sumtis fluentibus, habetur sector $ATD = \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a+x} - \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{a-x} = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{a+x}{a-x}$, cui quantitati nihil addendum vel subducendum est, quia ubi fit $ATD = 0$, & $x = 0$, evanescit, ut oportet. Ducatur LO parallela KN ipsique infinitè propinqua; & cum sit $AK = \frac{xx}{a}$ & (*per theor.*



4. *de hyp.*) $KN = \frac{CA \times AB}{CK} = \frac{\frac{1}{4}a^3}{aa - xx}$, ac $KL = \frac{2x\,dx}{a}$, erit areæ ABNK fluxio $KNOL = \frac{\frac{1}{2}a^2 x\,dx}{aa - xx}$, sumptisque fluentibus, area $ABKN = Q$ *const.* $- \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{aa - xx}$; quia verò area ABNK evanescit ubi fit $x = 0$, erit constans $Q = \frac{1}{4}aa\,L.\,aa$, & area accurata $ABNK = \frac{1}{4}aa\,L.\,aa - \frac{1}{4}aa\,L.\,\overline{aa - xx} = \frac{1}{4}aa\,L.\,\frac{aa}{aa - xx}$. Porro

sita erit $\frac{N-1}{N+1}H$, altitudo autem descripta erit $\frac{2PF}{G}-$ 1,3862943611

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VII. Prop. XL. Probl. IX.

ro (284) tempus P quo corpus in medio resistente cadendo velocitatem acquirit lineæ AP seu x proportionalem, est ad tempus G quo velocitatem maximam H vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadendo acquirere potest, ut sector ATD ad triangulum ADC, id est, $P:G=\frac{1}{4}aa\,L.\frac{a+x}{a-x}:\frac{1}{2}aa=L.\frac{a+x}{a+x}:2$. Quare erit $\frac{2P}{G}=L.\frac{a+x}{a-x}$, hoc logarithmo sumto in logistica cujus subtangens est unitas (38. *lib.* 11.). Quapropter si logarithmus numeri $\frac{a+x}{a-x}$ sumatur in tabulis, multiplicandus erit per numerum 2,302585092, ut in *cor.* 7. *prop.* XXXV. factum est, & habebitur $\frac{2P}{G}=2{,}302585093\;L.\frac{a+x}{a-x}$, ideoque dividendo 1. per 2. 3025 &c. numerus $0{,}4342944819.\frac{2P}{G}$ est logarithmus tabularis numeri $\frac{a+x}{a-x}$. Itaque si per tabulas quæratur numerus absolutus N qui congruat Logarithmo $0{,}4342944819.\frac{2P}{G}$, erit $N=\frac{a+x}{a-x}$, ideoque $x=\frac{a[N-1]}{N+1}$. Est autem (284) AC ad AP seu a ad x, ut velocitas maxima H ad velocitatem cadendo acquisitam. Quare hæc velocitas erit $\frac{xH}{a}=\frac{N-1}{N+1}\times H$, sicuti NEWTONUS invenit. Spatium quod globus velocitate maximâ H uniformiter progrediendo tempore P describit, est ad spatium $2F$ quod eadem velocitate H uniformiter percurrit tempore G, ut tempus P ad tempus G (5. *lib* 1.), & propterea spatium illud est $\frac{2PF}{G}$. Altitudo S quam globus tempore P cadendo in medio resistente describit, est ad spatium $\frac{2PF}{G}$, ut area ABNK ad sectorem ATD (284), id est, ut $\frac{1}{4}aa\,L.\frac{aa}{aa-xx}$ ad $\frac{1}{4}aa\,L.\frac{a+x}{a-x}$, sive ut $L.\frac{aa-xx}{aa}$ ad $L.\frac{a+x}{a-x}$; Sed (ex dem.) $\frac{a+x}{a-x}=N$, & $x=\frac{a[N-1]}{N+1}$, ac proinde $\frac{aa}{aa-xx}=\frac{[N+1]^2}{4N}=\frac{N\times[N+1]^2}{4NN}$, & si logarithmi sumantur in logistica cujus subtangens est unitas, est $\frac{2P}{G}=L.\frac{a+x}{a-x}=L.N$, & $L.\frac{aa}{aa-xx}=L.\frac{N\times[N+1]^2}{4NN}=L.N+2L.\frac{N+1}{N}-L.4$; ideoque $L.\frac{aa}{aa-xx}:L.\frac{a+x}{a-x}=L.N+2L.\frac{N+1}{N}-L.4:L.N$

$$=1+\frac{2L.\frac{N+1}{N}-L.4}{L.N}:1=1+\frac{G}{P}L.\frac{N+1}{N}-\frac{G}{2P}L.4:1=S:\frac{2PF}{G}.$$

285.

Quare altitudo $S=\frac{2PF}{G}-FL.4+2FL.\frac{N+1}{N}$. At si velimus tabularum logarithmis uti, ii multiplicandi sunt per numerum 2,302585092994, seu per 2,302585093. Hic numerus dicatur M, logarithmus numeri 4 in tabulis sumptus Q, & logarithmus etiam tabularis numeri $\frac{N+1}{N}$ sit L; & erit $S=\frac{2PF}{G}-MQF+2MLF$. Est autem $2M=4{,}605170186$, & Q in tabulis vulgaribus est 0,60206; seu accuratius 0,6020599913, ideoque $MQ=1{,}3862943611$ quamproximè. Quare altitudo S, quam globus in medio resistente cadendo tempore P describit, est $\frac{2PF}{G}-1{,}3862943911\,F+4{,}605170186\,LF$, uti NEWTONUS definivit.

1, 3862943611 F + 4, 605170186 L F. (d) Si fluidum satis profundum sit negligi potest terminus 4, 605170186 L F; & erit $\frac{2PF}{G}$ — 1, 3862943611 F altitudo descripta quamproximè. Patent hæc per libri secundi propositionem nonam & ejus corollaria, ex hypothesi quod globus nullam aliam patiatur resistentiam nisi quæ oritur ab inertiâ materiæ. Si verò aliam insuper resistentiam patiatur, descensus erit tardior, & ex retardatione innotescet quantitas hujus resistentiæ.

Ut corporis in fluido cadentis velocitas & descensus facilius innotescant, composui tabulam sequentem, cujus columna prima denotat tempora descensus, secunda exhibet velocitates cadendo acquisitas existente velocitate maximâ 100000000, tertia exhibet spatia temporibus illis cadendo descripta existente 2 F spatio quod corpus tempore G cum velocitate maximâ describit, & quarta exhibet spatia iisdem temporibus cum velocitate maximâ descripta. Numeri in quartâ columnâ sunt $\frac{2P}{G}$, & subducendo numerum 1, 3862944 — 4, 6051702 L, inveniuntur numeri in tertiâ columnâ, & multiplicandi sunt hi numeri per spatium F ut habeantur spatia cadendo descripta. Quinta his insuper adjecta est columna, quæ continet spatia descripta iisdem temporibus à corpore, vi ponderis sui comparativi B, in (e) vacuo cadente. Tem-

(d) * *Si fluidum satis profundum sit*; id est, si altitudo S quam globus tempore P cadendo describit, satis magna fuerit, negligi potest terminus 4,605170186 L F. Cum enim sit L logarithmus numeri $\frac{N+1}{N}$, ubi N est numerus satis magnus, seu ubi numerus $\frac{N+1}{N}$ est fere æqualis unitati, Logarithmus L evanescit quam proximè. Sed, si velocitas maxima dicatur H, & velocitas tempore P casu globi acquisita V, est $H : V = a : x$ (285), & ideo $\frac{H+V}{H-V} = \frac{a+x}{a+x} = N$, & quando spatium descriptum S satis magnum est, fit $V = H$ quam proximè, ac proinde $\frac{H+V}{H-V}$ seu N numerus satis magnus, ut ex sequenti tabula manifestum est. Patet ergo propositum.

(e) * *In vacuo cadente.* Hujus tabulæ constructio paulo fusius exponenda videtur. Numeri singuli columnæ primæ, quibus exprimitur ratio temporis P ad tempus G, assumuntur pro lubitu; numeri verò in columna quarta correspondentes facillimè reperiuntur. Cum enim spatium tempore G velocitate maximâ H uniformiter descrip-

Tempora P	Velocitates cadentis in fluido.	Spatia cadendo descripta in fluido.	Spatia motu maximo descripta.	Spatia cadendo descripta in vacuo.
0,001G	99999$\frac{29}{30}$	0,000001F	0,002F	0,000001F
0,01G	999967	0,0001F	0,2F	0,0001F
0,1G	9966799	0,0099834F	0,2F	0,01F
0,2G	19737532	0,0397361F	0,4F	0,04F
0,3G	29131261	0,0886815F	0,6F	0,09F
0,4G	37994896	0,1559070F	0,8F	0,16F
0,5G	46211716	0,2402290F	1,0F	0,25F
0,6G	53704957	0,3402706F	1,2F	0,36F
0,7G	60436778	0,4545405F	1,4F	0,49F
0,8G	66403677	0,5815071F	1,6F	0,64F
0,9G	71629787	0,7196609F	1,8F	0,81F
1G	76159416	0,8675617F	2F	1F
2G	96402758	2,6500055F	4F	4F
3G	99505475	4,6186570F	6F	9F
4G	99932930	6,6143765F	8F	16F
5G	99990920	8,6137964F	10F	25F
6G	99998771	10,6137179F	12F	36F
7G	99999834	12,6137073F	14F	49F
8G	99999980	14,6137059F	16F	64F
9G	99999997	16 6137057F	18F	81F
10G	99999999$\frac{3}{7}$	18,6137056F	20F	100F

Scho-

scriptum sit 2 F, & spatia eâdem uniformi velocitate descripta temporibus, quibus describuntur, proportionalia sint; numeri columnæ quartæ, duplicatis numeris columnæ primæ correspondentibus, habentur. Quia verò spatia, à corpore vi ponderis sui comparativi B sine resistentia cadente, descripta, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur, & tempore G describitur spatium F; numeri columnæ quintæ sunt quadrata numerorum correspondentium in columna prima. Numeri columnæ secundæ velocitatem acquisitam cadendo in fluido tempore P indicant quæ est $\frac{N-1}{N+1} \times H$, sicque inveniuntur: assumpto in columna prima termino quovis, Exempli causâ, 2 G pro P, 285

fit $\frac{2P}{G} = \frac{4G}{G} = 4$, & hinc 0,4342944819 $\frac{2P}{G} = 1,7371779276$. Huic logarithmo in tabulis congruit numerus absolutus 54,59815 $= N$; unde fit $\frac{N-1}{N+1} = \frac{5359815}{5559815}$, & quia $H = 100000000$ (*per hyp.*), velocitas tempore P, sive 2 G, acquisita $\frac{N-1}{N+1} H$, est 96402758, uti NEWTONUS in tabula posuit. Inventis hoc modo numeris columnæ secundæ, inveniuntur quoque numeri colum-

Scholium.

Ut resistentias fluidorum investigarem per experimenta, paravi vas ligneum quadratum, longitudine & latitudine internâ digitorum novem (f) pedis *Londinensis*, profunditate pedum novem cum semisse, idemque implevi aquâ pluviali; & globis ex cerâ & plumbo incluso formatis, notavi tempora descensus globorum, existente descensus altitudine 112 digitorum pedis. Pes solidus cubicus *Londinensis* continet 76 libras *Romanas* aquæ pluvialis, & pedis hujus digitus solidus continet $\frac{19}{36}$ uncias libræ hujus seu (g) grana $253\frac{1}{3}$; & globus aqueus diametro digiti unius descriptus continet grana 132,645 in medio aeris, vel (h) grana 132,8 in vacuo; & globus quilibet

næ tertiæ, videlicet $\frac{2P}{G} - 1,386293611 + 4,6051702\,L$. Quoniam enim datus est numerus $\frac{2P}{G}$, & jam inventus fuit numerus N, cognoscetur numerus $\frac{N+1}{N}$ cum ipsius Logarithmo L; atque ita obtinebitur numerus columnæ tertiæ.

286. Ex hâc porro tabulâ patet verum esse posse, quod non nulli se observasse testantur, nimirum gravia in mediis resistentibus cadentia brevi satis tempore ad maximam quam acquirere possint velocitatem pervenire & postea moveri uniformiter; licet per theoriam non nisi tempore infinito, seu nunquam, possint maximam illam velocitatem reverâ acquirere. Nam si tempus P quo globus in fluido quocumque cadit, sit æquale tempori 5 G; globi velocitas acquisita erit ad velocitatem maximam ut 9999092 ad 10000000, seu ut 1. ad 1,0000908, quam proximè, & spatium hoc tempore 5 G descriptum erit 8,6137964 F, & deinde spatia descripta crescent fere in progressione arithmetica ad modum temporum. Elapso igitur tempore 4G. vel 5 G globus uniformiter descendere videbitur, licet ejus velocitas reverâ perpetuò crescat. Si verò assumatur tempus P æquale 10G, tum velocitas acquisita est ad velocitatem maximam ut 99999999 $\frac{3}{5}$ ad 100000000, & tantorum numerorum differentia $\frac{2}{5}$ prorsus insensibilis est oculis humanis.

(f) * *Pedis Londinensis*. Pes Londinensis est ad pedem Parisiensem ut 15 ad 16; uterque in digitos 12, & digitus in 12 lineas dividitur.

(g) * *Seu grana*. Libra Romana uncias 12, uncia 480. grana continet.

(h) 287. * *Vel grana* 132, 8 *in vacuo*. Corpus quodlibet ponderis sui partem amittit in aëre æqualem ponderi paris voluminis aëris; corporum vero pondera absoluta sub paribus voluminibus sunt ut eorum densitates, & densitas aquæ, juxta NEWTONUM, est ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Quare, cum globi aquei pondus in aëre parum differat ab ejusdem pondere in vacuo, dicendum est, ut 860 ad 1, ita pondus globi aquei granorum 132, 645 ad pondus æqualis globi aëris, quod proinde erit granorum 0,1543 quam proxime. Addatur pondus hoc ponderi granorum 132, 645, & summa gran. 132,7993, seu gran. 132,8 erit pondus prædicti globi aquæ in vacuo quam proxime. Dato igitur pondere globi cujuslibet aquei in aëre, invenitur ejus pondus in vacuo, si ponderi dato addatur id

libet (i) alius est ut excessus ponderis ejus in vacuo supra pondus ejus in aquâ.

Exper. 1. Globus, cujus pondus erat $156\frac{1}{4}$ granorum in aere & 77 granorum in aquâ, altitudinem totam digitorum 112 tempore minutorum quatuor secundorum descripsit. Et experimento repetito, globus iterum cecidit eodem tempore minutorum quatuor secundorum.

(k) Pondus globi in vacuo est $156\frac{13}{38}$ *gran.* & excessus hujus ponderis supra pondus globi in aquâ est $79\frac{13}{38}$ *gran.* (l) Unde prodit globi diameter 0,84224 partium digiti. Est autem ut excessus ille ad pondus globi in vacuo, ita (m) densitas aquæ ad densitatem globi, (n) & ita partes octo tertiæ diametri globi (*viz.* 2,24597 *dig.*) ad spatium 2 F, (o) quod proinde erit 4,4256 *dig.* Globus tempore minuti unius secundi, toto suo pondere granorum $156\frac{13}{38}$, (p) cadendo in vacuo de-

id quod ex divisione ejusdem ponderis per numerum 860 habetur.

(i) 288. * *Et globus quilibet &c.* Globus quilibet E est ad globum aqueum C diametro digiti unius descriptum, ut excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus granorum 132,8. Nam excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aquâ est pondus globi aquæ ejusdem cum globo *E* diametri; Sed globi aquæ homogenei sunt ut eorumdem pondera: est igitur globus *E* ad globum C ut excessus ponderis globi *E* in vacuo supra pondus ejus in aqua, ad pondus 132,8 granorum.

(k) * *Pondus globi in vacuo est* $156\frac{13}{38}$ *gran.* Si enim ex pondere globi in aere gran. $156\frac{1}{4}$ subducatur pondus ejus in aqua, quod est gran. 77, residuum erit pondus globi aquæ ejusdem voluminis gran. $79\frac{1}{4}$; & propterea (287) ut habeatur pondus globi in vacuo, ponderi gran. $156\frac{1}{4}$ addendum est pondus gran. $\frac{79\frac{1}{4}}{860}$, & prodit pondus globi in vacuo gran. $156\frac{13}{38}$ quam proximè.

(l) * *Unde prodit globi diameter &c.* Est enim (288) pondus gran. 132,8 ad excessum $79\frac{13}{38}$, ut globus diametro digiti unius descriptus ad globum quæsitum; ideoque ut diametri 1 digiti cubus 1 ad diametri globi quæsiti cubum, qui proinde erit $\frac{79\frac{13}{38}}{132,8}$ partium digiti cubici. Hujus fractionis radix cubica, seu globi diameter, est 0,84224 partium digiti quam proximè. 288.

(m) * *Ita densitas aquæ ad &c.* (283).

(n) * *Et ita partes octo tertiæ diametri globi &c.* Per Prop. XL. lib. II.

(o) * *Quod proinde erit 4,4256 dig.* Nam $79\frac{13}{38} : 156\frac{13}{38} = 3015 : 5941 = 2,24597 : 4,4256$, quam proxime.

(p) 289. * *Cadendo in vacuo describes digitos* $193\frac{1}{3}$. Quoniam corporis, præsertim gravioris, oscillationes quæ in minoribus arcubus fiunt, iisdem quam proximè temporibus peraguntur in aere & in vacuo (*per cor.* 2. *prop.* XXVII. *lib.* II.); spatium quod grave cadendo in vacuo tempore minuti unius secundi describit, est pedum Parisiensium $15\frac{1}{12}$, seu ac-

describet digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere granorum 77, eodem tempore sine resistentiâ cadendo in aquâ (q) describet digitos 95,219; (r) & tempore G, quod sit ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 *dig.* ad 95,219 *dig.* describet 2,2128 *dig.* & velocitatem maximam H acquiret quâcum potest in aquâ descendere. (s) Est igitur tempus G 0″,15244. Et hoc tempore G, cum velocitate illâ maximâ H, globus describet spatium 2 F digitorum 4,4256; (t) ideoque tempore minutorum quatuor secundorum describet spatium digitorum 116,1245. (u) Subducatur spatium 1,3862944 F seu 3,0676 *dig.* & manebit spatium 113,0569 digitorum quod globus cadendo in aquâ, in vase amplissimo, tempore minutorum quatuor secundorum describet. Hoc spatium, ob angustiam vasis lignei prædicti, (x) minui debet in ratione quæ com-

accuratius digitorum $181\frac{1}{8}$ quam proximè (471. *lib.* 1.); & quia pes Londinensis pede Parisiensi minor est in ratione 15 ad 16, erit spatium illud digitorum Londinensium $193\frac{11}{45}$, seu fere $193\frac{1}{4}$. Hoc spatium augeri paululum debet ob pondus in aëre oscillantis diminutum, & ideo poni potest digit. Lond. $193\frac{1}{3}$ quam proximè.

(q) * *Describet digitos* 95, 219. Nam vires uniformes sunt ut spatia quæ corpus viribus illis agitatum dato tempore describit (179); & propterea $156\frac{13}{38}$ est ad 77 ut $193\frac{1}{3}$ dig. ad spatium quod globus vi ponderis granorum 77 tempore minuti unius secundi sine resistentia cadendo describit; unde spatium hoc prodet 95,219 digit. quam proximè.

(r) * *Et tempore G, quod sit &c.* Spatia quæ corpus vi ponderis sui comparativi 77 gran. sine resistentiâ cadendo describit, sunt in duplicatâ ratione temporum quibus describuntur (27. lib. 1.). Ergo tempus G, quo corpus vi ponderis sui comparativi sine resistentiâ cadendo describit spatium F (*per prop.* XL.), est ad minutum unum secundum in subduplicatâ ratione spatii F seu 2,2128 dig. ad 95,219 digit.

(s) 290. * *Est igitur tempus G 0″, 15244.* Si juxta notam 286, multiplicetur hæc fractio per numerum 5, productum erit 0″,7622 seu 46‴ ferè. Quare globus, cujus diameter est 0,84224 partium digiti & pondus in aëre $156\frac{1}{4}$ gran., in aqua cadendo tempore 46‴ describet spatium 29 dig. circiter & maximam suam velocitatem acquirere atque postea uniformi velocitate descendere videbitur (286).

(t) * *Ideoque tempore minutorum quatuor secundorum &c.* Sunt enim tempora ut spatia velocitate uniformi H descripta, & 0″,15244 est ad 4″ ut 4,4256 ad 116,1245 ferè.

(u) * *Subducatur spatium &c.* Tempus P est minutorum secundorum quatuor, & ut G ad P ita est 2 F ad digitos 116,1245 $= \frac{2\,PF}{G}$, Sed (*per prop.* XL) spatium quod globus in aqua cadendo tempore P describit, est $\frac{2\,PF}{G} - 1,3862944\ F$, neglecto, scilicet, termino 4,6051701 6 L. F, qui ob parvitatem hic potest tutò contemni.

(x) 291. * *Minus debet in ratione &c.* Globi datâ velocitate moti resistentia in vase amplissimo sit r, in vase angustiore R, hujus vasis orificium æquale sit circulo c, cir-

componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi, id eſt, in ratione 1 ad 0,9914. Quo facto, habebitur ſpatium 112,08 digitorum, quod globus cadendo in aquâ in hoc vaſe ligneo tempore minutorum quatuor ſecundorum per theoriam deſcribere debuit quamproximè. Deſcripſit verò digitos 112 per experimentum.

Exper. 2. Tres globi æquales, quorum pondera ſeorſim erant $76\frac{1}{3}$ granorum in aere & $5\frac{1}{16}$ granorum in aquâ, ſucceſſivè demittebantur, & unuſquiſque cecidit in aquâ tempore minutorum ſecundorum quindecim, caſu ſuo deſcribens altitudinem digitorum 112.

Com-

circulus globi maximus ſit m, denſitas globi δ, denſitas fluidi d; vis uniformis quâ totus globi motus, quo tempore octo tertias partes diametri ſuæ uniformiter deſcriberet tolli poſſit vel generari, ſit p. Et (*per prop.* XXXVIII.) erit $p : r = \delta : d$; & (*per prop.* XXXIX.) $R : p = dc s : \delta [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$; & propterea, conjunctis his rationibus, $R : r = c s : [c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$. Datâ igitur velocitate globi, reſiſtentia in vaſe ampliſſimo eſt ad reſiſtentiam in vaſe anguſtiore in datâ ratione $[c - \frac{1}{2} m] \times [c - m]^2$ ad $c s$. Brevitatis causâ ponatur r ad R ut 1 ad n. Quando velocitas in vaſe ampliſſimo maxima eſt, ſeu H, reſiſtentia æqualis eſt ponderi B globi in aqua, & F eſt ſpatium quod globus tempore G vi ponderis B ſine reſiſtentia cadendo deſcribit ut velocitatem illam H acquirat. Sit h velocitas maxima globi in vaſe anguſtiore, quam cum acquiſivit, reſiſtentia ejus æqualis eſt ponderi B; & cum reſiſtentia globi in vaſe anguſtiore æqualis ſit $n B$ ubi velocitas ejus eſt H (ex demonſtratis), & reſiſtentiæ ſint ut quadrata velocitatum, erit $HH : hh = nB : B = n : 1$, ideoque $H : h = \sqrt{n} : 1$. Sit g tempus quo globus pondere B ſine reſiſtentiâ cadendo acquirit velocitatem h, & f ſpatium quod eodem tempore deſcribit; & erit $H : h = \frac{F}{g} : \frac{f}{g}$, 291.
ac proinde $\frac{F}{G} : \frac{f}{g} \sqrt{n} : 1$. Porro ſpatia in vaſe ampliſſimo tempore P, quod ſatis magnam habet rationem ad tempus G, cadendo deſcripta, ſunt quam proximè ut $\frac{2PF}{G}$, ſeu ut ſpatia eodem tempore motu maximo deſcripta, ut ex prop. XL. & ex tabulâ huic ſcholio præfixâ patet; & ſimiliter ſpatium eodem tempore P in vaſe anguſtiore deſcriptum erit etiam ut $\frac{2Pf}{g}$ ferè. Quare cum ſit $\frac{2PF}{G}$ ad $\frac{2Pf}{g}$ ut $\frac{F}{G}$ ad $\frac{f}{g}$, id eſt (ex demonſtr.) ut $\sqrt{n}$ ad 1; ſpatium tempore P in vaſe ampliſſimo deſcriptum erit ad ſpatium eodem tempore in vaſe anguſtiore deſcriptum, ut $\sqrt{n}$ ad 1, id eſt, ut $c^{\frac{1}{2}}$ ad $[c - m] \times [c - \frac{1}{2} m]^{\frac{1}{2}}$, aut quod idem eſt, in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis c ad exceſſum $c - \frac{1}{2} m$ orificii hujus ſupra ſemicirculum maximum globi, & ex ſimplici ratione orificii ejuſdem c ad exceſſum ejus $c - m$, ſupra circulum maximum globi.

 Sed

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VII. PROP. XL. PROBL. IX.

Computum (y) ineundo prodeunt pondus globi in vacuo $76\frac{5}{12}$ *gran.* excessus hujus ponderis supra pondus in aquâ $71\frac{17}{48}$ *gran.* diameter globi 0,81296 *dig.* octo tertiæ partes hujus diametri 2,16789 *dig.* spatium 2 F 2,3217 *dig.* spatium quod globus pondere $5\frac{1}{16}$ *gran.* tempore 1″ sine resistentiâ cadendo describat 12,808 *dig.* & tempus G 0″,301056. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum potest in aquâ vi ponderis $5\frac{1}{16}$ *gran.* descendere, tempore 0″,301056 describet spatium 2,3217. *dig.* & tempore 15″ spatium 115,678 *dig.* Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,609 *dig.* & manebit spatium 114,069 *dig.* quod proinde globus eodem tempore in vase latissimo cadendo describere debet. Propter angustiam vasis nostri detrahi debet spatium 0,895 *dig.* circiter. Et sic manebit spatium 113,174 *dig.* quod globus cadendo in hoc vase, tempore 15″ describere debuit per theoriam quamproximè. Descripsit veros digitos 112 per experimentum. Differentia est insensibilis.

Exper. 3. Globi tres æquales, quorum pondera seorsim erant 121 *gran.* in aere & 1 *gran.* in aquâ, successive demittebantur; & cadebant in aqua temporibus 46″, 47″, & 50″, describentes altitudinem digitorum 112.

Per theoriam (z) hi globi cadere debuerunt tempore 40″ cir-

Sed vasis orificium c est 81 digitorum (ex dictis initio scholii hujus), & circuli m diameter inventa est 0,84224 partium digiti, ideoque si dicatur ut 7 ad 11 ita 0,84224 digit. ad semiperipheriam circuli m, hæc invenietur digit. 1,32352, & hinc circulus m prodit 0,5573 partium digiti quadrati circiter; ex quibus habetur

$$\frac{c}{c-m} = 1,0069, \ \& \ \frac{c^{\frac{1}{2}}}{[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,0017, \text{ac}$$

$$\text{proinde } \frac{c^{\frac{3}{2}}}{[c-m]\times[c-\frac{1}{2}m]^{\frac{1}{2}}} = 1,00861.$$

Quare spatium in vase amplissimo descriptum digit. 113,0569 est ad spatium in vase angustiore eodem tempore minutorum quatuor secundorum descriptum, ut 1,00861 ad 1, seu ut 1 ad 0,9914 ferè; unde hoc spatium prodit 111,08 digit.

(y) * *Computum ineundo &c.* Calculo experimenti primi fusè exposito, nulla superest difficultas in computo simili experimenti hujus.

(z) * *Per theoriam hi globi cadere debuerunt tempore 40″ circiter.* Cum pondus globi sit 121 granorum in aëre, & 1 grani in aqua, erit pondus æqualis globi aquæ granorum 120; & ideo pondus globi in vacuo gran. $121\frac{120}{860}$ seu $121\frac{6}{43}$ (287). Excessus hujus ponderis supra pondus globi

circiter. Quod tardius ceciderunt, utrum minori proportioni resistentiæ quæ à vi inertiæ in tardis motibus oritur, ad resistentiam quæ oritur ab aliis causis tribuendum sit; an potius bullulis nonnullis globo adhærentibus, vel rarefactioni ceræ ad calorem vel tempestatis vel manus globum demittentis, vel etiam erroribus insensibilibus in ponderandis globis in aquâ, incertum esse puto. Ideoque pondus globi in aquâ debet esse plurium granorum, ut experimentum certum & fide dignum reddatur.

Exper. 4. Experimenta hactenus descripta cœpi, ut investigarem resistentias fluidorum, antequam theoria in propositionibus proximè præcedentibus exposita mihi innotesceret. Postea, ut theoriam inventam examinarem, paravi vas ligneum latitudine internâ digitorum $8\frac{2}{3}$, profunditate pedum quindecim cum triente. Deinde ex cerâ & plumbo incluso globos quatuor formavi, singulos pondere $139\frac{1}{4}$ granorum in aere & $7\frac{1}{8}$ granorum in aquâ. Et hos demisi ut tempora cadendi in aqua per pendulum, ad semi-minuta secunda oscillans, mensurarem. Globi, ubi ponderabantur & postea cadebant, frigidi erant & aliquamdiu frigidi manserant; quia calor ceram rarefacit, & per rarefactionem diminuit pondus globi in aqua. & cera rarefacta non statim ad densitatem pristinam per frigus reducitur. Antequam caderent, immergebantur penitus in aquam; ne ponderе partis alicujus ex aquâ extantis descensus eorum sub initio accelararetur. Et ubi penitus immersi quiescebant, demittebantur quam cautissimè, ne impulsum aliquem à manu demittente acci-

bi in aqua est gran. $120\frac{6}{43}$. Unde prodeunt globi diameter 0,9671 partium digiti, spatium 2 F 2,6004 digitorum, spatium quod globus pondere 1 grani sine resistentia cadendo tempore minuti unius secundi describit digit. 15,5959, & tempus G 0″,9026. Hoc tempore globus cum velocitate maximâ *H* uniformiter progrediendo describet spatium 2 F seu 2,6004 dig. & tempore 40″ describet spatium 115,2404 dig. Subducatur spatium 1,3862944 F seu 1,8024 dig., & manebit spatium 113,438 dig. quod globus cadendo in aqua in vase amplissimo tempore 40″ describeret; & hoc spatium, propter angustiam vasis aliquantulum minui debet, nimirum in ratione 10049 ad 10025 circiter. Globi igitur per theoriam spatium 112 digitorum cadendo describere debuerunt tempore 40″ circiter. 291

acciperent. Ceciderunt autem succeſſivè temporibus oſcillationum $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51, deſcribentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum. Sed tempeſtas jam paulo frigidior erat quàm cum globi ponderabantur, ideoque iteravi experimentum alio die, & globi ceciderunt temporibus oſcillationum 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53, ac tertio temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53. Experimento ſæpius capto, globi ceciderunt maximâ ex parte temporibus oſcillationum $49\frac{1}{2}$ & 50. Ubi tardius cecidere, ſuſpicor eoſdem retardatos fuiſſe impingendo in latera vaſis.

Jam computum per theoriam ineundo, prodeunt pondus globi in vacuo $139\frac{2}{5}$ granorum. Exceſſus hujus ponderis ſupra pondus globi in aquâ $132\frac{11}{40}$ *gran.* Diameter globi 0,99868 *dig.* Octo tertiæ partes diametri 2,66315 *dig.* Spatium 2 F 2,8066 *dig.* Spatium quod globus pondere $7\frac{1}{8}$ granorum, tempore minuti unius ſecundi, ſine reſiſtentiâ cadendo deſcribit 9,88164 *dig.* Et tempus G 0″,376843. Globus igitur, velocitate maximâ quâcum poteſt in aquâ vi ponderis $7\frac{1}{8}$ granorum deſcendere, tempore 0″,376843 deſcribit ſpatium 2,8066 digitorum, & tempore 1″ ſpatium 7,44766 digitorum, & tempore 25″ ſeu oſcillationum 50 ſpatium 186,1915 *dig.* Subducatur ſpatium 1,386294 F, ſeu 1,9454 *dig.* & manebit ſpatium 184,2461 *dig.* quod globus eodem tempore in vaſe latiſſimo deſcribet. Ob anguſtiam vaſis noſtri, minuatur hoc ſpatium in ratione quæ componitur ex ſubduplicatâ ratione orificii vaſis ad exceſſum hujus orificii ſupra ſemicirculum maximum globi, & ſimplici ratione eiuſdem orificii ad exceſſum ejus ſupra circulum maximum globi; & habebitur ſpatium 181,86 digitorum, quod globus in hoc vaſe tempore oſcillationum 50 deſcribere debuit per theoriam quamproximè. Deſcripſit verò ſpatium 182 digitorum tempore oſcillationum $49\frac{3}{4}$ vel 50 per experimentum.

Exper. 5. Globi quatuor pondere $154\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $21\frac{1}{2}$ *gran.* in aquâ ſæpe demiſſi, cadebant tempore oſcillationum $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30, & nonnunquam 31, 32 &

33,

33, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 29 quamproximè.

Exper. 6. Globi quinque pondere $212\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $79\frac{1}{2}$ in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18, describentes altitudinem pedum quindecim & digitorum duorum.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 15 quamproximè.

Exper. 7. Globi quatuor pondere $293\frac{3}{8}$ *gran.* in aere & $35\frac{7}{8}$ *gran.* in aquâ sæpe demissi, cadebant tempore oscillationum $29\frac{1}{2}$ 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33, describentes altitudinem pedum quindecim & digiti unius cum semisse.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 28 quamproximè.

Causam investigando cur globorum, ejusdem ponderis & magnitudinis, aliqui citius alii tardius caderent, in hanc incidi; quod globi ubi primum demittebantur & cadere incipiebant, oscillarent circum centra, latere illo quod forte gravius esset primum descendente, & motum oscillatorium generante. Nam per oscillationes suas globus majorem motum communicat aquæ, quam si sine oscillationibus descenderet; & communicando, amittit partem motûs proprii quo descendere deberet: & pro majore vel minore oscillatione, magis vel minus retardatur. Quinetiam globus recidit semper à latere suo quod per oscillationem descendit, & recedendo appropinquat lateribus vasis & in latera nonnunquam impingitur. Et hæc oscillatio in globis gravioribus fortior est, in majoribus aquam magis agitat. Quapropter, ut oscillatio globorum minor redderetur, globos novos ex cerâ & plumbo construxi, infigendo plumbum in latus aliquod globi prope superficiem ejus; & globum ita demisi, ut latus gravius, quoad fieri potuit, esset infimum ab initio descensus. Sic oscillationes factæ sunt multo minores

nores quam prius, & globi temporibus minus inæqualibus ceciderunt, ut in experimentis sequentibus.

Exper. 8. Globi quatuor, pondere granorum 139 in aere & $6\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non plurium quam 52, non pauciorum quam 50, & maximâ ex parte tempore oscillationum 51 circiter, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum 52 circiter.

Exper. 9. Globi quatuor, pondere granorum $273\frac{3}{4}$ in aere & $140\frac{3}{4}$ in aquâ, sæpius demissi, ceciderunt temporibus oscillationum non pauciorum quam 12, non plurium quam 13, describentes altitudinem digitorum 182.

Per theoriam verò hi globi cadere debuerunt tempore oscillationum $11\frac{1}{3}$ quamproximè.

Exper. 10. Globi quatuor, pondere granorum 384 in aere & $119\frac{1}{2}$ in aquâ, sæpe demissi, cadebant temporibus oscillationum $17\frac{1}{2}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19, describentes altitudinem *digitorum* $181\frac{1}{4}$ Et ubi ceciderunt tempore oscillationum 19, nonnunquam audivi impulsum eorum in latera vasis antequam ad fundum pervenerunt.

Per theoriam verò cadere debuerunt tempore oscillationum $15\frac{5}{9}$ quamproximè.

Exper. 11. Globi tres æquales, pondere granorum 48 in aere & $3\frac{29}{32}$ in aquâ sæpe demissi, ceciderunt temporibus oscillationum $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46, & maximâ ex parte 44 & 45, describentes altitudinem digitorum $182\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $46\frac{5}{9}$ circiter.

Exper. 12. Globi tres æquales, pondere granorum 141 in aere & $4\frac{3}{8}$ in aquâ, aliquoties demissi, ceciderunt temporibus oscillationum 61, 62, 63, 64, & 65, describentes altitudinem digitorum 182.

Et per theoriam cadere debuerunt tempore oscillationum $64\frac{1}{2}$ quamproximè.

Per

Per hæc experimenta manifestum est quod, ubi globi tardè ceciderunt, ut in experimentis secundis, quartis, quintis, octavis, undecimis ac duodecimis, tempora cadendi rectè exhibentur per theoriam, at ubi globi velocius ceciderunt, ut in experimentis sextis, nonis ac decimis, (a) resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis. Nam globi inter cadendum oscillant aliquantulum: & hæc oscillatio in globis levioribus & tardius cadentibus, ob motûs languorem citò cessat; in gravioribus autem & majoribus, ob motûs fortitudinem diutius durat, & non nisi post plures oscillationes ab aquâ ambiente cohiberi potest. Quinetiam globi, quo velociores sunt, eo minus premuntur à fluido ad posticas suas partes; & si velocitas perpetuo augeatur, spatium vacuum tandem à tergo relinquent, (b) nisi compressio fluidi simul augeatur. Debet autem compressio fluidi (*per prop.* XXXII. & XXXIII.) (c) augeri in duplicatâ ratione velocitatis, ut resistentia sit in eâdem duplicatâ ratione. Quoniam hoc non fit, globi velociores paulò minus premuntur à tergo, & defectu pressionis hujus, resistentia eorum fit paulo major quàm in duplicatâ ratione velocitatis.

Congruit igitur theoria cum phænomenis corporum cadentium in aquâ, reliquum est ut examinemus phænomena cadentium in aere.

Exper. 13. A culmine ecclesiæ Sancti *Pauli*, in urbe *Londini*, mense Junio 1710 globi duo vitrei simul demittebantur, unus

(a) * *Resistentia paulo major extitit quam in duplicatâ ratione velocitatis.* Si enim resistentia accuratè esset in duplicatâ velocitatis ratione, tempora cadendi tam per experimenta quam per theoriam definita, æquarentur; At si resistentia major quam in duplicatâ ratione velocitatis, tempora quibus corpus cadendo datum spatium describit, majora esse debent in experimentis quam in theoriâ, quæ minorem resistentiam supponit.

(b) * *Nisi compressio fluidi simul augeatur.* Tanta enim esse potest globi velocitas, ut fluidum ad posticas illius partes satis citò recurrere & locum à globo relictum statim occupare nequeat, nisi fluidi compressio augeatur, ut per fluidum pressio & motus celerius propagentur.

(c) * *Augeri in duplicatâ ratione velocitatis &c.* Nam partes fluidi per compressionem in se mutuo agunt & reagunt; & si vires quibus fluidi particulæ se mutuò agitant, augeantur in duplicatâ ratione velocitatis, resistentia est in eâdem ratione duplicatâ, *per cor.* 2. *prop.* XXXIII.

291.

unus argenti vivi plenus, alter aeris; & cadendo describebant altitudinem pedum *Londinensium* 220. Tabula lignea ad unum ejus terminum polis ferreis suspendebatur, ad alterum pessulo ligneo incumbebat; & globi duo huic tabulæ impositi simul demittebantur, subtrahendo pessulum ope fili ferrei ad terram usque demissi ut tabula polis ferreis solummodo innixa super iisdem devolveretur, & eodem temporis momento pendulum ad minuta secunda oscillans, per filum illud ferreum tractum demitteretur & oscillare inciperet. Diametri & pondera globorum ac tempora cadendi exhibentur in (d) tabulâ sequente.

Globorum mercurio plenorum			*Globorum aere plenorum.*		
Pondera	*Diametri*	*Tempora cadendi.*	*Pondera*	*Diametri*	*Tempora cadendi.*
908 *gran.*	0,8 *digit.*	4″	510 *gran.*	5,1 *digit.*	8″ ½
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8¼
808	0,75	4	483	5,0	8½
784	0,75	4+	641	5,2	8

Cæterum tempora observata corrigi debent. Nam globi mercuriales (per theoriam *Galilæi*) minutis quatuer secundis (e) describent pedes *Londinenses* 257, & pedes 220 minutis tantum

3″

(d) * *In tabulâ* sequente 4 — significat tempus cadendi minutis quatuor secundis paulo minus fuisse, & 4 + tempus minutis quatuor secundis paulo majus indicat,

(e) * *Describent pedes Londinenses &c.* Quoniam densitas mercurii est ad densitatem aëris ut 11890 ad 1 circiter, parùm admodum minuitur mercurii pondus in aere, & ideo globi mercurio pleni eâdem ferè celeritate in aëre & in vacuo per breve tempus descendunt; sed gravia omnia in vacuo cadentia tempore minuti unius secundi describunt pedis Londinensis digitos 193 ⅓ (289), & spatia descripta sunt in duplicatâ ratione temporum (27. *lib.* 1. Quare ut 1 ad 16 ita 193 ⅓ dig. ad spatium quod globus mercurio plenus tempore 4″ cadendo describit, quod proinde erit 3093 dig. seu 257 pedum Londinensium circiter. Simili modo, cum sit

3″.

3″ 42‴. Tabula lignea utique, detracto pessulo, tardius devolvebatur quam par erat, & tardâ suâ devolutione impediebat descensum globorum sub initio. Nam globi incumbebant tabulæ prope medium ejus, & paulò quidem propiores erant axi ejus quam pessulo. Et hinc tempora cadendi prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter, & jam corrigi debent detrahendo illa minuta, præsertim in globis majoribus qui tabulæ devolventi paulo diutius incumbebant propter magnitudinem diametrorum. Quo facto tempora, quibus globi sex majores cecidêre, evadent 8″ 12‴, 7″ 42‴, 7″ 42‴, 7″ 57‴, 8″ 12‴, & 7″ 42‴.

Globorum igitur aere plenorum quintus, diametro digitorum quinque pondere granorum 483 constructus, cecidit tempore 8″ 12‴, describendo altitudinem pedum 220. (f) Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum; & pondus aeris eidem æqualis est $\frac{16600}{860}$ *gran.* seu $19\frac{3}{10}$ *gran.* ideoque pondus globi in vacuo est $502\frac{3}{10}$ *gran.* & hoc pondus est ad pondus aeris globo æqualis, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$, & ita sunt 2 F ad octo tertias partes diametri globi, id est, ad $13\frac{1}{3}$ digitos. Unde 2 F prodeunt 28 *ped.* 11 *dig.* Globus cadendo in vacuo, toto suo pondere $502\frac{3}{10}$ granorum, tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$ ut supra, & pondere 483 *gran.* describit digitos 185,905, &

3″. 42‴ — 3″.7, erit 1 ad 13. 69 ut $19\frac{1}{3}$ dig. ad spatium tempore 3″. 42‴ descriptum quod prodit ped. Lond. 220 circiter. Sed globi mercurio pleni spatium hoc 220 ped. tempore 4″ describunt in experimentis, & differentia temporum 4″ & 3″.42‴. est 18‴. Tempora igitur prorogata fuerunt minutis tertiis octodecim circiter.

(f) * *Pondus aquæ huic globo æqualis est 16600 granorum.* Globus aqueus, cujus diameter est unius digiti continet grana 132,8 (287), & globorum homogeneorum, pondera sunt ut diametrorum cubi, & propterea ut 1 ad 125 ita sunt 132,8 grana ad pondus globi aquei cujus diameter est digitorum 5, quod proinde pondus est gran. 16600. Globorum æqualium pondera sunt ut illorum densitates, & densitas aquæ est ad densitatem aeris ut 860 ad 1. Quare pondus globi aëris diame- 291.
tro digitorum 5 descripti est $\frac{16600}{860}$ seu $19\frac{3}{10}$ gran. quam proximè. Hinc pondus globi vitrei aëre pleni in vacuo est gran. $483 + 19\frac{3}{10}$ seu gran. $502\frac{3}{10}$, & hoc pondus est ad pondus aëris globo æqualis, id est, densitas globi, si homogeneus fingatur, ad densitatem aëris, ut $502\frac{3}{10}$ ad $19\frac{3}{10}$ *& ita sunt* 2 F *&c.*, cætera patent ut in superioribus calculis.

& eodem pondere 483 *gran.* etiam in vacuo describit spatium F seu 14 *ped.* $5\frac{1}{2}$ *dig.* (g) tempore $57'''$ $58''''$, & velocitatem maximam acquirit quâcum possit in aere descendere. Hâc velocitate globus, tempore $8''$ $12'''$, describet spatium pedum 245 & digitorum $5\frac{1}{3}$. Aufer 1,3863 F seu 20 *ped.* $0\frac{1}{2}$ *dig.* & manebunt 225 *ped.* 5 *dig.* Hoc spatium igitur globus tempore $8''$ $12'''$, cadendo describere debuit per theoriam. Descripsit verò spatium 202 pedum per experimentum. Differentia insensibilis est.

Similibus computis ad reliquos etiam globos aere plenos applicatis, confeci tabulam sequentem.

Globorum pondera.	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudine pedum 220.*		*Spatia describenda per theoriam.*		*Excessus.*	
510 *gran.*	5,1 *dig.*	$8''$	$12'''$	226 *ped.*	11 *dig.*	6 *ped.*	11 *dig.*
642	5,2	7	42	230	9	10	9
599	5,1	7	42	227	10	7	10
515	5	7	57	224	5	4	5
483	5	8	12	225	5	5	5
641	5,2	7	42	230	7	10	7

Exper. 14. Anno 1719. mense Julio, D. *Desaguliers* hujusmodi experimenta iterum cepit, formando vesicas porcorum in orbem sphæricum ope sphæræ ligneæ concavæ ambientis, quam madefactæ implere cogebantur inflando aerem; & hasce arefactas & exemptas demittendo ab altiore loco in templi ejusdem turri rotunda fornicata, nempe ab altitudine pedum 272; & eodem temporis momento demittendo etiam glo-

(g) 291. * *Tempore* $57'''$ $58''''$. Hoc tempus, quod ante dictum est G, ducatur in numerum 5, & productum erit fere $5''$; & propterea (186) globus cujus diameter est 5 digit. & pondus in aëre gran. 483, tempore minutorum secundorum quinque describet spatium 124 pedum circiter, & deinde videbitur uniformiter descendere.

globum plumbeum cujus pondus erat duarum librarum Romanarum circiter. Et interea aliqui ſtantes in ſupremâ parte templi, ubi globi demittebantur, notabant tempora tota cadendi, & alii ſtantes in terrâ notabant differentiam temporum inter caſum globi plumbei & caſum veſicæ. Tempora autem menſurabantur pendulis ad dimidia minuta ſecunda oſcillantibus. Et eorum qui in terrâ ſtabant unus habebat horologium cum elatere ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante; alius habebat machinam aliam affabrè conſtructam cum pendulo etiam ad ſingula minuta ſecunda quater vibrante. Et ſimilem machinam habebat unus eorum qui ſtabant in ſummitate templi. Et hæc inſtrumenta ita formabantur, ut motus eorum pro lubitu vel inciperent vel ſiſterentur. Globus autem plumbeus cadebat tempore minutorum ſecundorum quatuor cum quadrante circiter. Et addendo hoc tempus ad prædictam temporis differentiam, colligebatur tempus totum quo veſica cecidit. Tempora, quibus veſicæ quinque poſt caſum globi plumbei primâ vice ceciderunt, erant $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}'''$, $17\frac{3}{4}''$, & $16\frac{7}{8}''$, & ſecundâ vice $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{3}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{8}''$. Addantur $4\frac{1}{4}''$, tempus utique quo globus plumbeus cecidit, & tempora tota quibus veſicæ quinque ceciderunt, erant primâ vice $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$, & $21\frac{1}{8}''$; & ſecundâ vice, $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$, & $21''$. Tempora autem in ſummitate templi notata, erant primâ vice $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$, & $21\frac{5}{8}''$; & ſecundâ vice $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$, & $21\frac{1}{4}''$. Cæterum veſicæ non ſemper rectâ cadebant, ſed nonnunquam volitabant, & hinc inde oſcillabantur inter cadendum. Et his motibus tempora cadendi prorogata ſunt & aucta nonnunquam dimidio minuti unius ſecundi, nonnunquam minuto ſecundo toto. Cadebant autem rectius veſica ſecunda & quarta primâ vice; & prima ac tertia ſecundâ vice. Veſica quinta rugoſa erat & per rugas ſuas nonnihil retardabatur. Diametros veſicarum deducebam ex earum circumferentiis filo tenuiſſimo bis circundato menſuratis. Et theoriam contuli cum experimentis in tabulâ ſequente, aſſumendo denſitatem

tem

tem aeris esse ad densitatem aquæ pluvialis ut 1 ad 860, & computando spatia quæ globi per theoriam describere (h) debuerunt cadendo.

Vesicarum pondera	*Diametri.*	*Tempora cadendi ab altitudin. pedum 272.*	*Spatia iisdem temporibus describenda per theoriam.*		*Differentia inter theor. & exper.*	
123 *gran*	5,28 *dig.*	19″	271 *ped.*	11 *dig*	— 0 *ped.*	1 *dig.*
156	5,19	17	272	$0\frac{1}{2}$	+ 0	$0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272	7	+ 0	7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277	4	+ 5	4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282	0	+ 10	0

Globorum igitur tam in aere quàm in aquâ motorum resistentia prope omnis per theoriam nostram recte exhibetur, ac densitati fluidorum, paribus globorum velocitatibus ac magnitudinibus, proportionalis est.

In scholio, quod sectioni sextæ subjunctum est, ostendimus per experimenta pendulorum quod globorum æqualium & æquivelocium in aere, aquâ, & argento vivo motorum resistentiæ sunt ut fluidorum densitates. (i) Idem hic ostendimus magis ac-

(h) * *Describere debuerunt cadendo.* Exempli causâ calculum tentabimus experimenti cum tertia vesica facti. Hujus vesicæ diameter erat 5.3 digitorum & pondus in aëre granorum 137, 5. Globus aëris diametro digitorum 5.3 descriptus continet 23 grana quam proxime; unde vesicæ pondus in vacuo erat gran. 160,5, & ut 23 ad 160, 5 ita sunt octo tertiæ partes diametri vesicæ seu digiti $14\frac{2}{15}$ ad spatium 2 *F*, quod ita prodit digit. 98,626. Vesica cadendo in vacuo toto suo pondere 160,5 gran. tempore minuti unius secundi describit digitos $193\frac{1}{3}$, & pondere 137,5 gran. describit digitos 165,628, & eodem pondere 137,5 gran. etiam in vacuo describit spatium *F* digitorum 49,313 tempore 0″,5456 & velocitatem maximam acquirit cum quâ possit in aëre descendere. Hâc velocitate vesica tempore minutorum secundorum $18\frac{1}{2}$ describet spatium 277 ped. & 8. digit. circiter. Subducatur spatium 1,3863 *F* seu 5. ped. & 8 digit., & manebunt 272 pedes; cùm in tabula accuratiore calculo confecta spatium per theoriam describendum sit 272 ped. & 7 digit., & in experimento sit 272 ped.

(i) * *Idem hic ostendimus &c.* Nam theoria experimentis confirmata, cui superiore computationes nituntur, supponit resistentiam, cæteris paribus, esse in ratione compositâ ex ratione duplicatâ velocitatis mobilis & ratione simplici densitatis fluidi.

accuratè per experimenta corporum cadentium in aëre & aquâ. Nam pendula singulis oscillationibus motum cient in fluido motui penduli redeuntis semper contrarium, & resistentia ab hoc motu oriunda, ut & resistentia fili quo pendulum suspendebatur, totam penduli resistentiam majorem reddiderunt quàm resistentia quæ per experimenta corporum cadentium prodiit. Etenim per experimenta pendulorum in scholio illo exposita, globus ejusdem densitatis cum aquâ, describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, amittere deberet motûs sui partem $\frac{1}{3342}$. At per theoriam in hac septimâ sectione expositam & experimentis cadentium confirmatam, globus idem describendo longitudinem eandem, (k) amittere deberet motûs sui partem tantum $\frac{1}{4586}$, posito quod densitas aquæ sit ad densitatem aëris ut 860 ad 1. Resistentiæ igitur per experimenta pendulorum majores prodiere (ob causas jam descriptas) quàm per experimenta globorum cadentium, idque in ratione 4 ad 3 circiter. Attamen cûm pendulorum in aëre, aquâ & argento vivo oscillantium resistentiæ à causis similibus similiter augeantur, proportio resistentiarum in his mediis, tam per experimenta pendulorum, quàm per experimenta corporum cadentium, satis rectè exhibebitur. Et inde concludi potest quod corporum in fluidis quibuscunque fluidissimis motorum resistentiæ, cæteris paribus, sunt ut densitates fluidorum.

His

(k) * *Amittere deberet motûs sui partem tantùm* $\frac{1}{4586}$. Sit D diameter globi V ejus velocitas sub initio motus in fluido, $2F$ spatium quod sit ad $\frac{8}{3}D$ ut densitas globi ad densitatem aëris, hoc est, ut 860 ad 1, ideoque $2F = \frac{6880}{3}D$; sit T tempus quo globus cum velocitate V uniformiter progrediendo describit spatium $2F$, & t tempus quo eâdem uniformi velocitate describit spatium $\frac{1}{2}D$; & erit $t : T = \frac{1}{2}D : \frac{6880}{3}D = 3 : 13760$, & inde $t : T + t = 3 : 13763$, ideoque $\frac{t}{T+t} = \frac{3}{13763} = \frac{1}{4586}$ quam proximè. Est autem $\frac{tV}{T+t}$ velocitatis V pars amissa tempore t (*per cor. 3 prop. 28*). Globus igitur describendo longitudinem semidiametri suæ in aëre, per theoriam in hac septimâ sectione expositam amittere debet motûs sui partem $\frac{1}{4586}$.

(l) His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocunque projectus, dato tempore amittet quamproximè. Sit D diameter globi, & V velocitas ejus sub initio motus, & T tempus, quo globus velocitate V in vacuo describet spatium, quod sit ad spatium $\frac{8}{3}$ D ut densitas globi ad densitatem fluidi: & globus in fluido illo projectus, tempore quovis alio t amittet velocitatis suæ partem $\frac{tV}{T+t}$, manente parte $\frac{TV}{T+t}$, & describet spatium, quod sit ad spatium uniformi velocitate V eodem tempore descriptum in vacuo, ut logarithmus numeri $\frac{T+t}{T}$ multiplicatus per numerum 2,302585093 est ad numerum $\frac{t}{T}$, *per corol.* VII. *prop.* XXXV. In motibus tardis resistentia potest esse paulò minor, (m) propterea quod figura globi paulò aptior sit ad motum quàm figura cylindri eâdem diametro descripti. *In* motibus velocibus resistentia potest esse paulò major, propterea quod elasticitas & compressio fluidi non (n) augeantur in duplicatâ ratione velocitatis. Sed hujusmodi minutias hic non expendo.

Et quamvis aër, aqua, argentum vivum & similia fluida; per divisionem partium in infinitum, subtiliarentur & fierent media infinitè fluida; tamen globis projectis haud minus resisterent. Nam resistentia, de quâ agitur in propositionibus præcedentibus, oritur ab inertiâ materiæ; & inertia materiæ cor-

(l) * *His ita stabilitis, dicere jam licet quamnam motûs sui partem globus quilibet, in fluido quocumque projectus* & solâ vi insitâ motus, *dato tempore amittet quam proximè*; theoriam enim cum experimentis consentire vidimus tum in fluidis elasticis, quale est aër, tum in fluidis non elasticis, quale est aqua. Quæ sequuntur, manifesta sunt per notam ad cor. 3. prop. XXXVIII. (282).

(m) * *Propterea quod figura globi paulo aptior sit ad motum &c.* Nam in Lemmate VII. lib. II. & in sequentibus propositionibus suppositum est, globi & cylindri, quorum eadem est diameter, æqualem esse resistentiam.

(n) * *Non augeantur in duplicatâ ratione velocitatis*, in quâ tamen augeri deberent, uti expositum est in experimento 12.

corporibus essentialis est & quantitati materiæ semper proportionalis. Per divisionem partium fluidi, resistentia quæ oritur à tenacitate & frictione partium diminui quidem potest: sed quantitas materiæ per divisionem partium ejus non diminuitur; & manente quantitate materiæ, manet ejus vis inertiæ, cui resistentia, de quâ hic agitur, semper proportionalis est. Ut hæc resistentia diminuatur, diminui debet quantitas materiæ in spatiis per quæ corpora moventur. Et propterea spatia cœlestia, per quæ globi planetarum & cometarum in omnes partes liberrimè & sine omni motus diminutione sensibili perpetuo moventur, fluido omni corporeo destituuntur, si forte vapores longe tenuissimos & trajectos lucis radios excipias.

Projectilia utique motum cient in fluidis progrediendo, & hic motus oritur ab excessu pressionis fluidi ad projectilis partes anticas supra pressionem ad ejus partes posticas, & non minor esse potest in mediis infinite fluidis quam in aere, aquâ & argento vivo pro densitate materiæ in singulis. Hic autem pressionis excessus, pro quantitate suâ, non tantum motum ciet in fluido, sed (o) etiam agit in projectile ad motum ejus retardandum: & propterea resistentia in omni fluido est ut motus in fluido à projectili excitatus, nec minor esse potest in æthere subtilissimo pro densitate ætheris, quam in aëre, aquâ & argento vivo pro densitatibus horum fluidorum.

(o) * *Sed etiam agit in projectile*, per motûs legem III. 292.

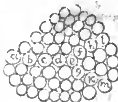
SECTIO VIII.

De motu per fluida propagato.

PROPOSITIO XLI. THEOREMA XXXII.

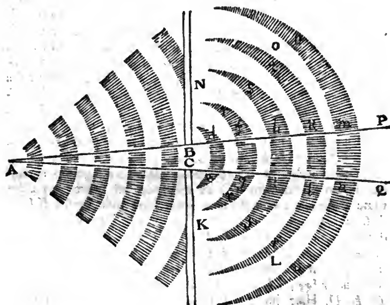
Pressio non propagatur per fluidum secundum lineas rectas, nisi ubi particulæ fluidi in directum jacent.

Si jaceant particulæ *a*, *b*, *c*, *d*, *e* in lineâ rectâ, potest quidem pressio directè propagari ab *a* ad *e*; at particula *e* urgebit particulas obliquè positas *f* & *g* obliquè, & particulæ illæ *f* & *g* non sustinebunt pressionem illatam, nisi fulciantur à particulis ulterioribus *h* & *k*; quâtenus autem fulciuntur, premunt particulas fulcientes; & hæ non sustinebunt pressionem nisi fulciantur ab ulterioribus *l* & *m* easque premant, & sic deinceps in infinitum. Pressio igitur, quam primum propagatur ad particulas quæ non in directum jacent, divaricare incipiet & obliquè propagabitur in infinitum; & postquam incipit obliquè propagari, si inciderit in particulas ulteriores, quæ non in directum jacent, iterum divaricabit; idque toties, quoties in particulas non accuratè in directum jacentes inciderit. *Q. E. D.*



Corol. Si pressionis, à dato puncto per fluidum propagatæ, pars aliqua obstaculo intercipiatur; pars reliqua, quæ non intercipitur, divaricabit in spatia pone obstaculum. Id quod sic etiam demonstrari potest. A puncto *A* propagetur pressio quâquâversum, idque si fieri potest secundum lineas rectas, & obstaculo *NBCK* perforato in *BC*, intercipiatur ea omnis, præter partem coniformem *APQ*, quæ per foramen circulare *BC* transit. Planis transversis *de*, *fg*, *hi* distinguatur conus *APQ* in frusta; & interea dum conus *ABC*, pressionem propagando, urget frustum conicum ulterius *degf* in superficie *de*, & hoc frustum urget frustum proximum *fgih* in superficie

cie fg, & fruſtum illud urget fruſtum tertium, & ſic deinceps in infinitum; manifeſtum eſt (per motus legem tertiam) quod fruſtum primum $defg$, reactione fruſti ſecundi $fghi$, tantum urgebitur & premetur in ſuperficie fg, quantum urget & premit fruſtum illud ſecundum. Fruſtum igitur $defg$ inter conum Ade & fruſtum $fhig$ comprimitur utrinque, & propterea (*per corol.* VI, *prop.* XIX.) figuram ſuam ſervare nequit, niſi vi eadem comprimatur undique. Eodem igitur impetu



quo premitur in ſuperficiebus de, fg, conabitur cedere ad latera df, eg; ubique (cùm rigidum non ſit, ſed omnimodo fluidum) excurret ac dilatabitur, niſi fluidum ambiens adſit, quo conatus iſte cohibeatur. Proinde conatu excurrendi, premet tam fluidum ambiens ad latera df, eg quam fruſtum $fghi$ eodem impetu; & propterea preſſio non minus propagabitur à lateribus df, eg in ſpatia NO, KL hinc inde, quam propagatur à ſuperficie fg verſus PQ. *Q. E. D.*

PROPOSITIO XLII. THEOREMA XXXIII.

Motus omnis per fluidum propagatus divergit à recto tramite in spatia immota.

Cas. 1. Propagetur motus à puncto A per foramen BC, pergatque, si fieri potest, in spatio conico $BCQP$, secundum lineas rectas divergentes à puncto A. Et ponamus primo quod ([a]) motus iste sit undarum in superficie stagnantis aquæ, Sintque de, fg, hi, kl, &c. undarum singularum partes altissimæ, vallibus totidem intermediis ab invicem distinctæ. Igitur quoniam aqua in undarum jugis altior est quam in fluidi partibus immotis LK, NO, defluet eadem de jugorum terminis e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. hinc inde versus KL & NO: & quoniam ([b]) in undarum vallibus depressior est quam in fluidi partibus immotis KL, NO; defluet eadem de partibus illis immotis in undarum valles. Defluxu priore undarum juga, posteriore valles hinc inde dilatantur & propagantur versus KL & NO. Et quoniam motus undarum ab A versus PQ fit per continuum defluxum jugorum in valles proximos, ideoque ([c]) celerior non est quàm pro celeritate descensus; & descensus aquæ hinc inde versus KL & NO eâdem velocitate peragi debet; propagabitur dilatatio undarum hinc inde versus KL & NO eâdem velocitate quâ undæ ipsæ ab A versus PQ rectà progrediuntur. Proindeque spatium totum hinc inde versus KL & NO ab undis dilatatis $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, &c. occupabitur. *Q. E. D.* Hæc ita se habere quilibet in aquâ stagnante experiri potest.

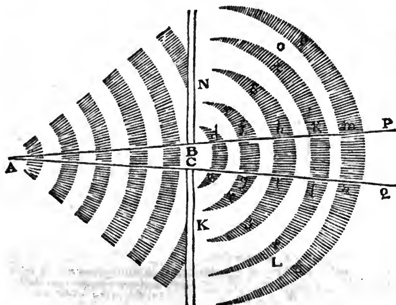
Cas.

(a) *Motus iste sit undarum &c.* Vis quælibet decrsum directa in superficiem stagnantis aquæ agat in A, & cavitate factâ, cogat aquam circumquaque ascendere, aqua elevata vi propriæ gravitatis descendendo partim refluet in A, ad cavitatem replendam, partim in plagam oppositam feretur, & celeritate cadendo acquisitâ novam cavitatem formabit, atque ità deinceps undæ motus per successivum ascensum & descensum propagabitur in orbem.

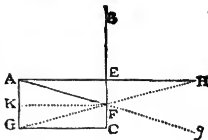
(b) * *In undarum vallibus depressior est &c.* Aqua enim ab altioribus undarum partibus cadendo celeritatem acquirit, quâ infrà quiescentis aquæ superficiem descendit.

(c) * *Celerior non est* quàm pro celeritate descensûs ab eâdem undarum altitudine, undè aqua in plagas P Q, K L, N O æquè defluit.

Cas. 2. Ponamus jam quod *de*, *fg*, *hi*, *kl*, *mn* designent pulsus à puncto *A* per medium elasticum successive

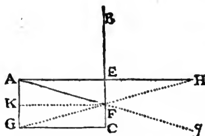


pro-

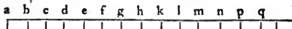


293. Ex demonstratis in hoc casu, motus undæ in obstaculum planum incurrentis definiri potest. Undarum motus è loco A quasi centro propagetur. Incurrat unda in obstaculi immoti B C punctum F, cum velocitate & directione A F. Ductâ ex A in B C perpendiculari A E, completoque rectangulo A E F K, resolvatur motus A F, in duos alios motus A E, A K, seu factâ F C æquali A K, in motus K F, F C; & quia particulæ aquæ motu F C in obstaculum non agunt, post impactum pergent eâdem quâ antè impactum velocitate ac directione F C moveri. At motu K F, in obstaculum directè incurrentes motum illum omnem, juxtà leges conflictûs corporum non elasticorum, amittent. Cùm autem aqua in F ab aliâ insequente urgeatur, & obstaculum (per hyp.) cedere nequeat; elevabitur illa in F; & deindè vi ponderis sui, id est, vi æquali illi quâ per obstaculi longitudinem elevata fuit, des-

propagatos. (d) Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii, sic ut pulsus cujusque pars densissima sphæricam occupet superficiem circa centrum *A* descriptam, & inter pulsus successivos æqualia intercedant intervalla. Designent autem lineæ *de*, *fg*, *hi*, *kl*, &c. densissimas pulsuum partes, per foramen *BC* propagatas. Et quoniam medium ibi densius est quam in spatiis hinc inde versus *KL* & *NO*,

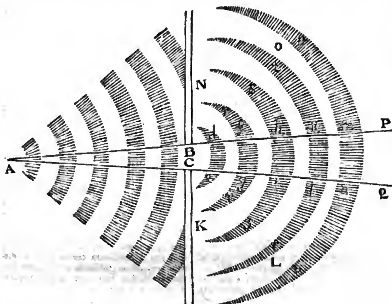


descendet in plagam F K, eademque proinde velocitate ac directione ab obstaculo recedet quâ ad illud accesserat. Ex hoc motu F K, & ex alio F C in aquâ residuo componetur motus F G, per diagonalem parallelogrammi K F C G; unda igitur à puncto F reflectitur secundum directionem F G, & cum eâdem velocitate quâ per A F in obstaculum incurrit, & quâ, sublato obstaculo, motum per F g, seu per A F productam continuasset, estque angulus reflexionis G F C æqualis angulo incidentiæ A F E. Producatur jam linea G F ut perpendiculo A E etiam producto occurrat in H; & quia angulus E F H = C F G = E F A, erit E H = A E & F H = A F = F G, & ideò aqua reflexa eodem modo movebitur per F G, ac si ex puncto *H*, *quasi ex centro undarum motus propagaretur*; cùmque demonstratio hæc omnibus obstaculi plani B C punctis congruat, manifestum est undas reflexas eandem velocitatem eandemque figuram citrà obstaculum obtinere, quas, sublato obstaculo, ultrà lineam B C habuissent.



(d) * 294. *Pulsus propagari concipe per successivas condensationes & rarefactiones medii*, ità ut primum partes medii à puncto A quaquaversùm propulsæ eant & condensentur, & ubi sunt densissimæ sphæricam superficiem circà centrum A descriptam occupare intelligantur, tum vi elasticâ rarefiant & dilatatione suâ partim versùs centrum A redeant, partim à centro illo quaquaversùm recedant & partes vicinas propellent; ita ut condensentur, atque ità successivis condensationibus & dilatationibus agitetur totum medium. Quæ ut clarius intelligantur, motum particularum aëris in uno prædictæ sphæræ radio contemplemur. Sint a, b, c, d &c. puncta physica medii quiescentis in rectâ a q, ad æquales ab invicem distantias sita. Punctum a, vi quâlibet acceleratrice urgeatur, secundùm directionem a q, & deinde cessante vis illius actione, per celeritatem acquisitam moveatur. Non poterit ità moveri particula a, quin successive moveantur particulæ aliæ b, c, d, e, &c. & quia medium elasticum in intervallis b c, c d, d e, &c. gradatim condensatur & vim elasticam majorem acquirit quâ celeritas particulæ a, sibi relictæ continuò minuitur ac tandem prorsùs extinguitur; tum verò medium condensatum vi suâ elasticâ utrinque tam versùs a, quam versùs q dilatatur, & particulas a, b, c, &c.

NO, (e) dilatabit sese tam versus spatia illa *KL*, *NO* utrinque sita, quam versus pulsuum rariora intervalla; eoque pa- & rarius semper evadens è regione intervallorum ac den-



sius è regione pulsuum, participabit eorundem motum. Et quoniam pulsuum progressivus motus oritur à perpetuâ relaxatione partium densiorum versus antecedentia intervalla rariora;

&c. in pristina loca successivè repellit, dum intereà aliæ particulæ ut g, h, &c. versus q progrediuntur; quo motu medium rursus condensatur versus q, & deinde utrinquè dilatatur, atquè ità deinceps pulsus per successivas condensationes & rarefactiones medii propagantur. * Hæc pulsuum in medio Elastico genitorum naturâ, ad Propos. XLVII. fusius expendetur, sed icto in loco hæc sufficere videntur.

(e) * *Dilatabit se tam versus &c.* Per vim elasticam quæ vi comprimenti quâ partes medii condensantur, æqualis est, & in omnem loci circumferentiam agit. 294.

295. Motus pulsuum in medio elastico spectari potest ut analogus cum motu undarum in superficie aquæ stagnantis; nam condensatio partium medii elastici locum tenet elevationis aquarum, vis elastica medii locum gravitatis aquæ, & pars pulsuum densissima parti undarum altissimæ correspondet. Undè in utroque motu, medii particulæ per brevia spatia eunt & redeunt, intereadum pulsus vel unda propagatur

ra; & pulsus eadem ferè celeritate sese in medii partes quiescentes KL, NO hinc inde relaxare debent; pulsus illi eâdem ferè celeritate sese dilatabunt undique in spatia immota KL, NO, quâ propagantur directè à centro A; ideoque spatium totum $KLNO$ occupabunt. *Q. E. D.* Hoc experimur in sonis, qui vel monte interposito audiuntur, vel in cubiculum per fenestram admissi sese in omnes cubiculi partes dilatant, inque angulis omnibus audiuntur, non tam reflexi à parietibus oppositis, quam à fenestrâ directè propagati, quantùm ex sensu judicare licet.

Cas. 3. Ponamus denique quod motus cujuscunque generis propagetur ab A per foramen BC: & quoniam propagatio ista non fit, nisi quâtenus partes medii centro A propiores urgenr

(294) & eodem modo quo (293 undarum reflexionem exposuimus, demonstratur pulsus ab obstaculo plano B C, (vid. fig. not. 293.) ità repercuti ut sit angulus reflexionis æqualis angulo incidentiæ, idemque sit medii motus post reflexionem qui produceretur, si pulsus ex centro H sublato obstaculo, propagaretur.

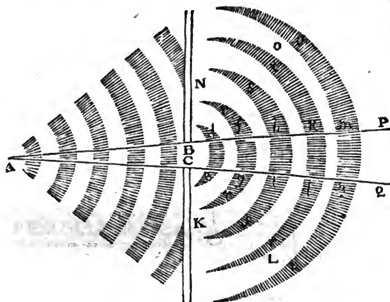
Sed ut hujus sectionis doctrina quæ soni phænomenis explicandis accommodata est, melius intelligatur, nonnulla de naturâ soni & de motu corporum resonantium præmittenda sunt.

296. *Definitio. Sonus directus est*, qui à corpore sonoro ad organum auditûs rectâ lineâ fertur. *Sonus reflexus qui* à corpore sonoro in alia corpora fertur, & inde ad aurem reflectitur.

297. *Propositio. Sonus est particularum corporis resonantis motus tremulus ac vibratorius aëri communicatus & ad aures delatus.* Hæc propositio notissimis experimentis certa est. Nam corpora non resonant nisi percutiantur, & maximè omnium resonant corpora dura atquè elastica quorum partes ictu flectuntur, & deinde vi suâ elasticâ resiliunt, atquè ità tremulo ac vibratorio motu agitantur. Particularum corporis resonantis subsultus visu & tactu percipitur; chartæ frustula corpori resonanti insidentia subsultare oculis cernuntur & admotâ manu partium fremitus sentitur. Verùm si fides instrumenti musici tensa non fuerit, licet oscillationes tota peragat, sonum non edit; & forcipis focariæ crura digitis constricta & exemplò dimissa, oscillationes agunt sine sono; at si oscillando corpus aliquod durum percutiunt, resonant; ex quibus deducitur sonum non solo totius corporis oscillatorio motu, sed particularum ipsius tremore produci. Hic motus aëri contiguo communicatur & pulsus excitat (294). Cùm propè aquam stagnantem tympanum quatitur, subsultus observantur in aquæ superficie. Dum instrumentorum musicorum pulsantur nervi, pulvisculi qui aëri innatant & radio solis fiunt conspicui, conformiter ad fremitum nervorum subsultare videntur. Si ex duabus chordis musicis, homogeneis, æqualibus & æque tensis una pulsetur ut sonum edat, altera prioris vicina concutitur & similiter resonat. Tandem corpora sonora sub campanâ antliæ pneumaticæ posita atque percussa, dum educitur aër, sonum languidiorem reddunt & exhausto aëre, nullum qui possit percipi. Est igitur aër vehiculum soni: attamen totius aereæ molis motus qui in vento cernitur, per se ad producendum sonum non valet, sed vibratorius particularum motus satis validus necessarius est.

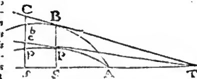
298.

gent commoventque partes ulteriores; & partes quæ urgentur fluidæ sunt, ideoque recedunt quâquâversum in regiones ubi minus premuntur: recedent eædem versus medii partes omnes quiescentes, tam laterales *KL* & *NO*, quàm anteriores *PQ*,



eoque pacto motus omnis, quam primum per foramen *BC* transiit, dilatari incipiet & inde tanquam à principio & centro, in partes omnes directè propagari. *Q. E. D.*

298. Lemma. *Si curvarum duarum AB, AP abscissam communem AS habentium, ordinatæ SB, SP sint semper ad invicem in datâ ratione, imminutis iis in infinitum ut curvæ tandem coincidant cum axe AS, erit ultima ratio curvaturæ eadem quæ ordinatarum.* Duc novam ordinatam s p curvis occurrentem in p & b, & ad puncta B & P duc tangentes occurrentes ordinatæ novæ in C & c. Tum ob datam ordinatarum rationem, tangentes productæ ad idem axis punctum T concurrent (256. 298.

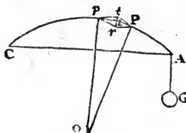


 lib.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUNDUS. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

lib. 1.) & ideò ob parallelas S B, s C, erit s C : s c = S B : S P & (per hyp.) S B : S P = s b : s p ; unde s C : s c = s b : p = s C — s b : s c — s p = b C : p c = S B : S P, coincidant jam ordinatæ s b, S B, & lineolæ evanescentes b C, p c, erunt subtensæ angulorum contactûs b B C, p P c, & ordinatis S B, S P in infinitum diminutis, ut curvæ tandem coincidant cum axe A S, subtensæ illæ perpendiculares evadent ad curvas, fietque B b æqualis P p. Sed in hâc hypothesi, anguli contactûs sunt ad invicem ut $\frac{bC}{Bb}$, ad $\frac{pc}{Pp}$ (154. lib. 1.), hoc est, ut b C ad p C. Quarè curvaturæ in B & P, quæ angulis contactûs proportionales sunt (121. *lib.* 1.) erunt subtensis b C, p c, ac proindè (ex dem.) ordinatis S B, S P proportionales. Q. E. D.



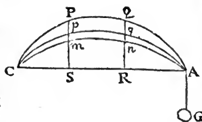


299. Lemma. *Vis acceleratrix quâ punctum quodlibet P nervi tensi & uniformiter crassi urgetur, dum per brevissimum spatium oscillatur, est ut nervi curvatura in eodem loco.* Nervus A C pondere G tensus oscillando pervenerit ad positionem curvæ A P C, cum axe A C ferè coincidentis, & quia linea rectâ C A pondere G tenditur ubique æqualiter, æqualis quoque erit tensio omnium partium curvæ A P C quamproximè. Sumatur punctum p, puncto P quamproximum, & ductis tangentibus P t, p t concurrentibus in t, compleatur parallelogrammum P t p r, ducanturque ad curvam normales P O, p o concurrentes in O, vires æquales quibus arcus evanescens P p, (qui sumi potest pro arcu circuli radio P O descripti (121. *lib.* 1.) in directionibus tangentium t P, t p, hinc indè trahitur, exponantur per tangentes illas æquales, & singulæ resolvantur in duas alias vires, vis quidem t P in vires t z & z P, & vis t p in vires t z, seu z r & z p vires z P, z p, æquales & oppositæ nullum motum in arcu P p producent, at viribus t z & z r, simul, seu vi totâ t r, in directione t r, sivè P O urgebitur. Erit igitur vis motrix quâ particula P p in directione t r urgetur, ad fili tensionem in P vel p per quam generatur vis illa ut t r ad t P. Sed (ex naturâ circuli) angulus t P r, æqualis est angulo P O p, cum arcus P p sit utriusque mensura, & propterà triangulum isoscele P O p, simile est triangulo isosceli t P r. Quarè P p est ad P O ut t r ad t P, hoc est, ut vis motrix quâ particula P p in directione t r seu P O urgetur ad fili tensionem datam G, & ideò vis illa est ut $\frac{Pp}{PO}$. Cum igitur vis acceleratrix sit in ratione vis motricis directè & materiæ movendæ inversè (per def. 8am. lib. 1.) & materia movenda sit hic ut P p, ob æqualem ubique nervi crassitudinem, erit vis acceleratrix ut $\frac{1}{PO}$, id est, in ratione inversâ radii circuli curvam osculantis in P, ideóque in ratione curvaturæ in P (121. *lib.* 1.). Q. E. D.

300. PROPOSITIO. *Si chorda musica A C uniformiter crassa & pondere G tensa, ità inflectatur dum resonat, ut ejus elongatio maxima ab axe motûs A C sit ferè insensibilis & ideò vis tensionis non mutetur per auctam chordæ longitudinem in majoribus suis ab axe distantiis & inclinatio radiorum curvaturæ ad axem negligi possit, ea erit natura curvæ A Q P C in quam chorda oscillando inflectitur, in quovis articulo motûs ejusdem chordæ ut ductis pro libitu ordinatis ad axem normalibus Q R, P S sit curvatura in Q, ad curvaturam in* P,

P, ut QR, ad PS, ac puncta omnia Q, P simul ab axem pervenientia & simul redeuntia oscillationes suas omnes eodem tempore peragant ad instar penduli oscillantis in cycloide.

Cas. 1. Sit curva AQPC chordæ oscillantis distantia maxima ab axe AS punctis omnibus jam quiescentibus, eaque sit hujus curvæ natura ut curvatura in Q sit ad curvaturam in P, in ratione distantiæ QR ad distantiam PS. Hoc posito erit acceleratio in Q ad accelerationem in P in eâdem ratione QR ad PS (*per Lem superius* 299.) ideóque initio motûs spatia simul percursa Qq, Pp, erunt in eâdem ratione, & divisim spatia percurrenda qR, pS, erunt in eâdem ratione QR ad PS; undè etiam accelerationes novæ in punctis q & p, erunt in eâdem ratione QR ad PS (299, 298.) atque erunt ad accelerationes priores in Q & P, ut distantiæ qR & pS ad distantias QR & PS (299, 298.). Ergò puncti cujusvis P, vel in eâdem curvâ AQPC vel in diversis AQPC & AqpC, spectati acceleratio semper est ut ejusdem distantia ac axe motûs AC. Quarè (*per prop.* 51. *lib.* 1.) puncta omnia nervi ad axem simul perveniunt, simul redeunt & oscillationes singulas peragunt dato tempore ad instar corporis in cycloide oscillantis. Q. E. D.



Cas. 2. Si chorda plectro modò percussa nondum induerit formam curvæ in primo casu descriptæ, erit curvatura in P ad curvaturam in Q in majori vel minori ratione quàm distantiæ PS ad distantiam QR. Sit in majori ratione, & erit velocitas in P, ad velocitatem in Q, in ratione majore quam PS ad QR, (299) & spatium Pp tempore minimo descriptum ad spatium Qq, eodem tempore descriptum in ratione majore quam PS ad QR, ideòque divisim erit pS minor respectu PS, quàm qR, respectu QR; & quia curvatura cum distantiis ab axe minuitur ac coincidente curvâ cum axe nulla evadit, erit etiam curvatura in p, minor respectu curvaturæ in P, quam curvatura in q, respectu curvaturæ in Q, & inde (299) acceleratio in p, minor respectu accelerationis in P, quam acceleratio in q, respectu accelerationis in Q. Majoris igitur velocitatis acceleratione semper decrescente & minoris velocitatis acceleratione è contrà semper crescente, respectu distantiarum ab axe AC, motus inter se tandem ità temperabuntur, ut punctis P & Q pervenientibus in loca quædam m & n, tum velocitates, tum accelerationes futuræ sint distantiis mS, nR proportionales, ideóque curvâ AnmC, jam existente eâdem quam descripsimus in casu 1°, motus dehinc omnes conspirabunt, atquè idem eveniet, si sit curvatura in P ad curvaturam in Q in minore ratione quam distantiæ PS ad distantiam QR. Quarè quocumque modo percutiatur chorda musica, quam citissimè induet formam curvæ in casu primo descriptæ, atquè perget moveri more ibidem descripto. Q. E. D. 300.

Cæterùm inflexiones seu distantias admodum parvas ab axe motûs tam in chordis musicis quam in laminis elasticis ex quibus corpora sonora compacta esse fingi potest, viribus acceleratricibus proportionales & proindè oscillationes esse isochronas experimentis ostendit Clar. *s'Gravesandius* in Elem. phys. & *Mersennus* in harmoniâ universali longiorum chordarum vibrationes isochronas oculis observavit. Si verò chorda nimiâ vi pulsetur, vis acceleratrix in experimentis crescit in majori ratione quam distantiæ ab axe motûs & oscillationes breviori tempore absolvuntur.

 301.

301. *Cor.* 1. Datis axibus A C & B D curva musica sic potest describi. Centro D & radio D B describatur circuli quadrans B N E; ducatur ad B D, perpendicularis M N circulo occurrens in N, & producatur ad P, ut sit M P ad D C, in ratione arcûs B N, ad arcum quadrantalem B N E, dico punctum P esse in curvâ musicâ A B C.

Sit enim P puuctum curvæ musicæ ABC, & dicantur B D $= a$, A C $= L$, D C $= \frac{1}{2} L$, B M $= x$, P M $= y$, arcus B P $= s$, $PS = MD = z = a - x$, radius curvaturæ in $B = r$: & si fluxio ds sive P p constans sumatur, erit (126. *lib.* 1.) radius curvaturæ in P, seu P O $= \frac{ds\,dz}{ddy} = -\frac{ds\,dx}{ddy}$. Sed (ex dem.) B D est ad P S ut curvatura in B ad curvaturam in P, id est, ut radius curvaturæ in P ad radium curvaturæ in B, seu $a : a - x = -\frac{ds\,dx}{ddy} : r$. Quarè $ra\,ddy = x\,dx\,ds - a\,dx\,ds$, & sumptis fluentibus, additâ constante $Q\,ds$, fit $ra\,dy = \frac{1}{2} xx\,ds - ax\,ds + Q\,ds$. Evanescente B M seu x, fit $dy = ds$, seu B P $=$ P M (*per cor.* 1. *Lem.* 7. *lib.* 1.) & æquatio in hanc abit $ra\,ds = Q\,ds$, ideòque constans $Q = ra$. Quare in quovis curvæ puncto P erit $ra\,dy\,[ra + \frac{1}{2} xx - ax]\,ds$. Ponatur $ax - \frac{1}{2} xx = bb$, ut sit $ra\,dy = [ra - bb]\,ds$, & $rraa\,dy^2 = [ra - bb]^2\,ds^2 = [ra - bb]^2\,dy^2 + [ra - bb]^2\,dx^2$; undè deducitur $[2rabb - b^4]\,dy^2 = [ra - bb]^2\,dx^2$; & quia curva A B C ferè coincidit cum axe A C (per hyp.) ac ideò quantitas bb minima est respectu quantitatis ra in quâ radius curvaturæ r maximus est, si conferatur cum a vel x æquatio in hanc abibit $2rabb\,dy^2 = rra\,dx^2$, ex quâ eruitur $dy = \frac{r^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Ducatur in circulo altera ordinata m n priori M N proxima; & ex puncto N demittatur ad m n perpendiculum N t; evanescente M m, erit (ex naturâ circuli) N M : N D $=$ N t : N n, sivè $\sqrt{2ax - xx} : a = dx : \mathrm{N} = \frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Est igitur $dy = \mathrm{Mn} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, & sumptis fluentibus $y = \mathrm{BN} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, cui æquationi nihil addendum vel subducendum est, cum arcus B N, evanescente P M seu y evanescat. Verum ubi P M coincidit cum C D, seu ubi fit $y = \frac{1}{2} L$, est B N $=$ B N E, & propterea $\frac{1}{2} L = \mathrm{BNE} \times \sqrt{\frac{r}{a}}$, atquè adeò $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2} L}{\mathrm{BNE}}$. Quarè in quolibet curvæ puncto P, est $y = \frac{\mathrm{BN} \times \frac{1}{2} L}{\mathrm{BNE}}$, & proindè $y : \frac{1}{2} L = \mathrm{BN} : \mathrm{BNE}$, hoc est, P M est ad C D ut arcus B N ad quadrantem B N E. Q. E. D.

302. *Cor.* 2. Quia P S est ad B D seu ad a, ut radius r ad radium P O, erit $PO \times PS = ar$. Sit diameter circuli ad circumferentiam ut 1 ad c & ideò a ad B N E ut 1 ad $\frac{1}{2}c$, seu $BNE = \frac{1}{2}ac$, & cum sit (301) $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{\frac{1}{2}L}{BNE}$, erit $\sqrt{\frac{r}{a}} = \frac{L}{ac}$ & $\frac{r}{a} = \frac{LL}{a^2c^2}$, & $r = \frac{LL}{ac^2}$; atque $PO \times PS = ar = \frac{LL}{cc}$.

303. PROPOSITIO. *Si diameter circuli sit ad circumferentiam ut* 1, *ad c, & chorda musicæ uniformiter crassæ longitudo sit* L, *pondus* P, *pondus quo tenditur* G *& penduli in cycloide oscillantis longitudo* D; *tempus quo chorda illa oscillationem unam perficit, erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione subduplicatâ* P L *ad* c c D G; *numerus verò oscillationum chordæ tempore unius oscillationis penduli erit* $c\sqrt{\frac{DG}{LP}}$.

Nam vis quâ particula P p in loco P, existens urgetur dicatur A, ejusdem pondus B & (*per dem.* 199) erit A ad G, ut P p ad P O, & ob uniformem chordæ crassitudinem est P ad B, ut L ad P p, & his rationibus conjunctis, $P \times A$ ad $B \times G$ ut L, ad P O; undè fit A ad B ut $G \times L$ ad $PO \times P$. Jam si particula P p vi motrice ceu pondere A sollicitata oscillaretur in cycloide cujus perimeter tota æquaret duplam distantiam P S, tempus unius vibrationis in cycloide æquale esset tempori vibrationis unius chordæ musicæ seu particulæ P p; quia vis particulæ P p, in cycloide oscillantis semper decrescit in ratione distantiæ ejus à puncto infimo seu medio cycloidis, quemadmodum vis illa decrescit in ratione distantiæ a puncto S cum particula P p vibrationes suas agit in rectâ P S, & vis motrix particulæ in puncto cycloidis altissimo æqualis est vi motri i A, (*per cor. prop.* 51. *lib.* 1.). Si verò particula P p pondere suo absoluto B oscilletur in cycloide cujus perimeter tota sit 2 D, erit hujus penduli longitudo D (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.), & tempus unius vibrationis chordæ musicæ erit ad tempus unius oscillationis penduli in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione longitudinis P S ad longitudinem D, & subduplicatâ ratione ponderis B ad vim A (*cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.); id est, in ratione subduplicatâ quantitatis $PO \times PS \times P$, ad quantitatem GLD, atque ideò ob $PO \times PS = \frac{LL}{cc}$ (302.) in ratione subduplicatâ PL ad $ccGD$. Q. D. E.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

303. Quia verò numerus vibrationum isochronarum quas chorda vel pendulum tempore quovis dato peragunt sunt inversè ut oscillationum tempora, erit numerus vibrationum quas chorda musica tempore unius oscillationis penduli prædicti peragit ad unitatem ut tempus unius oscillationis penduli ad tempus unius vibrationis chordæ, ideoque in ratione subduplicatâ $ccGD$, ad PL, & proinde numerus vibrationum quas chorda musica peragit eo tempore quo pendulum cujus longitudo est D semel oscillatur est $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$. Q. E. D.

304. *Cor.* 1. Si longitudo chordæ L digitis pedis Parisiensis exprimatur, numerus vibrationum quas chorda tempore minuti unius secundi peragit, erit $19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè. Nam pendulum cujus longitudo D est pedum Parisiensium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, seu digit. $\frac{881}{24}$, singulas oscillationes tempore minuti unius secundi absolvit (471. *lib.* 1.) & præterea ut 113 ad 355; ità diameter 1 ad circuli circumferentiam c, quæ proinde erit $\frac{355}{113}$. Quarè si loco D & c scribantur ipsorum valores in formulâ, erit $c\sqrt{\frac{GD}{PL}} = \frac{355}{113}\sqrt{\frac{881\,G}{24\,LP}} = 19{,}0341\sqrt{\frac{G}{PL}}$ quamproximè.

305. *Cor.* 2. Si conferantur variarum chordarum oscillationes, quia quantitates c & D in formulâ $c\sqrt{\frac{GD}{PL}}$ datæ sunt; numeri vibrationum dato tempore peractarum erunt ut $\sqrt{\frac{G}{PL}}$, & ideò tempora quibus

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLII. THEOR. XXXIII.

bus singulæ vibrationes fiunt ut $\sqrt{\frac{PL}{G}}$ (473 *lib.* 1.).

306. *Cor.* 3. Iisdem positis, si præterea chordæ sint homogeneæ, æquè crassæ & æquè tensæ, cum in eo casu pondus G datum sit & pondus P sit ut chordæ longitudo L, tempora quibus singulæ vibrationes fiunt, erunt ut $\sqrt{LL}$, seu ut chordarum longitudines; Quod experimentis confirmavit Clariss. *s Gravesande* in Elem. Physices.

Scholion. Quæ de chordis vibrantibus huc usque diximus, ea ferè omnia, nonnullis tamen immutatis, mutuati sumus ex tractatu de methodo incrementorum Clariss. *Taylor.* Formulas nostris similes dedêre Celeberrimi Viri, *Sauveur* in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. & *Daniel Bernoulli* tum in Actis Petropol. tum in Dissertatione de Propagatione Lucis, ab Academiâ regiâ Paris. præmio condecoratâ an. 1736.

307. PROPOSITIO. *Si numeri vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, sint inter se ut numeri* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, chordæ illæ tonos edent qui his notissimis vocibus significantur, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, *ut*, initio sumpto à tono gravioti. Hæc propositio experimentis demonstrata est; nam nervi musici homogenei, æquè crassi eodemque pondere tensi, quorum longitudines sunt inversè ut numeri illi, tonos quos diximus edunt, & horum nervorum longitudines sunt inversè ut numeri vibrationum quas dato tempore absolvunt & directè ut singularum vibrationum tempora ideoque ut 180, 160, 144, 135, 120, 108, 96, 90: (306).

308. *Cor.* Sonorum differentia secundùm *grave* & *acutum*, à minori vel majori numero vibrationum quas chordæ musicæ dato tempore peragunt, pendet, & eò graviores sunt soni quò tardiores sunt singulæ chordarum vibrationes & contrà.

309. PROPOSITIO. *Corpora sonora homogenea & similia quorum latera homologa rationem habent inversam numerorum* 24, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, *tonos edunt, UT, RE, MI, FA, SOL, LA, SI, ut.* Hanc propositionem probant experimenta quæ in campanis, cylindris & prismatibus homogeneis & similibus habuerunt Mersennus in harmoniâ universali & D. Carré in monum. Acad. Reg. an. 1709.

310. PROPOSITIO. *Dum corpus sonorum percutitur, tremulus particularum motus ex ictu & vi elasticâ creatus, remotis obstaculis, per superficiem corporis propagatur*: quod quidem leviora chartæ frustula superficiei corporis resonantis imposita, tremore suo indicant.

311. PROPOSITIO. *Campana figura ictu clavæ ità mutari oculis cernitur ut cum rotunda esset, fiat ovata & quandiù auditur sonus, alternis mutatur oscillationibus.*

312. *Cor.* Ex tribus ultimis propositionibus concludere licet, ut in chordis ita & in aliis corporibus resonantibus, tonos pendere à numero vibrationum seu undulationum quæ dato tempore peraguntur.

PRO-

PROPOSITIO XLIII. THEOREMA XXXIV.

Corpus omne tremulum in medio elastico propagabit motum pulsuum undique in directum; in medio verò non elastico motum circularem excitabit.

Cas. 1. Nam partes corporis tremuli vicibus alternis eundo & redeundo, itu suo urgebunt & propellent partes medii sibi proximas, & urgendo compriment easdem & condensabunt; dein reditu suo sinent partes compressas recedere & sese expandere. Igitur partes medii corpori tremulo proximæ ibunt & redibunt per vices, ad instar partium corporis illius tremuli: & quâ ratione partes corporis hujus agitabant hasce medii partes, hæ similibus tremoribus agitatæ agitabunt partes sibi proximas, eæque similiter agitatæ agitabunt ulteriores, & sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum medii partes primæ eundo condensantur & redeundo relaxantur, sic partes reliquæ quoties eunt condensabuntur, & quoties redeunt sese expandent. Et propterea non omnes ibunt & simul redibunt (sic enim determinatas ab invicem distantias servando, non rarefierent & condensarentur per vices) sed accedendo ad invicem ubi condensantur, & recedendo ubi rarefiunt, (f) aliquæ earum ibunt dum aliæ redeunt; idque vicibus alternis in infinitum. Partes autem euntes & eundo condensatæ, ob motum suum progressivum, quo feriunt obstacula, sunt pulsus; & propterea pulsus successivi à corpore omni tremulo in directum propagabuntur; idque æqualibus circiter ab invicem distantiis, (g) ob æqualia temporis intervalla, quibus corpus tremoribus suis singulis singulos pulsus excitat. Et quanquam corporis tremuli partes eant & redeant secundum plagam aliquam certam & determinatam, tamen pulsus inde per medium propagati sese dilatabunt ad latera, per propositionem præcedentem;

(f) *Aliquæ earum ibunt* (294).

(g) * *Ob æqualia temporis intervalla.* 312. (300).

tem; & à corpore illo tremulo tanquam centro communi, secundum superficies propemodum sphæricas & concentricas, undique propagabuntur. Cujus rei exemplum aliquod habemus in undis, quæ si digito tremulo excitentur, non solum pergent hinc inde secundum plagam motus digiti, sed, in modum circulorum concentricorum, digitum statim cingent & undique propagabuntur. Nam gravitas undarum supplet locum vis elasticæ.

Cas. 2. (h) Quod si medium non sit elasticum: quoniam ejus partes à corporis tremuli partibus vibratis pressæ condensari nequeunt, propagabitur motus in instanti ad partes ubi medium facillimè cedit, hoc est, ad partes quas corpus tremulum alioqui vacuas à tergo relinqueret. Idem est casus cum casu corporis in medio quocunque projecti. Medium cedendo projectilibus, non recedit in infinitum; sed in circulum eundo, pergit ad spatia quæ corpus relinquit à tergo. Igitur quoties corpus tremulum pergit in partem quamcunque, medium cedendo perget per circulum ad partes quas corpus relinquit; & quoties corpus regreditur ad locum priorem, medium inde repelletur & ad locum suum priorem redibit. Et quamvis corpus tremulum non sit firmum, sed modis omnibus flexile, si tamen magnitudine datum maneat, quoniam tremoribus suis nequit medium ubivis urgere, quin alibi eidem simul cedat; efficiet ut medium, recedendo à partibus ubi premitur, pergat semper in orbem ad partes quæ eidem cedunt. *Q. E. D.*

Corol. Hallucinantur igitur qui credunt agitationem partium flammæ ad pressionem, per medium ambiens, secundum lineas rectas propagandum conducere. Debebit ejusmodi pressio non ab agitatione solâ partium flammæ, sed à totius dilatatione derivari.

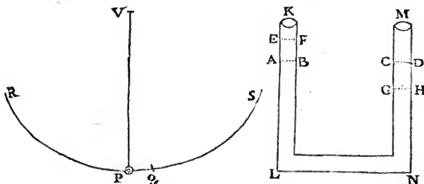
(h) * *Quod si medium* continuum sit & *non elasticum*, &c.

PRO-

PROPOSITIO XLIV. THEOREMA XXXV.

Si aqua in canalis cruribus erectis K L, M N *vicibus alternis ascendat & descendat; construatur autem pendulum cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis aequetur semissi longitudinis aquae in canali: dico quod aqua ascendet & descendet iisdem temporibus quibus pendulum oscillatur.*

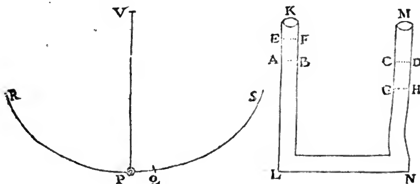
Longitudinem aquæ mensuro secundum axes canalis & crurum, eandem summæ horum axium æquando; & resistentiam aquæ, quæ oritur ab attritu canalis, hic non considero. Designent igitur AB, CD mediocrem altitudinem aquæ in crure



utroque; & ubi aqua in crure KL ascendit ad altitudinem EF, descenderit aqua in crure MN ad altitudinem GH. Sit autem P corpus pendulum, VP filum, V punctum suspensionis, $RPQS$ cylois quam pendulum describat, P ejus punctum infimum, PQ arcus altitudini AE æqualis. Vis, quâ motus aquæ alternis vicibus acceleratur & retardatur, est

 ex-

excessus ponderis aquæ in alterutro crure supra pondus in altero, ideoque, ubi aqua in crure *KL* ascendit ad *EF*, & in crure altero descendit ad *GH*, (i) vis illa est pondus duplicatum aquæ *EABF*, & propterea est ad pondus aquæ totius ut *AE* seu *PQ* ad (k) *VP* seu *PR*. Vis etiam, quâ pondus *P* in loco quovis *Q* acceleratur & retardatur in cycloide (*per corol. prop.* LI.) est ad ejus pondus totum, ut ejus di-



stantia *PQ* à loco infimo *P*, ad cycloidis longitudinem *PR*. Quare aquæ & penduli, æqualia spatia *AE*, *PQ* describentium, vires motrices sunt ut pondera movenda; (l) ideoque, si aqua & pendulum in principio quiescunt, vires illæ movebunt eadem æqualiter temporibus æqualibus, efficientque ut motu reciproco simul eant & redeant. *Q. E. D.*

Co-

(i) * *Vis illa est pondus duplicatum &c.* Est enim vis illa pondus tam aquæ EABF, quam aquæ æqualis CGHD.

(k) * *Ad VP seu PR.* Semicyclois PR, æqualis est longitudini penduli, (*per cor. prop.* 50. *lib.* 1.).

(l.) 313. * *Ideoque si aqua & pendulum &c.* Id evidentissimum fit si pondus P quod, manente oscillationis unius tempore potest ad arbitrium assumi, capiatur æquale ponderi aquæ totius in canali; tùm enim vires motrices, massæ movendæ, & spatia describenda, ideòque & tempora quibus spatia illa describuntur, in canali

Corol. 1. Igitur aquæ aſcendentis & deſcendentis, ſive motus intenſior ſit ſive remiſſior, vices omnes ſunt iſochronæ.

Corol. 2. Si longitudo aquæ totius in canali ſit pedum *Pariſienſium* $6\frac{1}{9}$. aqua tempore minuti unius ſecundi deſcendet, & tempore minuti alterius ſecundi aſcendet; & ſic deinceps vicibus alternis in infinitum. (m) Nam pendulum pedum $3\frac{1}{18}$ longitudinis tempore minuti unius ſecundi oſcillatur.

Corol. 3. Auctâ autem vel diminutâ longitudine aquæ, augetur vel diminuitur tempus reciprocationis in longitudinis ratione ſubduplicatâ.

PROPOSITIO XLV. THEOREMA XXXVI.

Undarum velocitas eſt in ſubduplicatâ ratione latitudinum.

Conſequitur ex conſtructione propoſitionis ſequentis.

PROPOSITIO XLVI. PROBLEMA X.

Invenire velocitatem undarum.

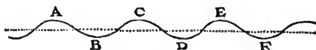
Conſtituatur pendulum cujus longitudo, inter punctum ſuſpenſionis & centrum oſcillationis, æquetur latitudini undarum: & quo tempore pendulum illud oſcillationes ſingulas peragit, eodem undæ progrediendo latitudinem ſuam propemodum conficient.

Un-

nali & in cycloide æquantur reſpectivè. Sed obſervandum eſt ſuperficiem A B, eſſe locum æquilibrii, ad quem cum aqua pervenit, nullâ amplius vi acceleratrice urgetur, ſed velocitate tantum acquiſitâ ulteriùs deſcendit vel aſcendit; ſicuti corpus pendulum *P* dum pervenit in locum cycloidis infimum *P* ſolâ velocitate acquiſitâ movetur. Undè quo tempore aqua deſcenſum unum abſolvit in crure alterutro canalis, eodem tempore pendulum oſcillationem unam ex deſcenſu & aſcenſu compoſitam perficit, duas verò oſcillationes abſolvit intereadum aqua è loco E deſcendit & ad eundem redit. 313.

(m) * *Nam pendulum ped.* $3\frac{1}{18}$, ſeu ped. 3. & lin. 8. quamproximè (471. *lib.* 1). Clariſſ. *Hermanus* tom. 3. Comm. Acad. Petrop. motum aquæ in tubis crura quomodolibet ad baſim inclinata habentibus definivit. Rem generaliùs pertractavit Celeb. D. *Bernoullius* in Hydrodynamica. Hos authores, ſi lubet, adeat lector.

Undarum latitudinem voco mensuram transversam, quæ vel vallibus imis, vel summis culminibus interjacet. Designet *ABCDEF* superficiem aquæ stagnantis, undis successivis ascendentem ac descendentem; sintque *A*, *C*, *E*, &c. undarum culmina, & *B*, *D*, *F*, &c. valles intermedii. Et quoniam motus undarum fit per aquæ successivum ascensum & descensum, sic ut ejus partes *A*, *C*, *E*, &c. quæ nunc al-



tissimæ sunt, mox fiant infimæ; & vis motrix, quâ partes altissimæ descendunt & infimæ ascendunt, est pondus aquæ elevatæ; alternus ille ascensus & descensus analogus erit motui reciproco aquæ in canali, easdemque temporis leges observabit: & propterea (*per prop.* XLIV.) si distantiæ inter undarum loca altissima *A*, *C*, *E* & infima *B*, *D*, *F*, (n) æquentur duplæ penduli longitudini; partes altissimæ *A*, *C*, *E*, tempore oscillationis unius evadent infimæ, & tempore oscillationis alterius denuo ascendent. Igitur inter transitum undarum singularum tempus erit oscillationum duarum; hoc est, unda describet latitudinem suam, quo tempore pendulum illud bis oscillatur; sed eodem tempore pendulum, cujus longitudo quadrupla est, ideoque æquat undarum latitudinem, oscillabitur semel. *Q. E. I.*

Co-

(n) * *Æquentur duplæ penduli longitudini.* Quoniam, ex dictis, unda percurrit latitudinem suam A C vel B D intereadum altitudo A transfertur in C, vel cavitas B in D, quod fieri non potest nisi aqua ab altitudine undarum descendat, & deindè ad eandem altitudinem ascendat, & quia cavitas quæ est infrà aquæ quiescentis superficiem quam in figurà exhibet linea punctis distincta, est circiter æqualis elevationi aquæ suprà eandem superficiem quæ est æquilibrii locus, patet (313) totius aquæ movendæ longitudinem æqualem esse longitudini cavitatis vel elevationis aquæ infrà vel suprà locum illum æquilibrii, ac proinde cum longitudo cavitatis vel elevationis illius æqualis sit distantiæ A B, vel B C, pendulum cujus longitulo est $\frac{1}{2}$ A B vel $\frac{1}{2}$ B C, semel

Corol. 1. Igitur undæ, quæ pedes *Parisienses* $3\frac{1}{18}$ latæ sunt, (o) tempore minuti unius secundi progrediendo latitudinem suam conficient; ideoque tempore (p) minuti unius primi percurrent pedes $183\frac{1}{3}$, & horæ spatio pedes 11000 quamproximè.

(q) *Corol.* 2. Et undarum majorum vel minorum velocitas augebitur vel diminuetur in subduplicatâ ratione latitudinis.

Hæc ita se habent ex hypothesi quod partes aquæ rectâ ascendunt vel rectâ descendunt; sed ascensus & descensus ille (r) verius fit per circulum, ideoque tempus hâc propositione non nisi quamproximè definitum esse affirmo.

PROP.

semel oscillabitur eo tempore quo aqua ascendit, & iterum oscillabitur, intereadum aqua descendit (313.) atque ità oscillabitur bis quo tempore unda describit latitudinem suam. Quoniam igitur numeri oscillationum quas pendula eodem tempore peragunt, sunt in ratione subduplicatâ longitudinis pendulorum inversè (474. *lib.* 1.) pendulum cujus longitudo est A B C D, quadrupla longitudinis $\frac{1}{2}$ A B semel oscillabitur quo tempore unda latitudinem suam percurrit. In undis verò latioribus quæ altiùs non elevantur, linea curva A B C, vix differt à rectâ A C, quæ est undæ latitudo, & propterea in eo casu unda latitudinem suam describit, intereadum pendulum cujus longitudo est recta A C, semel oscillatur.

(o) * *Tempore minuti unius secundi* (471. *lib.* 1.)

(p) * *Tempore minuti unius primi.* Quia undarum datæ latitudinis velocitas æquabilis est (ex dem.) Si undæ latitudo data ped. $3\frac{1}{18}$, ducatur in tempus 60″, factum $183\frac{1}{3}$ ped. erit spatium quod unda tempore minuti unius primi seu minutorum secundorum 60, describit & ducto rursus hoc numero $183\frac{1}{3}$ in 60′, producetur spatium 11000 ped. quod unda tempore horæ unius conficit. 315.

(q) * *Cor.* 2. Undarum velocitates sunt ut earumdem latitudines directè & tempora quibus latitudines illas percurrunt inversè (5. *lib.* 1.) Sed tempora illa sunt in subduplicatâ ratione latitudinum undarum seu longitudinum pendulorum quæ eo tempore quo undæ latitudines suas describunt, semel oscillantur (472. *lib.* 1.). Undarum igitur velocitates sunt in ratione compositâ ex ratione latitudinum directè & ratione subduplicatâ earumdem latitudinum inversè, ideòque sunt in ratione subduplicatâ latitudinum directè.

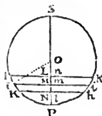
(r) * *Veriùs fit per circulum*, seu per arcum curvilineum qui magis accedit ad figuram arcûs circularis quàm ad figuram canalis rectilinei in quo aqua, rectâ ascendit & descendit.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

Pulsibus per fluidum propagatis, singulæ fluidi particulæ, motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes, accelerantur semper & retardantur pro lege oscillantis penduli.

Designent *AB*, *BC*, *CD*, pulsuum successivorum æquales distantias; *ABC* plagam motus pulsuum ab *A* versus *B* propagati; *E*, *F*, *G* puncta tria physica (f), medii quiescentis in rectâ *AC* ad æquales ab invicem distantias sita; *E e*, *F f*, *G g* spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu reciproco (t) singulis vibrationibus eunt & redeunt; ε, φ, γ loca quævis intermedia eorundem punctorum; & *E F*, *F G* lineolas physicas seu medii partes lineares punctis illis interjectas, & successivè translatas in loca εφ, φγ & *e f*, *f g*. Recta *E e* æqualis ducatur recta *P S*. Bisecetur eadem in *O*, centroque *O* & intervallo *O P* describatur circulus *S I P i*. Per hujus circumferentiam totam cum partibus suis exponatur tempus totum vibrationis unius cum ipsius partibus pro-por-



(f) * *Medii quiescentis*, id est, nondum agitati vibrationibus corporis tremuli, aut indè productis aëris pulsibus.

(t) 314. * *Singulis vibrationibus eunt & redeunt.* Si corporis tremuli aut chordæ musicæ oscillantis particula incipiat moveri in E, & eundo secum transferat medii punctum E, in locum e, & deindè particula illa chordæ musicæ vi propriâ & punctum e, medii inter e, & C compressi ac condensati dilatatione redeant in locum E, unicus in medio elastico pulsus secundum directionem B C. producetur, & singulis aliis vibrationibus corporis tremuli vel chordæ musicæ ex itu & reditu compositis, singuli excitabuntur pulsus (*prop.* 43.) atque adeò pulsus latitudinem suam describit intereadum punctum E, vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium E e, compositam, absolvit.

portionalibus; sic ut completo tempore quovis PH vel $PHSh$, si demittatur ad PS perpendiculum HL vel hl, & capiatur $E\epsilon$ æqualis PL vel Pl, punctum physicum E reperiatur in ϵ. Hâc lege punctum quodvis E, eundo ab E per ϵ ad e, & inde redeundo per ϵ ad E, iisdem accelerationis ac retardationis gradibus vibrationes singulas peraget (u) cum oscillante pendulo. Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causâ quâcunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In circumferentiâ $PHSh$ capiantur æquales arcus HI, IK vel hi, ik, eam habentes rationem ad circumferentiam totam quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum totum BC. Et demissis perpendiculis IM, KN vel im, kn; quoniam puncta E, F, G motibus similibus successivè agitantur, & vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur à B ad C; si PH vel $PHSh$ sit tempus ab initio motûs puncti E, (x) erit PI vel $PHSi$ tempus ab initio motûs puncti F, & PK vel $PHSk$ tempus ab initio motûs puncti G; & propterea $E\epsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ erunt ipsis PL, PM, PN in itu punctorum vel ipsis Pl, Pm, Pn in punctorum reditu, (y) æquales respectivè. Unde $\epsilon\gamma$ seu $EG+G\gamma-E\epsilon$ in itu punctorum æqualis erit $EG-LN$, in reditu autem æqualis $EG+ln$. (z) Sed $\epsilon\gamma$ latitudo est seu ex-

(u) * *Cum oscillante pendulo.* (prop. 52. lib. 1.).

(x) * *Erit PI vel $PHSI$.* Quoniam puncta E, F, G, & alia deinceps, motibus similibus per medii compressionem & dilatationem communicatis successivè agitantur, pulsus per æqualia spatia EF, FG &c. æqualibus temporibus propagatur, ideòque tempus quo transfertur ab E ad F, vel ab F ad G, est ad tempus totum quo transfertur à B ad C, & quo singula puncta E, F, G vibrationes suas integras ex itu & reditu compositas perficiunt, ut spatium EF vel FG ad spatium BC, in quâ ratione etiam est arcus HI, vel IK, ad totam circumferentiam PHSP, (*per hyp.*) quæ tempus totum quo pulsus à B ad C transfertur, exponit, & differentia inter tempus sumptum ab initio motûs puncti E & tempus sumptum ab initio motûs puncti F, est tempus illud quod pulsus transfertur ab E ad F. Quare *si PH vel PHSh exponat tempus ab initio motûs puncti E, PI vel PHSI, exponet tempus ab initio motûs puncti F*, cum HI vel hi exponat differentiam inter tempus ab initio motûs puncti E, & tempus ab initio similis motûs puncti L, &c. 314.

(y) * *Æquales respectivè.* (per prop. 52. vel 38. lib. 1.)

(z) * *Sed $\epsilon\gamma$ est latitudo seu expansio partis medii EG, in loco $\epsilon\gamma$*, quia punctum E translatum est in locum ϵ, & punctum G in locum γ.

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

expansio partis medii EG in loco $\epsilon\gamma$; & propterea expansio partis illius in itu est ad ejus expansionem mediocrem, ut $EG - LN$ (a) ad EG; in reditu autem ut $EG + ln$ seu $EG+LN$ ad EG. Quare (b) cùm sit LN ad KH ut IM ad radium OP, & (c) KH ad EG ut circumferentia $PHShP$ ad BC, id est, si ponatur V pro radio circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo pulsuum BC, (d) ut OP ad V; & ex æquo LN ad EG ut IM ad V: erit expansio partis EG punctive physici F in loco $\epsilon\gamma$ ad expansionem mediocrem, quam pars illa habet in loco suo primo EG, (e) ut $V - IM$ ad V in itu, utque $V + im$ ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco $\epsilon\gamma$ (f) est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V+im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento vires elasticæ punctorum physicorum E & G in itu, sunt ut $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ ad $\frac{1}{V}$; (g) & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem, ut $\frac{HL-KN}{VV - V\times HL - V\times KN + HL\times KN}$ ad $\frac{1}{V}$. Hoc est, ut

(a) * *Ad E G.* Nam cùm E, F, G sint puncta tria medii quiescentis seu motu impresso nondum condensati vel rarefacti, expansio medii in loco E G, mediocris seu quasi media est inter minimam ipsius expansionem in locis pulsuum densissimis, & maximam in locis rarissimis.

(b) 315. * *Cùm sit L N ad K H.* Anguli ad centrum I O P mensura est arcus I P æqualis dimidio arcui I P i, seu K P k, & anguli ad circumferentiam K H k, mensura est etiam dimidius arcus K P k, & ideò anguli I O P & K H L, æquales sunt. Hinc si ex puncto K, demissum intelligatur ad H L, perpendiculum æquale L N, hoc perpendiculum cum ordinatarum H L & K N differentiâ & cum arcu minimo K H triangulum constituet simile triangulo I O M. Est igitur L N ad K H, ut I M ad I O seu O P.

(c) * *Et K H ad E G.* (per hyp. suprà).

(d) * *Ut O P ad V.* Sunt enim circulorum peripheriæ P H S P & B C radiis suis O P & V proportionales.

(e) * *Ut V—I M ad V.* Quia enim (*ex dem.*) $LN = \frac{EG\times IM}{V}$, erit $EG - LN = \frac{V\times EG - IM\times EG}{V}$, & hinc $EG - LN$ ad EG ut $V - IM$ ad V. Et similiter ob $LN = ln$, & $IM = im$, erit $EG + ln$ ad EG ut $V + im$ ad V.

(f) * *Est ad vim ejus elasticam &c.* Hic supponit Newtonus vim elasticam medii densitati proportionalem, quam quidem hypothesim in aëre nostro, cæteris paribus, quamproximè veram esse experimentis constat. At, datâ medii massâ, densitas est ut expansio seu volumen inversè; Quarè cùm hic data sit massa medii in volumine E G vel $\epsilon\gamma$, contenti, vis elastica est ut expansio reciprocè & ideò *vis elastica puncti F, in loco $\epsilon\gamma$, &c.*

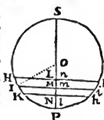
(g) * *Et virium differentia*, id est ; ex-

$\frac{HL-KN}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$, sive ut $HL-KN$ ad V, si modo (ob [h]) angustos limites vibrationum) supponamus HL & KN indefinitè minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut $HL-KN$, hoc est (ob [i]) proportionales $HL-KN$ ad HK, & OM ad OI vel OP, datasque HK & OP) ut OM; id est, si Ff bisecetur in Ω ut $\Omega\,\phi$. ([k]) Et eodem argumento differentia virium elasticarum punctorum physicorum ϵ & γ, in reditu lineolæ physicæ $\epsilon\,\gamma$ est ut $\Omega\,\phi$. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ϵ supra vim elasticam puncti γ)

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVII. Theor. XXXVII.

excessus vis elasticæ puncti E, suprà vim elasticam puncti G erit ad medii vim elasticam mediocrem &c.

(h) * *Ob angustos limites vibrationum.* Quoniam eo tempore quo punctum G vibrationem unam ex itu & reditu per brevissimum spatium Ee compositam absolvit & quo pulsus transfertur à B ad C, innumeræ ferè medii particulæ per medii compressionem & dilatationem successivè agitantur, spatium illud Ee, seu æquale PS, perbreve erit, si conferatur cum pulsuum intervallo BC, aut etiam cum radio V circuli qui circumferentiam habet æqualem BC. Rectè igitur supponitur, quantitate HL & KN, longè minores esse quantitates V. 315.



(i) * *Ob proportionales.* Liquet (per not. 215.) esse HL — KN ad HK, ut est OM ad OI vel OP, undè $HL-KN=\frac{HK\times OM}{OP}$, & ideò ob datum radium OP, datumque arcum HK, qui est ad datam FG ut peripheria data PHSP ad datam BC, erit HL — KN ut variabilis OM. Sed $Ff=PS$, $F\phi=PM$, & propterea si Ff bisecetur in Ω, ut sit $OP=F\Omega$, erit $OM=\phi\,\Omega$. Est igitur HL — KN ut $\phi\,\Omega$.

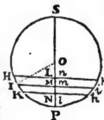
(k) * *Et eodem argumento.* Nam in reditu, vis elastica puncti F in loco $\epsilon\,\gamma$ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V+im}$, ad $\frac{1}{V}$, & vires elasticæ punctorum physicorum G & E, in loco $\epsilon\,\gamma$, sunt ut $\frac{1}{V+hl}$, & $\frac{1}{V+kn}$, ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad medii vim elasticam mediocrem ut $\frac{kn-hl}{VV+V\times hl+V\times kn+hl\times kn}$, ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{kn-hl}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sivè ut kn — hl ad V, &c.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

(l) est vis quâ interjecta medii lineola physica $\epsilon\gamma$ acceleratur in itu & retardatur in reditu; & propterea vis acceleratrix physica $\epsilon\gamma$, est ut ipsius distantia à medio vibrationis loco Ω. Proinde tempus (*per prop.* XXXVIII. *lib.* I.) rectè exponitur per arcum PI; & medii pars linearis $\epsilon\gamma$ lege (m) præscriptâ movetur, id est, lege oscillantis penduli: estque par ratio partium omnium linearium ex quibus medium totum componitur. *Q. E. D.* (†)

(l) * *Est vis quâ interjecta lineola.* Medium in ϵ & in γ vi suâ elasticâ sese dilatare in plagas oppositas C & B nititur, his viribus interjecta lineola physica $\epsilon\gamma$, seu punctum physicum φ, urgetur in utramque plagam, & excessu vis elasticæ in ϵ, suprà vim elasticam in γ, accelesatur in itu & retardatur in reditu.

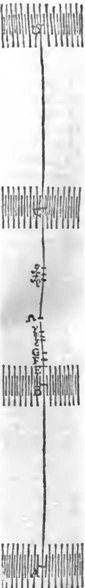
(m) * *Lege præscriptâ movetur.* Demonstratum est quod si punctum physicum E ad legem oscillantis penduli moveatur, uti si vibrationibus partium corporis tremuli aut nervi musici (quemadmodum in not. 314. exposuimus) agitetur, tùm solâ vi elasticâ medii punctum physicum F, & alia deindè puncta secundum eandem legem oscillantis penduli successivè movebuntur.



(†) *Jam pridem Vir Acutissimus* Eulerus, *hanc* NEWTONI *Theoriam suspectam habuit, aliamque formulam dedit quâ soni celeritatem determinaret à* Newtonianâ *diversam, sed suæ formulæ demonstrationem, aut vitium* Newtonianæ, *palam non fecit, quod sciamus; Observationes suas hanc in rem nobis communicavit Vir Doctissimus* GABRIEL CRAMER, *Vir in his rebus expertissimus, sagacissimique ingenii, quas suâ cum veniâ, publici juris facimus, quasque Doctorum attensione dignissimas credimus; Certè planissimè ostendit aliquod subreptionis vitium in hac Demonstrandi formâ, quam* NEWTONUS *adhibet, latere; scilicet demonstrationem ipsam non ex rei naturâ, sed ex Hypothesi assumptâ fluere. Ipsi verò motus aëris secundùm methodum* Newtonianam *assequi conabimur, nam ipsam ejus propositionem veram esse, etsi ejus demonstratio vitio quodam laboret, persuasum habemus, sed eam ex naturâ motûs puncti Elastici sonori esse deducendam, potius quàm ex motibus aëris, qui variis modis pro ratione agitationis ipsi impressæ peragi possent. Hac autem sunt Viri Illustrissimi verba.*

Propositio XLVII. Lib. II. Princip. Philos. NEWTONI, minus firmâ demonstratione nititur, ut ex eo patet, quod si diversæ prorsus conclusioni demonstrandæ applicetur, eodem successu gaudeat. Id ego cùm pluribus diversis tentassem modis, lubet unum, exempli gratiâ, apponere. Sit, verbi causâ, hoc Theorema à *Newtoniano* omnino diversum, eâdem tamen Demonstratione munitum.

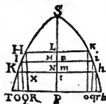
Pulsi-



Pulsibus per Fluidum elasticum propagatis, singulæ Fluidi particulæ, motu uniformiter retardato & accelerato euntes & redeuntes, oscillantur pro lege Gravis ascendentis & descendentis.

Designent AB, BC, CD, &c. pulsuum successivorum æquales distantias, ABC plagam motus pulsuum ab A versus B propagati, E, F, G, puncta tria Physica medii quiescentis in recta BC ad æquales distantias sita, Ee, Ff, Gg, spatia æqualia perbrevia per quæ puncta illa motu uniformiter retardato moventur; ε, φ, γ, loca quævis intermedia illorum punctorum, & EF, FG lineolas physicas seu partes medii lineares punctis illis interjectas & successivè translatas in loca εφ, φγ, & ef, fg. Rectæ Ee æqualis ducatur recta PS, quâ tanquam axe describatur parabola SHIK. Per basim Tt exprimatur totum tempus unius vibrationis, & per ejus partes, partes temporis proportionales exprimantur, sic ut completo tempore quovis TR, vel Tr, si erigatur normalis RH aut rh, & capiatur Eε æqualis RH vel PL, aut rh vel Pl, punctum Physicum E reperiatur in ε. Hâc lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e, & inde redeundo per ε ad E, iisdem retardationis & accelerationis gradibus vibrationem unam peraget cum ascendente & descendente Corpore gravi, Probandum est quod singula medii puncta physica tali motu agitari debeant. Fingamus igitur medium tali motu à causa quâcunque cieri, & videamus quid inde sequatur.

In rectâ Tt, sumantur æquales partes OQ, QR, vel oq, qr, eam habentes rationem ad rectam totam Tt, quam habent æquales rectæ EF, FG ad pulsuum intervallum BC; Et erectis OK, QI, RH, vel ok, qi, rh: demissis etiam si placet KN, IM, HL; Rn, im, hl; quoniam puncta E, F, G, motibus similibus successive agitantur, & vibrationes suas integras itu & reditu compositas interea peragunt dum pulsus transfertur ex B ad C, si TR vel Tr sit tempus ab initio motûs puncti E, erit TQ vel Tq tempus ab initio motûs puncti F, & TO vel To, tempus ab initio motûs puncti G; & propterea Eε, Fφ, Gγ, erunt ipsis RH, vel PL, QI vel PM, & OK vel PN in itu punctorum, vel ipsis rh aut Pl, qi aut Pm, & ok vel Pn in reditu æquales respective: Unde εγ seu EG + Gγ — Eε in itu punctorum æqualis erit EG — LN: in reditu autem æqualis EG + ln. Sed εγ latitudo est seu expansio partis medii EG in loco εγ, & propterea expansio partis illius in itu, est ad ejus expansionem mediocrem ut EG—LN ad EG; in reditu autem ut EG + ln seu EG + LN ad EG. Quare cum sit LN seu HX ad KX seu OR, ut LM ad semiparametrum Parabolæ, & OR ad EG ut Tt ad BC, id est (si ponatur V ad semiparametrum ut BC ad Tt, vel si sit Tt æqualis semiparametro & V æqualis BC) ut semiparameter ad V, & ex æquo LN ad EG ut IM ad V; erit expansio





partis EG punctive Physici F in loco εγ ad expansionem mediocrem quam pars illa habet in loco suo primo EG, ut V — IM ad V in itu, utque V + im ad V in reditu. Unde vis elastica puncti F in loco εγ est ad vim ejus elasticam mediocrem in loco EG, ut $\frac{1}{V - IM}$ ad $\frac{1}{V}$ in itu;

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

itu, in reditu verò ut $\frac{1}{V + im}$ ad $\frac{1}{V}$. Et eodem argumento ictus punctorum physicorum E & G in itu sunt ut $\frac{1}{V - HL}$ & $\frac{1}{V - KN}$ ad $\frac{1}{V}$, & virium differentia ad vim elasticam mediocrem, ut $\frac{KN - HL}{VV - V \times HL - V \times KN + HL \times KN}$ ad $\frac{1}{V}$, hoc est, ut $\frac{KN - HL}{VV}$ ad $\frac{1}{V}$ sive ut KN — HL ad V, si modo (ob angustos limites Vibrationum) supponamus HL & KN indefinite minores esse quantitate V. Quare cùm quantitas V detur, differentia virium est ut KN — HL seu KX, seu OR, hoc est, ob proportionales OR, EF, & Tt, BC, (datasque EF, Tt & BC) constans. Et eodem argumento, differentia virium punctorum physicorum ε & γ in reditu lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est etiam constans. Sed differentia illa (id est, excessus vis elasticæ puncti ε supra vim elasticam puncti γ) est vis qua interjecta medii lineola physica acceleratur aut retardatur, & propterea vis acceleratrix lineolæ physicæ $\varepsilon\gamma$ est constans. Propterea tempus rectè exponetur per ordinatam IM & medii pars linearis $\varepsilon\gamma$ lege præscripta movetur, id est, lege ascendentis descendentisque Gravis, estque par ratio omnium linearum ex quibus medium totum componitur. Q. E. D.

Sed (quod sanè mirum) Prop. XLIX. in quâ ex sua hypothesi NEWTONUS Soni velocitatem computat, eandem dabit conclusionem in nostra, &, ut arbitror, in aliâ quâcunque. Sic

Fingamus medium ab incumbente pondere, pro more aëris nostri, comprimi, sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi in quo pulsus propagatur. Et quo tempore corpus cadet ex altitudine æquali dimidio ipsius A eodem tempore pulsus percurret spatium æquale toti altitudini A. (Id quod congruit cum Corol. 1. dictæ Prop. XLIX.)

Nam stantibus quæ in Propos. XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica singulis vibrationibus describendo spatium PS urgeatur in itu & reditu à vi Elastica quæ ipsius ponderi, æquetur, peraget semivibrationem quo tempore corpus cadet ex altitudine PS, adeoque vibrationem, quo tempore corpus grave caderet ex altitudine 4 PS. Quare, cùm tempora descensus sint in subduplicata ratione longitudinum percursarum, fiet tempus vibrationis unius ad tempus descensus ex altitudine $\frac{1}{2}$ A, in subduplicatâ ratione longitudinis 4 PS ad $\frac{1}{2}$ A, seu 8 PS ad A. Sed vis quâ in singulis punctis urgetur particula EG erat ad ejus vim mediocrem elasticam, ut KN — HL seu KX vel OR ad V, & vis illa mediocris, hoc est pondus incumbens quo lineola EG comprimitur, est ad pondus lineolæ EG, ut A ad EG, adeoque ex æquo, vis quâ lineola EG in singulis punctis urgetur, est ad ejus pondus, ut OR × A ad EG × V, seu ut semiparameter in A, ad VV (est enim OR ad EG ut Tt ad BC, atque ideo ut semiparameter ad V) vel ut 8 PS × A ad BC^2, ob Vq ad BCq ut semiparametri quadratum ad Tt quad. (atque ideo ut 8 PS ad semiparametrum.) Quare cùm tempora quibus æqualia corpora per æqualia spatia impelluntur, sint reciproce in subduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illa Elastica, ad tempus unius vibrationis urgente

vi ponderis, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$. Atque adeo ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, in subduplicatâ ratione BC^2 ad $8PS+A$ & subduplicata ratione $8PS$ ad A, hoc est in ratione integra BC ad A. Sed tempore unius vibrationis pulsus progrediendo conficit latitudinem suam BC. Ergo tempus quo pulsus percurrit spatium BC est ad tempus descensûs ex altitudine $\frac{1}{2}A$, ut BC ad A. Tempus autem quo pulsus percurrit spatium A est ad tempus quo percurrit spatium BC, ut A ad BC, adeoque æquale tempori descensûs ex altitudinè $\frac{1}{2}A$.

Hìc notandum, quod absurda sit, & facilè refutanda hypothesis hìc assumpta, quod nempe pulsus propagetur, particulis euntibus & redeuntibus pro lege gravis ascendentis & descendentis. Verùm id ipsum est quod Demonstrationem NEWTONIANAM evertit, ostendendo nimirum eam ipsam absurdæ hypothesi probandæ æque inservire.

Hactenus Vir Doctissimus; sequantur ea quibus restitui posse Newtonianam *demonstrationem credimus.*

De Motibus in fluido Elastico genitis.

1. *Hypothesis.* Suppono medium Elasticum constare punctis, quantitate exiguâ sed finitâ à se dissitis, & vi repulsivâ donatis quæ distantiæ illorum punctorum sit reciproce proportionalis; nec ad alia puncta præter ea quæ immediatè proxima sunt sese extendit: Hoc enim modo quæcumque sit partium medii Elastici natura, satis feliciter repræsentantur effectus qui ex eorum Elaterio pendent.

2. *Cor.* 1. Medii Elastici status naturalis est ut puncta ejus Elastica à se mutuò æqualiter distent.

3. *Cor.* 2. Puncta elastica velocitatem finitam suscipere possunt vel per immediatum contactum corporis moti, velocitate suâ finitâ punctum elasticum urgentis vel per actionem continuatam vis repulsivæ punctorum elasticorum si ab unâ parte fortior sit quàm ab aliâ. Reliquas causas motus, ut gravitatem, vires centrales &c. hic non consideramus.

PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

4. *Theor.* 1. Si velocitas finita quomodocumque excitetur in puncto Elastico, distantiæ ejus à proximo puncto versus quod movetur minuetur finitâ quantitate antequam in reliquo medio factus sit ullus motus ullaque compressio: Sint A, B, C, tria puncta medii Elastici æquidistantia moveatur A versus B velocitate finitâ, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum primi ordinis A a, Vis motrix puncti B erit differentia virium repulsivarum puncti A & C, est autem vis repulsiva puncti A ubi pervenit in a, ad vim puncti C (si immotum supponatur) ut BC ad Ba, & dividendo vis motrix puncti B, ad vim repulsivam puncti C, ut $BC - Ba\ (= Aa)$ ad Ba. Sed A a, est infinite parvum ex Hypothesi & B a est finita quantitas, ergo vis motrix puncti B, est infinite parva vis respectu vis repulsivæ puncti C, quæ vis repulsiva pro ipsa vi naturali elaterii assumi potest; Vis autem Elasticitatis est ex genere pressionum, tempore infinitè parvo velocitatem infinitè parvam generaret, quæ velocitas infinite parva durante tempore infinitè parvo, spatium infinitè parvum secundi ordinis describere faceret: Ergo siquidem vis motrix puncti B hujus vis respectu est infinitè parva, tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum duntaxat tertii ordinis describere faceret; nullus ergo motus in puncto B generabitur nisi spatium descriptum A a sit finita quantitas, nulla ergo erit compressio inter puncta B & C. Q. E. D.

A a B C

315.

5. *Cor.* 1. Nullus ergo motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi post tempus finitum, nam spatium finitum A a, nonnisi tempore finito percurri potest per velocitatem finitam.

6. *Cor.* 2. Et velocitas finita in puncto Elastico excitata non mutabitur nisi post tempus finitum & postquam quantitate finitâ processerit. Sint enim medii particulæ Z, A, B, procedat punctum A velocitate finitâ utcumque in id punctum

Z A B a

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

ctum producta, & tempore infinitè parvo describat spatium infinitè parvum A a, vis quâ sistetur ea velocitas orietur ex differentia virium Elasticarum puncti Z & puncti B, estque vis puncti B ad vim puncti Z ut A B + A a ad A B — A a, & dividendo. Vis sistens punctum A ad vim puncti Z, ut 2 A a ad A B — A a, sed A a est infinitè parvum respectu quantitatis A B — A a, ergo, vis sistens punctum A est infinitè parva, respectu vis puncti Z, quæ est vis elaterii naturalis, ideo (eodem modo ac in Theorematis demonstratum fuit) probabitur, vim illam tempore infinitè parvo spatium infinitè parvum tertii ordinis producturam: Quare etiamsi singula puncta à parte B posita æquali vi agerent eorumque numerus infinitus foret, vires illæ omnes non nisi spatium infinitè parvum secundi ordinis infinitè parvo tempore ex spatio A a eodem tempore descripto detraherent, maneret itaque idem, velocitates ergo puncti A non mutabitur ex actione omnium punctorum medii Elastici, nisi post tempus finitum & postquam finita quantitate processerit.

Z A B

a

7. *Cor.* 3. Si considerentur innumera puncta Elastica ordine in lineâ rectâ posità,

Ȧ Ḃ Ċ Ḋ Ė &c.

nec attendatur ad alia quæ circumquâque solidum spatium constituunt, si unum velocitate finitâ quâcumque ex causâ urgeatur, quæ constans in eo maneat, quoddam tempus finitum requiretur ut eadem velocitas in proximo puncto excitetur, paulo longius tempus ut in tertio producatur, sicque deinceps, nam per Cor. 1. nullus motus ex puncto medii Elastici in punctum proximum transfertur nisi elapso finito tempore, velocitas ergo primi puncti ad secundum non transit nisi post finitum tempus ab initio motus primi puncti & velocitas secundi puncti ad tertium non transit nisi post finitum tempus ab initio motûs secundi ejus puncti. Breviori autem tempore excitari debet data velocitas in secundo puncto per actionem continuatam ab initio motûs primi puncti, quàm in tertio per actionem continuatam ab initio motûs puncti secundi: cùm enim velocitas primi puncti sit finita & æquabilis, compressio exinde orta ab initio ejus motûs est major quàm compressio quæ per motum secundi puncti ab initio ejus motus acquiritur, siquidem ad celeritatem primi puncti nonnisi per gradus pervenit, ergo vis motrix quæ urget secundum punctum ab initio, fortior est quam ea qua urgetur tertium punctum ab initio, ergò tertium punctum datam illam celeritatem tardius acquiret, & pari ratiocinio, cum vis motrix secundi puncti sub initio fortior sit quam vis motrix tertii, compressio inter secundum & tertium punctum major erit sub initio quàm inter tertium & quartum; unde vis motrix quæ urget tertium punctum sub initio, fortior est quàm ea quâ urgetur quartum punctum; Ergo cùm punctum sequens aliqualem velocitatem suscipere non possit nisi postquam punctum præcedens spatium finitum descripserit, & longiori tempore ab initio motûs suscepti datam velocitatem possit suscipere, liquet quod ea data velocitas nonnisi successivè ad successiva medii Elastici puncta pertingit.

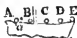
8. *Schol.* Hinc patet discrimen inter motum in medio Elastico excitatum & motum qui excitatur in medio non Elastico cujus partes contiguæ sunt, in tali enim medio, pressio cuidam particulæ applicata ad omnes partes in directum positas, aut divaricantes, puncto temporis extendi debet; Motus verò instanti in circulum propagari debet; At in medio Elastico, Pressio ab uno puncto ad alterum non continuatur nisi per accessum punctorum medii, sive per realem motum, qui antrorsum propagetur, & post tempus finitum à puncto primum moto ad reliquas partes fluidi successivè perveniat.

9. PROB. Si punctum medii Elastici finitâ velocitate moveatur quæ constans maneat, definire motum punctorum sequentium in lineâ rectâ positorum, omissis aliis sphæricè circumquaque positis.

Primus Casus. Sint ordine puncta A, B, C, D, &c. fingatur ea omnia ad æquales distantias in navi posita, & punctum B ita adhærere malo ut ex ejus motu, navis motum suscipiat & reliqua puncta vehat; Recipiat verò punctum A velocitatem finitam

quæ

quæ constans maneat relatè ad navis punctum in quo versabatur, & ponatur primo eam versus B tendere; ex accessu puncti

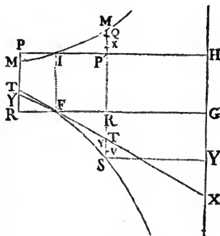


A versus B vis repulsiva particulæ A fortior fiet vi repulsivâ particulæ C, quare ex differentia virium nascetur vix motrix particulæ B, Procedat enim A ad B quantitate A a, erit vis particulæ C in B, ad vim particulæ A in B, ut a B ad B C sive A B (quia particularum intervalla A B, B C initio erant æqualia) & dividendo, vis particulæ C, ad differentiam virium quæ est vis motrix puncti B ut a B ad A B — a B sive A a, sed vis particulæ C est vis ipsa elaterii in statu naturali, ex Hypot. Ergo Vis elaterii est ad vim moventem punctum B, ut a B ad A a. Repræsentet itaque I H tempus quo distantia A B punctorum elasticorum per velocitatem datam puncti A percurritur, dicaturque illud tempus a, ducatur deorsum ad angulos rectos linea H G quæ vim elasticam singulæ particulæ medii in statu naturali designet, ductaque F G parallela I H, asymptotis F G & G H & dignitate æquali $a \times$ H G describatur Hyperbola, transibit per punctum I, (siquidem I F = H G & F G = I H = a, ideoque I F × F G = H G × a) & si I P repræsentet tempus quo durante A motum est, dicaturque x, Dico quod P M repræsentabit vim motricem puncti B eo temporis momento. Erit enim ex naturâ Hyperbolæ, G R : G F = F I (H G) : R M & dividendo G R (H P) : F R (I P) = H G : P M; spatia verò uniformiter descripta sunt ut tempora; ergo A B : A a = I H : I P & dividendo a B : A a = H P : I P, sed a B ad A a ut vis elaterii ad vim motricem puncti B; ergo HP : IP = HG : PM = vis elaterii ad vim motricem puncti B, sed H G repræsentat vim elaterii, ergo P M ubique repræsentat vim motricem puncti B.

Repræsentabit ergo etiam linea P M velocitatem momento P genitam, & area I P M totam velocitatem à puncto B acquisitam tempore I P sive tempore quo percurritur A a à puncto A.

Describatur verò ex puncto F Logarithmica cujus axis sit linea H G producta, subtangens linea quævis G X quæ dicatur s, ductâque ex puncto P lineâ P T S dico quod linea T S repræsentabit velocitatem tempore I P acquisitam & area F T S spatium à puncto B descriptum.

Est enim (*per nat. Logarith.*) area I F R M, ad Rect. I F G H ut R S ad G X, & Rect. I F G H ad Rect. I F R P ut F G ad F R ut G X ad R T, ideoque ex æquo area I F R M ad Rect. I F R P ut R S ad R T, & dividendo, est I P M ad I F R P ut T S ad R T; Ergo area I P M est ad T S in Ratione datâ, ob datum P R & rationem F R ad R T datam, ut pote æqualem ra- 315.
tioni F G ad G X, est ergo T S ut I P M,



sive ut velocitas puncti B, & cùm perpendicula inter ordinatas T S sint æqualia momentis temporis in linea I P sumptis, area F T S erit ut spatium à puncto B percursum.

Eodem modo constabit, quod si vis elastica ageret more gravitatis tempore a, velocitas quam eo tempore generaret, designaretur per subtangentem s, & spatium descriptum foret $\frac{a\,s}{2}$, dicatur verò m velocitas data puncti A, data erit ratio s ad m, intervallum particularum A B erit $m\,a$, & spatium A a velocitate datâ percursum est $m\,x$, notandum verò est quod ea

velocitas s fit plusquam dupla velocitatis globi tormentarii, unde liquet quod in casibus sequentibus ubi velocitas puncti A longe minor velocitate globi tormentarii est intelligenda; quantitas $\frac{m}{s}$ est fractio satis parva.

Ad calculum verò facile revocatur linea F T S & area T S; 1°. enim cùm subtangens sit s, ordinatarum F G, S Y differentia sit x, area tota F G S Y (*ex nat. Log.*) est $s\,x$, intervallum R S est $s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. Rectang. R G × R S $= \overline{a - x} \times s \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. & quoniam est F G (a) : G X (s) = F R (x) : RT est R T $= \frac{sx}{a}$ & Triang. F R T $= \frac{sx^2}{2a}$. Detrahantur ergo Rectang. RG×RS & Tr. FRT ex area F G S Y remanet area F T S $= sx - \overline{sa - sx} \times \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a}$ $= sx \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3}$ &c. $- sx \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx^2}{2a} = \frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a}$ $+ \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ + &c.

erit itaque A a ad B b, ut $m\,x$, ad $\frac{sx^2}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. vel ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit verò recta T S = R S − R T $= \frac{sx}{a} \times 1 + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. $- \frac{sx}{a} = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2}$ &c. ideoque velocitas data puncti A erit ad velocitatem puncti B ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$.

Coroll. Si quæratur in hac Hypothesi quo tempore & spatio descripto punctum B velocitatem puncti A obtineat, fiat $m = \frac{sx}{a} \times \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. sed cum spatium A a sit ad B b ut m ad $\frac{sx}{a} \times \frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2}$ &c. erit A a ad B b ut $\frac{x}{2a} + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^3}{4a^3}$ &c. ad $\frac{x}{2 \times 3a} + \frac{x^2}{3 \times 4a^2} + \frac{x^3}{4 \times 5a^3}$ &c. cumque primus terminus, primæ seriei sit accuratè triplus primi termini alterius seriei, reliqui verò plusquam tripli; Punctum A totam suam celeritatem puncto B communicat antequam id punctum B tertiam partem ejus spatii descripserit quod descripsit punctum A.

Tempus verò x exprimetur per Radices hujus æquationis $o = \frac{ma}{s} - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Ubi liquet quod quando $\frac{m}{s}$ est fractio, tunc x est minus quam a, & series est Convergens, ideoque ex primo termino & proximo assumptis erit $x = a\sqrt{\frac{2m}{s}}$; rem accuratius expendere isto in casu, qui merè fictitius est, nihil est necesse.

Casus secundus. Si A moveatur uniformiter & acceleret punctum B quod etiam acceleret punctum C (nullâ habitâ ratione

ne motûs puncti D) erit in hoc Casu vis repulsiva A ad vim repulsivam C ut A B — B b + C c ad A B — A a + B b & differentia virium sive vis motrix puncti B ad vim repulsivam puncti C, ut A a — 2 Bb + Cc ad AB — Aa + Bb; est præterea vis repulsiva puncti G ad vim Elaterii ut AB ad AB — Bb + Cc; & denique vis Elastica est ad vim moventem punctum B in primo casu ut A B — A a ad A a;

A a B b C c D &c.

ideoque ex æquo vis vera motrix puncti B ad ejus vim in primo casu ut

$$\left.\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right.$$

In eâdem autem Hypothesi vis motrix puncti C, hoc modo determinatur, est vis repulsiva puncti B ad vim repulsivam puncti D ut D c ad b c sive ut A B — C c, ad A B — B b + C c, ergo vis motrix puncti C ad vim repulsivam puncti D, ut B b — 2 C c ad A B — B b + C c.

Hæc vis repulsiva puncti D est ad vim Elasticam ut A B ad A B — C c, denique vis Elastica ad vim moventem punctum B in primo Casu, ut A B — A a, ad A a, ideoque ex æquo vis motrix puncti C, ad vim moventem punctum B in primo Casu ut

$$\left.\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right.$$

Ut verò determinetur motus puncti B in isto casu (qui pro vero haberi potest ob exiguitatem motûs puncti D qui negligitur) concipiatur P M ad P Q ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

& idem P M ad P X ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Ab - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

curvæ quæ transibunt per Q & X erunt loci virium motricium puncti B & puncti C, areæ I P Q, I P X erunt ut velocitates per illas vires dato tempore I P genitæ, & si sumantur ordinatæ T V & T Y, tales ut T S, T V, T Y sint ut areæ I P M, I P Q, I P X, areæ F T V, F T Y erunt ut spatia B b & C c: sit ergo

$TV = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + Dx^5$ &c.

& $TY = Ox^4 + Pa^5 + Ra^6$ &c.

erit $TV\,dx = Ax^2dx + Bx^3dx + Cx^4dx + Dx^5dx$ &c.

$TY\,dx = Ox^4dx + Px^5dx$

Unde integrando, est area $FTV = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6}$ &c. $= Bb$

& $FTY = \frac{Ox^5}{5} + \frac{Px^6}{6}$ &c. $= Cc$

fluxio autem $TV = 2Axdx + 3Bx^2dx + 4Cx^3dx + 5Dx^4dx$ &c. 315

& fluxio $TY = 4Ox^3dx + 5Px^4dx$ &c.

Erat autem fluxio $TS = \frac{sxdx}{a^2} \times 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4}$ &c.

Sed P M ad P Q, ut fluxio T S ad fluxionem T V

& P M ad P X ut fluxio T S ad fluxionem T Y

ergo fluxio T S ad fluxionem T V ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Aa + Bb \\ AB - Bb + Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Aa - 2Bb + Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

& eadem fluxio T S ad fluxionem T Y ut

$$\left.\begin{array}{l} AB - Bb + Cc \\ AB - Cc \\ Aa \end{array}\right\} \text{ ad } \left\{\begin{array}{l} Bb - 2Cc \\ AB \\ AB - Aa \end{array}\right.$$

In his proportionibus multiplicatis extremis & mediis & terminorum collatione factâ, invenientur lineæ T V & T Y & areæ F T V & F T Y, sicque tempora quibus acquiruntur velocitates T V, T Y & spatia descripta dum acquiruntur, obtineri poterunt, Calculum istum prolixissimum in compendio exhibebo; primò invenitur quod fluxio $TS \times AB \times AB - Aa = sm^2xdx$, est præterea $Aa - 2Bb + Cc$ æquale $mx + * - \frac{2A}{3}x^3 - \frac{2B}{4}x^4 - \frac{2C - O}{5}x^5 - \frac{2D - P}{6}x^6$ &c. estque $Bb - 2Cc = \frac{A}{3}x^3 + \frac{B}{4}x^4 + \frac{C - 2O}{5}x^5 + \frac{D - 2P}{6}x^6$ &c. quæ series multiplicatæ per sm^2xdx dant facta extremorum in utrâque proportione.

Ut habeantur facta mediorum, in primâ proportione est $\overline{AB - Bb + Cc} \times Aa =$
$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-P}{6}x^6$; ducatur in $AB - Aa + Bb =$

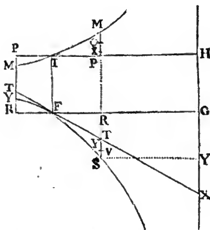
$$ma - mx + * + \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^4}{4} + \frac{Cx^5}{5} + \frac{Dx^6}{6} \text{ fit}$$

$$mx \times m^2a^2 - m^2ax + * + * + \frac{mAx^4}{3} + \frac{mBx^5}{4} + \frac{C-O}{5}mx^6 \text{ \&c.}$$
$$\frac{Omax^5}{5} + \frac{Pmax^6}{6}$$
$$- \frac{A^2x^6}{3 \times 3}$$

Quod ducatur in fluxionem $TV =$
$dx \times 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 + 5Dx^4 + 6Ex^5 + 7Fx^6$ factum erit
$$mxdx \times 2m^2a^2Ax - 2m^2aAx^2 - 3m^2aBx^3 + 4m^2aCx^4 + \frac{2mA^2x^5}{3} + \frac{18mBAx^6}{3 \times 4}$$
$$+ 3m^2a^2Bx^2 + 4m^2a^2Cx^3 + 5m^2a^2Dx^4 - 5m^2aDx^5 + \frac{2maAOx^6}{5} \text{ \&c.}$$
$$+ 6m^2a^2Ex^5 - 6m^2aEx^6$$
$$+ 7m^2a^2Fx^6$$
termini omnes hujus seriei dividantur per sm, & conferantur cum correspondentibus terminis seriei quam exhibet factum extremorum primæ proportionis & habebitur $m = \frac{2ma^2A}{s}$, ideoque $A = \frac{s}{2a^2}$, tum $\frac{-2maA}{s} + \frac{3ma^2B}{s} = 0$, ideoque $B = \frac{s}{3a^3}$, 3°. $-\frac{2A}{3} = -\frac{3maB}{s} + \frac{4ma^2C}{s}$, unde invenitur $C = \frac{s}{4a^4} - \frac{s}{3 \times 4ma^4}$, 4°. $-\frac{2B}{4} = -\frac{4maC}{s} + \frac{5ma^2D}{s}$ est ergo $D = \frac{s}{5a^5} - \frac{6s^2}{3 \times 4 \times 5ma^5}$; 5°. $\frac{O - 2C}{5} = + \frac{2mA^2}{3s} - \frac{5maD}{s} + \frac{6ma^2E}{s}$ est ergo $E = \frac{s}{6a^6} - \frac{46s^2}{3 \times 4 \times 5 \times 6ma^6} + \frac{2s^3}{3 \times 4 \times 5 \times 6m^2a^6} + \frac{sO}{5 \times 6 \times ma^2}$ & denique invenitur $F = \frac{s}{7a^7} - \frac{252s^2}{3.4.5.6.7ma^7} + \frac{24s^3}{3.4.5.6.7m^2a^7} + \frac{sP}{6.7ma^2}$.

In alterâ Proportione resumatur factum $\overline{AB - Bb + Cc} \times Aa$ quod est
$mx \times ma + * + * - \frac{Ax^3}{3} - \frac{Bx^4}{4} - \frac{C-O}{5}x^5 - \frac{D-Px^6}{6}$ ducatur in $AB - Cc$ quod est
$$ma + * + * + * + * - \frac{Ox^5}{5} - \frac{Px^6}{6} \text{ \&c. fit}$$
$mx \times m^2a^2 + * + * - \frac{maAx^3}{3} - \frac{maBx^4}{3} - \frac{maCx^5}{5} - \frac{maDx^6}{6}$ &c. Multiplicetur per fluxionem TX quæ est $dx \times, 4Ox^3 + 5Px^4 + 6Qx^5 + 7Rx^6$ &c.
habetur $mxdx \times 4m^2a^2Ox^3 + 5m^2a^2Px^4 + 6m^2a^2Qx^5 + 7m^2a^2Rx^6 + 8m^2a^2Sx^7$
$$- \frac{4maAOx^6}{3} - \frac{4maBOx^7}{4}$$
$$- \frac{5maAOx^7}{3}$$

termini omnes hujus seriei dividantur per sm & conferantur cum terminis correspondentibus seriei quam exhibet factum extremorum secundæ proportionis, & habebimur



tur $\frac{A}{3} = \frac{4ma^3O}{s}$ ideoque $O = \frac{s^2}{2\times3\times4ma^4}$: 2°. $\frac{B}{4} = \frac{5ma^2P}{s}$ hinc $P = \frac{s^3}{3\times4\times5ma^5}$ 325.
3°. $\frac{C}{5} - \frac{2O}{5} = \frac{6ma^2Q}{s}$, hinc $Q = \frac{s^3}{4\times5\times6ma^6} - \frac{2ss}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$ &c. unde tandem obtinentur hæ series, quibus velocitates & spatia descripta exprimuntur: exprimitur ergo velocitas puncti B,

$$\text{per } TV = \frac{sx^2}{2a^2} + \frac{sx^3}{3a^3} + \frac{sx^4}{4a^4} + \frac{sx^5}{5a^5} + \frac{sx^6}{6a^6} + \frac{sx^7}{7a^7} \&c.$$
$$- \frac{2s^2x^4}{2.3\times4ma^4} - \frac{6s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} - \frac{46s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^6} - \frac{390s^2x^7}{3.4.5.6.7ma^7} \&c.$$
$$+ \frac{5s^3x^6}{2\times3\times4\times5\times6m^2a^6} + \frac{50s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^7} \&c.$$

$$\text{area } FTV = \frac{sx^3}{2\times3a^2} + \frac{sx^4}{3\times4a^3} + \frac{sx^5}{4\times5a^4} + \frac{sx^6}{5\times6a^5} + \frac{sx^7}{6\times7a^6} + \frac{sx^8}{7\times8a^7} \&c.$$
$$- \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^4} - \frac{6s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} - \frac{46s^2x^7}{3\times4\times5\times6\times7ma^6} - \frac{390s^2x^8}{3.4.5.6.7.8ma^7}$$
$$+ \frac{5s^3x^7}{2\times3\times4\times5\times6\times7m^2a^6} + \frac{50s^3x^8}{2.3.4.5.6.7.8m^2a^7}$$

$$\text{velocitas puncti C exprimitur per } TX = \frac{+s^2x^4}{2\times3\times4ma^4} + \frac{s^2x^5}{3\times4\times5ma^5} + \frac{s^2x^6}{4\times5\times6ma^6} \&c.$$
$$- \frac{2s^3x^6}{3\times4\times5\times6m^2a^6}$$

$$\text{area denique } FTX = \frac{s^2x^5}{2\times3\times4\times5ma^4} + \frac{s^2x^6}{3\times4\times5\times6ma^5} + \frac{s^2x^7}{4\times5\times6\times7ma^6} \&c.$$
$$- \frac{2s^3x^7}{3\times4\times5\times6\times7m^2a^6}$$

 Fin-

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

A a   B b   C c   D d   E e

Punctorum ſequentium motus determinari poſſent ſimili ratione; Etenim vires motrices punctorum B, C, D, E &c. ſunt ut A a — 2 B b, B b — 2 C c, C c — 2 D d, D d — 2 E e, &c. Vis enim cujuſvis puncti ut C eſt ad vim puncti E ut d e ad c d ſive ut A B + E e — D d ad A B + D d — C c & dividendo vis motrix puncti D ad vim puncti E ut C c — 2 D d + E e ad c d; vis puncti E eſt ad vim Elaſticam naturalem ut A B ad e d, ergo vis motrix puncti D ad vim Elaſticam naturalem ut $\left.\frac{\mathrm{Cc} - 2\,\mathrm{Dd} + \mathrm{Ee}}{\mathrm{AB}}\right\}$ ad $\left\{\begin{matrix}\mathrm{cd}\\ \mathrm{ed}\end{matrix}\right.$ ſive ut C c — 2 D d + E e ad $\frac{\mathrm{cd} \times \mathrm{de}}{\mathrm{AB}}$, ergo alternando eſt vis motrix puncti D ad C c — 2 D d + E e ut vis Elaſtica naturalis ad $\frac{\mathrm{cd} \times \mathrm{de}}{\mathrm{AB}}$, ideóque in paulò majori ratione quàm vis elaſtica ad A B quia tam c d quàm d e paulò minores ſunt quàm A B, ſed vis motrix puncti D eſt ad C c — 2 D d in majori ratione quam eadem vis motrix ad C c — 2 D d + E e, ergo vis motrix puncti D eſt ſemper ad C c — 2 D d in majori ratione quam vis elaſtica ad A B, cùmque id verum ſit in omnibus punctis & hæc ultima ratio ſit conſtans, Ratio vis motricis puncti cujuſvis ad ſpatium à præcedenti puncto deſcriptum dempto duplo ſpatii ab ipſo hoc puncto deſcripti, erit ſemper major ratione conſtante, non tamen multo, ideo Phyſicè pro conſtante aſſumi poteſt, hinc alternando vires illæ motrices, punctorum ſucceſſivorum, ſunt in ratione indicatâ.

Sed calculum pro illis punctis inſtituere neceſſe non eſt, per Analogiam enim ex motu duorum priorum punctorum B & C reliquorum motum ſtatuere, ſufficiens videtur.

10. Si, miſſis cæteris caſibus, quæratur intervallum temporis quo velocitas data m, in punctis ſucceſſivis B, C, generetur, ut & ratio ſpatiorum A a, B b, C c eo tempore deſcriptorum; Fiat T V $= m$, & utroque ducto in $\frac{a^2}{s}$, erit $\frac{a^2 \mathrm{TV}}{s} = \frac{a^2 m}{s}$, dicatur $\frac{a^2 m}{s} = z^2$ & in ſerie $\frac{a^2 \mathrm{TV}}{s}$, ponatur ubique $\frac{m}{z^2}$ loco $\frac{s}{a^2}$, hæc ſeries in hanc formam migrabit

$$z^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} + \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3} + \frac{x^6}{6a^4} \ \&c.$$
$$-\frac{2x^4}{2.3.4z^2} - \frac{6x^5}{3.4.5az^2} - \frac{46x^6}{3.4.5.6a^2z^2} \ \&c.$$
$$+\frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} \ \&c.$$

Juxta Analyſeos *Newtonianæ* Methodum ſumantur omnes termini in quibus differentiæ exponentium x & z minimum efficiunt valorem, fiantque æquales z^2 reliqui termini ſeriei $\frac{a^2 \mathrm{TV}}{s}$ negligi *poſſunt*, quia per dignitates quantitatis $\frac{x}{a}$ reſpectu eorum qui aſſumpti fuerunt multiplicantur; (in Hypotheſi quæ velocitatem m alicujus momenti aſſumeret hi termini negligendi non forent, ſed in caſu præſenti velocitatem m minimam ſupponere nobis licet, cùm de tali tantum in futurum ſimus acturi) erit ergo

$$z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^4}{2.3.4z^2} + \frac{5x^6}{2.3.4.5.6z^4} - \frac{14x^8}{2.3.4.5.6.7.8z^6} + \frac{41x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10z^8} - \frac{122x^{12}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12z^{10}} \ \&c.$$

(qui termini continuatâ ſerie T V inveniuntur) & æquatione per approximationem ſoluta invenietur $x^2 = 3.57z^2 = \frac{3.57a^2 m}{s}$.

Jam verò in areâ F T V quæ ſpatium B b exprimit, loco $\frac{s}{a^2}$ ponatur ut prius $\frac{m}{z^2}$ & aſſumantur termini in quibus differentia exponentium quantitatum x & z minima eva-

evadit, ii sunt $\frac{mx^3}{2\times 3z^2} - \frac{2mx^5}{2.3.4.5z^4} + \frac{5mx^7}{2.3.4.5.6.7z^6} - \frac{14x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9z^7}$ in quibus si valor $x^2 = 3.57z^2$ substituatur, fiet hæc series $mx \times \frac{3.57}{2\times 3} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5} + \frac{5\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7} - \frac{14\times 3.57\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{2.3.4.5.6.7.8.9}$ &c. sive $Bb = mx \times .428$.

Eodem modo valor C c invenietur ex hac serie $\frac{mx^5}{2\times 3.4.5z^4} - \frac{2mx^7}{3\times 4.5.6.7z^6}$ sive substituto valore x^2, erit $Cc = mx \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4.5.} - \frac{2\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6.7}$ &c. sive $Cc = mx \times .07$ sive circiter sexta pars intervalli à puncto B descripti eodem tempore quo acquirit celeritatem m.

Et Celeritas à puncto C tunc temporis acquisita erit iisdem substitutionibus factis $m \times \frac{3.57\times 3.57}{2.3.4.} - \frac{2\times 3.57\times 3.57\times 3.57}{3.4.5.6}$ &c. $= m \times .279$ &c. circiter $\frac{1}{4}$ celeritatis m.

11. Quod si eventus quæratur in hypothesi velocitatem m non esse quamminimam; supponatur illa æqualis ipsi s; si quæratur spatium descriptum à puncto B, dum ejus velocitas fit m, fiat series $TV = m$, & utroque ducto in x, erit $xTV = mx$, ergo collatâ serie xTV, & FTV habebitur ratio spatiorum percursorum A a & B b, sed illæ series posito $\frac{s}{m} = 1$. sunt

$$xTV = \frac{sx^3}{2a^2} + \frac{sx^4}{3a^3} + \frac{sx^5}{6a^4} + \frac{sx^6}{10a^5} + \frac{sx^7}{30a^6} \text{ \&c.}$$

$$\& FTV = \frac{sx^3}{6a^2} + \frac{sx^4}{12a^3} + \frac{sx^5}{30a^4} + \frac{sx^6}{60a^5} + \frac{11sx^7}{2160a^6} \text{ \&c.}$$

Ubi liquet quod primus terminus primæ seriei sit triplus primi termini secundæ, reliqui verò termini primæ seriei reliquorum terminorum secundæ seriei plusquam tripli, unde liquet quod. A a esse magis quam triplum spatii per punctum B descripti usque dum celeritatem m recipiat; Ex quo consequitur, quod siquidem B eo momento non est in medio inter puncta A & C, sed vicinius puncto A ad minimum sextâ parte spatii à puncto A descripti ab eo ulterius urgetur & acceleratur, celeritatemque majorem quam m recipit donec ad medium inter A & C perveniat, ibique cum celeritate majore quàm A feratur, versus C magis accedet, sicque vim repulsivam puncti C sentiet, dumque ultra medium inter A & C promovebitur sensim tardabitur, tandem destructo ejus excessu celeritatis supra celeritatem m, cùm sit vicinius puncto C quam puncto A diminuetur ulterius ejus celeritas m, ideoque puncto A vicinius gradatim fiet, in medio inter A & C iterum occurret, sed cum velocitate diminutâ, quare perget vicinius fieri puncto A, sicque ab ipso velocitatis incrementum de novo accipiet, sicque perpetuò oscillabitur punctum B circa medium inter punctum A & punctum C ad morem fibræ sonantis; Eâque ratione fit ut Particulæ aeris magnâ velocitate pulsæ sonum edant sponte, ut in tonitru, pulvere fulminante, flagellis, tapetibus aut lodicibus fortiter excussis &c.

315.

Sed ubi m minima sit, punctum B eam celeritatem m acquisivit eo tempore quo parùm abest a medio inter puncta A & C, (per hujus n. 10.) una circiter vicesima spatii à puncto A descripti, ideoque agitationes supra dictas exiguas incipit quas pro nullis habere Physicis licere debet, quamvis Mathematicè non omninò nullæ sint.

12. Supposito ut prius velocitatem datam m esse minimam, ut obtineatur intervallum temporis quo punctum C celeritatem eam datam m acquiret sumpto ut prius $z^3 = \frac{a^3 m}{s}$ fiat $TX = m$ & $\frac{a^4 m^2}{s^2} TX = mz^4$ & ponatur ubique in serie TX, $\frac{m}{z^2}$ pro $\frac{s}{a^2}$ fiet $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} + \frac{mx^5}{3.4.5}$ &c. sive sumptis terminis in quibus exponentes quantitatum x & z differentiam minimam habent, erit $mz^4 = \frac{mx^4}{2.3.4} - \frac{4mx^6}{2.3.4.5.6z^2}$

+

$$+ \frac{13 m x^8}{2.3.4.5.6.7.8 z^4} - \frac{40 m x^{10}}{2.3.4.5.6.7.8.9.10 z^6}$$

&c. & æquatione per approximationem soluta, invenitur $x^2 = 9\frac{2}{5} z^2$. Et seriem FTX ulterius continuando & calculum instituendo ut pro serie F T V factum est, invenitur quod vis à puncto A emensa, dum punctum C velocitatem m acquirit, est ad viam quam ipsum punctum C emetitur, ut 100 ad 32. sive fere ut 3 ad 1. Quod quidem paulo majus est vero, quia omissa est consideratio motus puncti D, quod cum discedat à puncto C efficit ut vis B in ipsum C sit fortior, brevioriquc tempore motum m ipsi impertiatur.

13. Hinc, cùm tempus quo punctum B celeritatem datam m acquisivit sit $z\sqrt{3.57}$ & tempus quo punctum C eam celeritatem acquisivit sit $z\sqrt{9\frac{2}{5}}$, illa tempora sunt ut $\sqrt{3.57}$ ad $\sqrt{9\frac{2}{5}}$ sive ut 19 ad 30 fere ut 2 ad 3; cùm ergo punctum A uniformiter moveatur, spatium quod punctum A describit dum C acquirit velocitatem m, est ad spatium quod idem punctum A descripserat dum B eamdem velocitatem m acquisiverat, sicut 3 ad 2; spatium verò quod C descripsit dum eam celeritatem acquisivit, est proximè tertia pars spatii eodem tempore ab A descripti, & spatium quod B describit dum eamdem celeritatem m acquirit est fere dimidia pars spatii eo tempore ab A descripti, ergo illa spatia à punctis C & B descripta, donec velocitatem m singula acquirant sunt æqualia.

14. Ex analogiâ verò deducetur quòd spatium quod punctum quartum D describit, dum velocitatem m attingit, erit 4a. pars spatii ab A descripti, siquidem spatium a 2do. puncto descriptum est dimidia pars spatii ab A descripti, spatium à 3o. puncto descriptum tertia pars spatii descripti ab A &c. Imo eum ordinem accuratius observari in punctis remotioribus statuere licet quod punctum C tertiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m acquirit, accuratius describat quàm B dimidiam partem spatii ab A descripti dum velocitatem m suscipit. Calculum tentare potest qui hac Analogiâ rem sufficienter demonstrari non censebit, & B. L. ignoscere rogamus quod talem laborem subire piguerit.

Et eadem Analogiâ (art. 13.) deducetur, spatia quæ percurrunt successiva puncta D, E dum velocitatem m acquirunt, æqualia esse iis quæ puncta singula B & C descripserunt.

15. Quibus admissis sequitur diminutionem intervalli inter particulas medii, cùm motu communi cum puncto A feruntur, esse ubicumque eamdem, & æqualem dimidio spatio ab A descripto dum B celeritatem m acquirit.

Nam cùm A bis id dimidium spatium descripserit & B semel dum B communem cum A motum suscipit, contrahitur spatium inter A & B dimidio illo spatio; A processit ter illo dimidio spatio & C semel dum C communem cum B & A motum suscipit, ergo intervallum inter A & C duplo ejus dimidii spatii diminutum est, sed inter A & C duo sunt particularum intervalla A & B, B & C, & primum intervallum est contractum dimidio illo spatio, ergo intervallum inter B & C eodem dimidio intervallo diminutum esse debet, sicque de cæteris.

16. Ideo si quolibet tempore elapso sumatur via tota puncti A, ea via æqualis erit summæ diminutionum *intervallorum* inter omnes particulas ad quas celeritas m communicata fuit; cùm ergo motus puncti A sit uniformis, uniformiter etiam crescit numerus particularum ad quas celeritas m communicatur; & numerus earum particularum æqualis erit viæ à puncto A percursæ divisæ per diminutionis intervalli unius quantitatem.

17. Manente autem fluido eodem, sed mutatâ celeritate puncti A, tempora quibus puncta successiva medii celeritatem ejus puncti A suscipiunt eadem tamen manent: Nam si in formula $x^2 = \frac{3.57 a^2 m}{r}$ quâ determinatur quadratum temporis quo punctum B recipit celeritatem puncti A substituantur loco m & r quantitates ipsis æquivollentes, formula hæc fiet quantitas constans (manente Elaterio medii & intervallo particularum) quæcumque sit velocitas puncti A; Etenim dicatur f vis elastica medii, quoniam, ex Hypothesi Problematis hujusce, uniformiter agere censetur tempore quod exprimitur per a ut celeritatem s generet, erit $s = af$; præterea quoniam particularum intervallum

$\frac{3.57a^2m}{s} = \frac{3.57a^2\frac{AB}{a}}{af} = \frac{3.57AB}{f}$ quæ quantitas, constantes tantùm continet à celeritate m independentes; Hinc, tempus quo punctum B celeritatem puncti A recipit idem est quæcumque sit velocitas puncti A; Idem demonstrabitur de tempore quo punctum C eam celeritatem recipit, nam habet (*not.* 13.) rationem constantem ad tempus quo punctum B eam celeritatem acquirit, est nempe ad id tempus ut 3 ad 2, & sic de cæteris punctis. Q. E. D.

18. Diminutiones intervallorum inter partes medii Elastici (manente eodem fluido) sunt ut celeritas puncti A; Nam spatium A a percursum à puncto A tempore quo certa quædam particula medii Elastici celeritatem m recipit est semper $m x$, (x designante tempus quo illa particula medii celeritatem suscipit) sed illud tempus est constans (n. 17. hujusce) quæcumque sit celeritas puncti A, ergo spatium A a est semper ut velocitas m; sed illud spatium A a est summa diminutionum intervallorum inter partes ad quas celeritas m pervenit (n. 16.), singulæ autem diminutiones sunt æquales (n. 15.) ergo singulæ diminutiones sunt ut illud spatium A a, sive ut velocitates.

19. Et vice versâ, numerus partium compressarum quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt est semper idem quæcumque sit puncti A velocitas; Nam ille numerus est ut spatium A a divisum per unius partis diminutionem, spatium A a dato tempore est ut celeritas puncti A, diminutio unius partis est etiam ut ea celeritas; ergo numerus partium quæ dato tempore celeritatem puncti A receperunt, est ut celeritas per celeritatem divisa, hoc est, in ratione constanti; Unde, in diversis temporibus numerus particularum ad quas celeritas m pervenerit, erit directè ut tempus.

20. Quod si Particulæ datâ celeritate jam sint dimotæ, & certum gradum compressionis susceperint, postea verò nova velocitas addatur (vel detrahatur) puncto A, novus ille celeritatis gradus eodem tempore ab unâ particulâ ad aliam propagabitur quo prima celeritas propagata fuit, (in Hypothesi quod tam velocitas m quàm hæc nova velocitas addititia exiguæ sunt) idque hoc modo demonstrari potest.

Fingatur, omnes particulas primâ celeritate motas & compressas in navi positas esse quæ ipsâ particularum earum celeritate feratur, ita ut illæ particulæ in eâ nave respectivè quiescant, urgeatur verò prima pars per excessum novæ celeritatis super primam, communicatio istius excessus celeritatis ad omnes partes in navi positas ut & nova compressio particularum determinabitur ut in præcedenti Problemate, mutatis celeritate, intervallo particularum medii, & ejus elasticitate, Si ergo prima celeritas fuerit ut prius m; a tempus quo intervallum particularum A B eâ celeritate percurrebatur, ideoque sit $AB = m a$, sit ut prius s velocitas genita tempore a per vim elasticam medii in statu naturali considerati & uniformiter agentis, inventum est quod tempus quo punctum B celeritatem m acquisiverat erat $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ (n. 10.) quod spatium A a interea à puncto A descriptum erat $ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & spatium B b erat. $428\, ma\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ita ut compressio particularum sit A a — B b $= .572\, m a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, ideoque novum intervallum inter particulas in nave positas erit $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; Est autem Vis Elastica prior ad vim Elasticam novam inversè ut partium intervalla, sive ut $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad $m a$, sive ut $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ ad 1. Et, si excessus novæ velocitatis super priorem dicatur n, tempus quo novum intervallum inter particulas describeretur per hanc celeritatem n, erit $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, nam tempus a quo prius intervallum $m a$ describebatur velocitate m debet esse ad illud tempus directè ut intervalla $m a$ & $ma \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ & inversè ut velocitates m & n. Denique, subtangens Logarithmicæ quæ designabatur per s in casu priore, est in isto $\frac{ms}{n}$, cùm enim designet velocitatem uni-

315.

uniformiter genitam ab Elaterio, tempore quo intervallum particularum describitur, est directè ut vis elastica & ut tempus, habetur ergo hæc proportio, est

$$\left. 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \right\} \text{ad} \left\{ \frac{am}{n} \cdot 1 - \sqrt{.572 \frac{3.57m}{s}} \right.$$

ut s ad $\frac{ms}{n}$.

In seriebus ergo supra inventis loco m ponatur n; loco a ponatur $\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$; loco s ponatur $\frac{ms}{n}$, & tempus quo punctum B celeritatem n acquirit, invenietur (substituendo hos valores in formula $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$)

$$\frac{am}{n} \times 1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57n}{\frac{ms}{n}}} = \frac{am}{n} \times 1 -$$

$$.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57nnm}{mms}} = a \times 1 -$$

$$.572\sqrt{\frac{3.57m}{s}} \times \sqrt{\frac{3.57m}{s}}.$$

Ideoque tempus $a\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$ quo in præcedenti casu punctum B acquirebat celeritatem m, est ad tempus quo in hoc casu acquirit celeritatem n, ut 1 ad $1 - .572\sqrt{\frac{3.57m}{s}}$, sed hæc ratio, existente m quantitate minimâ ut suppositio fert, est fere æqualitatis. Quare nova celeritas, sive excessus novæ celeritatis supra præcedentem, propagabitur ad punctum proximum medii elastici eodem temporis intervallo quo præcedens celeritatis gradus in eo puncto genitus fuerat, ideoque etiam ad puncta successiva iisdem temporibus perveniet.

21. Si per datum aliquod tempus primum punctum A medii Elastici constanti celeritate m fuerit motum, postea urgeatur majori celeritate $m + n$ durante æquali tempore, omnes particulæ quæ primam celeritatem m susceperant, altero isto tempore celeritatem novam $m + n$ suscipient, & ultera totidem particulæ ulteriores priorem celeritatem m accipient; Nam incrementum celeritatis n ad eas omnes particulas à primâ propagari potest dato tempore, ad quas eo ipso tempore celeritas m propagata fuerat (hujusce 20). Interea verò uniformiter propagata fuisset velocitas pristina m ab ultimis particulis quæ eam susceperant ad totidem ulteriores. Si itaque successive post æqualia tempora velocitas crescat, totidem formabuntur portiones medii Elastici, æquali numero partium constantes, quæ successivas illas celeritates habebunt, portio proxima puncto A ultimam celeritatem habebit, secunda penultimam, & sic deinceps.

22. Hinc, si medium Elasticum urgeatur per successivos velocitatis gradus, imprimi potest ejus partibus velocitas satis magna ut sensibiliter in aures agat nec tamen excitetur in medii Elastici partibus sensibilis ea vibratio quæ juxta n. 11. nasceretur si simul & semel tota illa velocitas ipsi imprimeretur; & hinc intelligitur differentia inter aërem sonum generantem, aërem sonum propagantem, & aërem ventum deferentem; si magna velocitas particulæ aëreæ imprimatur, particula ipsi proxima tremores suscipit, sitque punctum sonorum; si velocitas minor excitetur quæ constans maneat nec per gradus augeatur aër uniformiter transfertur & fit ventus; sed si ab exiguâ velocitate ad magnam assurgatur, aëris particulæ successivos illos gradus recipiunt, & quia singula velocitas accepta est exigua tremores sensibiles non excitantur in particulis aëreis, quæ velocitatem illam magnam suscipientes & ad aurem deferentes sensationem soni producunt.

23. Si autem velocitas nova minor sit velocitate præcedente, eodem modo constabit quod decrementum illud velocitatis eodem tempore ad proximum punctum transibit quo præcedens velocitatis gradus ab eo acquisitus fuerat, & ad successiva puncta iisdem etiam temporibus perveniet quibus priorem celeritatem acquisiverant, imo solutio per constructionem Problematis ipsius productâ Logarithmica ultra punctum F quæri potest, eademque obtinebuntur ac prius.

24. Quibus positis intelligitur effectus vibrationis fibræ flexæ & redeuntis in aërem.

1us. *Casus*. Dividatur tempus ejus reditus in partes æquales quam minimas, & durante sin-

singulâ temporis parte, fibræ velocitas uniformis manere censeatur. Prima velocitas, ad certum numerum partium dato eo tempore communicabitur qui partium numerus dicatur N; altero instanti secunda velocitas eidem partium numero N communicabitur dum prima velocitas ad totidem particulas ulteriores N perveniet, tertio instanti primus partium numerus N tertiam velocitatem habebit, alterior numerus N secundam velocitatem, numerus N adhuc ulterior primam; hinc ergo si fibra dimidiam vibrationem absolverit, hoc est ultra statum suum naturalem discesserit quantum potest, erunt in aëre totidem successivæ portiones, quæ particulas numero N continebunt, quot successivæ velocitates erunt genitæ, & particulæ remotissimæ à fibrâ primum celeritatis gradum habebunt, proximæ fibræ ultimum, mediæ verò medium, qui maximus est; diminutiones intervallorum correspondebunt illis celeritatum gradibus, ut sint minimæ tam in particulis à fibrâ remotissimis, quam in particulis ipsi proximis, maximæ in mediis.

Regrediente fibrâ, eadem omnino Lex observabitur, nisi quod partes aëris fibræ proximæ retrò movebuntur & compressiones in dilatationes mutabuntur, dum in portiones ulteriores medii celeritates primo receptæ propagantur, ideoque tota vibratione absolutâ numerus particularum agitatarum duplus erit ejus quem in dimidia vibratione notaveramus, pars dimidia remotior est planè æqualis illi de quâ primo actum est & similiter constituta, pars citerior verò negativam celeritatem obtinebit & dilatationem; ejus citerioris partis portio remotissima à fibrâ primum celeritatis fibræ regredientis gradum habebit, & portio fibræ proxima ultimum (quietem nempe), media portio medium, hoc est retrocedet eâ ipsâ celeritate quâ medium ulterioris partis procedit & dilatationes illis celeritatibus negativis correspondebunt, ideoque in medio illius proximæ portionis maxima erit dilatatio ut & maximus regressus.

2^{dus}. *Casus.* Quod si singula tempuscula, quibus durantibus velocitas fibræ uniformis fingitur, æqualia non sint, eâdem ratione intelligentur effectus fibræ in partes medii, nisi quod portiones medii quæ singulis successivis velocitatis gradibus gaudent non sint æquales, sed (per not. 19.) sint sicut tempora quibus durantibus singulæ illæ velocitates in fibrâ permanserunt.

3us. *Casus.* Quamvis autem fibræ velocitas nullo tempusculo uniformis maneat sed continuo acceleretur, eodem tamen modo fibra aget in medium ac si reverâ velocitas ejus cresceret per intervalla temporis, & durante tempusculo quam minimo (sed finito) uniformis maneret; idque propterea quod Interval a inter particu'as medii sunt finitæ quantitates non verò infinitè parvæ; nam per not. 4. & 5. nullus motus ex puncto *A* in punctum *B* transire potest, nisi punctum *A* processerit finitâ quantulâcumque quantitate, ideoque, nisi fibra quæ urget punctum *A* velocitatem finitam in eo generaverit (ut fert Hypothesis Problematis not. 9.); Pari ratiocinio punctum B non sentiet incrementa velocitatis puncti A, nisi postquam incrementum finitum velocitatis in eo genitum fuerit (*not.* 5. & 20.). Ergo fibra agit in medium quasi singulo tempusculo (æquali vel inæquali) ejus velocitas uniformis perstitisset; Intelligitur ergo effectus vibrationis fibræ in aërem per primum & secundum casum hujusce demonstrationis. Q. E. I.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

315.

25. Totum autem spatium cujus particulæ commotæ fuerunt durante integrâ fibræ vibratione à NEWTONO pulsus vocatur, & si vibratione absolutâ fibra quiesceret, semper ulterius propagaretur ille pulsus; Nam totus ille pulsus (momento quo absolvitur vibratio) divisus intelligatur in portiones totidem quot temporis intervalla in vibrationis duratione fuerunt assumpta, quæ temporis intervalla facilitatis ergo æqualia supponantur, singula portio medii eam velocitatem habebit quam habuit chorda in momento ipsi respondenti, ultima portio sive remotissima à fibra eam habebit celeritatem quam fibra habuerat primo instanti, penultima portio eam celeritatem habet quam fibra habuit secundo instanti &c.; Sequenti verò tempusculo ultima portio pulsus ad novam portionem sibi æqualem & ulteriorem suam velocitatem propagabit (hujus 21.) dum ipsa suscipiet penultimæ portionis celeritatem, penultima verò portio celeritatem antepenultimæ &c., postea altero temporis intervallo ad alteram novam portionem ulteriorem prima celeritas propagabitur, & secunda celeritas in primâ portione novi istius pulsus gene-

rabitur, sicque deinceps: novus ergo pulsus formabitur plane similis priori æqualiter extensus, æquali celeritate in singulis partibus donatus (temerà ut dixi consideratione partium circumquàque positarum remque considerando quasi de partibus in linea rectâ positis unicè ageretur).

26. Ipse autem primus pulsus penitus quiescit quando in secundum totus transiit si nulla nova chordæ agitatio succedat, nam celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima est successive ad sequentes portiones transit dum novus pulsus formatur, sed celeritas ejus portionis fibræ proximæ est ultima fibræ celeritas quæ in hac Hyp. est quies, sed ubi pulsus secundus totus formatus est, celeritas portionis pulsus quæ fibræ proxima erat ad initium secundi pulsus est translata & per omnes partes pulsus primi successivè transiit, ideoque in quiete eas constituit in quâ permanserunt nullâ succedente novâ agitatione.

27. Quòd si chorda novam vibrationem faciat, ut evenit, Restituetur primus pulsus æqualis præcedenti qualiscumque sit ejus vibrationis velocitas initialis, nam dividatur totius vibrationis hujusce tempus in totidem partes æquales partibus in quas tempus primæ vibrationis divisum fuerat, quod fieri potest cum vibrationes sint isochronæ, illæ partes temporis æquales erunt iis quæ in præcedenti vibratione assumptæ fuerunt; Dato autem tempore numerus particularum compressarum est semper idem qualiscumque sit velocitas (n. 19. hujusce). Ergo siquidem singulo instanti dato totidem partes comprimuntur, totidemque sunt instantia data in vibrationibus Isochronis, pulsus ad totidem particulas in quâvis vibratione Isochronâ extenditur.

28. Si per velocitatem pulsûs intelligatur (cum NEWTONO) distantia ad quam pulsus extenditur divisa per tempus quo pulsus ad eam distantiam pervenit, dico Pulsus in eodem medio esse omnes æquiveloces quæcumque sit fibræ pulsum producentis vibratio: Id jam liquet de vibrationibus Isochronis in quibus tempore unius vibrationis ad totidem partes pulsus propagatur, ideoque æquale spatium æquali tempore percurrit, postea verò idem pulsus similiter propagatur, sed id pariter verum est de Vibrationibus Eterochronis; Dividantur enim inæqualia vibrationum tempora in totidem utrinque tempuscula minima quæ totis temporibus sint proportionalia, numerus partium compressarum singulis tempusculis diversis sunt illis tempusculis proportionales (n. 19. hujusce) ideoque totis vibrationum temporibus proportionales, sed in singulâ vibratione totidem tempuscula assumpta sunt, ergo totus numerus partium quæ singulum pulsum constituunt est proportionalis tempori vibrationis. Sed distantia ad quam pervenit pulsus est semper numero partium proportionalis. Ideoque distantia ad quam pervenit pulsus est tempori vibrationis proportionalis, sed velocitas pulsus est distantia ad quam pervenit divisa per tempus quo ad eam distantiam pervenit, ergo ea velocitas est constans. Ergo in eodem medio omnes pulsus sunt æquiveloces; Quod de sono per experimenta verum esse demonstravit *Derhamus*.

29. Quòd si medium diversum sit, velocitates pulsuum erunt inversè in ratione subduplicatâ densitatis & directè in ratione subduplicatâ vis Elasticæ, quippe (n. 17. hujusce) deprehendimus quadratum temporis quo celeritas puncti A transit in punctum B esse $\frac{3.57\,AB}{f}$ designante AB particularum intervallo & f vi elasticâ, & uniformiter procedere motum in pulsu ab unâ particulâ ad sequentem, sumantur ergo totidem partes in utroque medio, tempora quibus motus pulsus à primâ ad ultimam perveniet erit ut $\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{f}}$ (neglectâ quantitate constanti 3.57.) Velocitas verò pulsus est directè ut spatium quod occupant illæ omnes particulæ & inversè ut tempus quibus motus à primâ ad ultimam transit, spatium verò quod occupant illæ particulæ cum sint totidem est ut intervallum AB singulæ particulæ, ideoque est velocitas pulsus ut $\frac{AB}{\sqrt{\frac{AB}{f}}} = \sqrt{AB} \times \sqrt{f}$. Intervallum particularum est inversè ut densitas medii (rem considerando ut in n. 25. hujusce) ergo velocitas pulsus est inversè in ratione subduplicatâ densitatis medii, & directè in ratione subduplicatâ vis Elasticæ (quod Prop. XLVIII. statuit NEWTONUS).

30. His de toto pulsu dictis, nunc de motu singulæ particulæ pulsûs observandum est, in singulâ particulâ omnes velocitatis successivos gradus quos habuit prima particula A pre-

produci, & tantùndem temporis in eâ particulâ durare, quantùm in ea particula A, hoc cum discrimine quod tardius eos velocitatis gradus suscipiat quam particula A, & quidem eò tardius quò ab ea remotior est; 1us. *Casus.* Dividatur, ut prius, vibrationis tempus in tempuscula, & durante uno tempusculo æquabilis maniere censeatur velocitas impressa particulæ A, fingamus singulo tempusculo velocitatem ad viginti particulas pervenire, & spectemus speciatim motum quem 10^a. particula à puncto A suscipiet, quæ particula dicatur X, illa particula X motum puncti A non suscipit nisi post novem particulas antecedentes, tum ipsa particula X motum puncti *A* suscipit & uniformiter cum eo movetur durante reliquo tempusculo, tunc ex Hypothesi mutatur celeritas puncti A, interea tamen uniformis manet celeritas puncti X donec nova ea celeritas ad ipsam pervenire potuerit, hoc est postquam successivè pervenit ad particulas novem antecedentes, sed nova hæc celeritas per novem particulas antecedentes particulam X propagatur eodem tempore quo prima celeritas per easdem novem particulas propagata fuerat; ergo prima celeritas tamò diutius permanet in particulâ X quantò tardius eam receperat, ergo ea prima celeritas tamdiù durat in particulâ X quamdiu duraverat in particulâ *A*; cumque idem de singulis successivis motibus puncti A dici possit, hinc quælibet particula X ipsissimum habet motum a particula A, nisi quod tardius in eâ incipiat & desinat. Ideoque etiam manifestum est in hoc casu, spatia à particulis *A* & X descripta æqualia fore & similiter descripta.

2us. *Casus.* Ponatur nunc quod motus puncti *A* æquabilis non maneat durante singulo tempusculo, velocitates tamen successivæ puncti X erunt illæ quas in fine singuli tempusculi quam minimi punctum *A* acquisiverit, ut liquet ex tertio casu notæ 24, ideoque punctum X suscipiet velocitates correspondentes velocitatibus puncti A sumptis per saltus, sed quoniam cùm primùm punctum A spatium finitum descripsit, agere incipit in punctum proximum, saltus illi quamminimi intelligi debent, ideoque Physicè nulli, hinc Physicè particula X & particula A eosdem motus habebunt.

Pariter describent spatia æqualia & similia; Quippe abscissæ curvæ cujusvis repræsentent tempus quo durante punctum *A* movetur, & ejus ordinatæ repræsentent correspondentes velocitates, & dividatur axis curvæ in partes quamminimas sed finitas, eriganturque ordinatæ, illæ repræsentabunt velocitates æquabiles puncti *X* initio singuli tempusculi, & Parallelogrammata contenta sub ordinata & portione axis respondente repræsentabunt spatia à puncto *X* descripta, areæ verò mixtilineæ inter easdem ordinatas easdem axis portiones & arcus curvæ comprehensæ repræsentabunt spatia correspondentia à puncto *A* descripta, sed quando portiones axis sunt quamminimæ, summæ omnium eorum Parallelogrammatum & arearum mixtilinearum correspondentium pro æqualibus habentur. Ergo spatia à particulis A & X descripta sunt æqualia & similiter descripta saltem quàm proximè. 315.

31. Ideo uniformiter motus fibræ propagatur trans particulas medii; singulæ verò ejus particulæ successivè motum fibræ suscipiunt & ejus ad instar moventur, sed in fibrâ Elasticâ vires sunt semper proportionales distantiæ fibræ à puncto medio motus sui, ut per experimenta constat, & illarum virium actio sensibiliter non turbatur per resistentiam aëris, propter ejus raritatem, nec per ejus elaterium quia hinc inde à fibrâ aër datur qui ferè æqualiter premit, ideo fibra elastica ac per consequens particulæ ipsæ medii moventur secundum Legem Prop. XXXVIII. Lib. I. Sed eadem est Lex motus Penduli in Cycloide oscillantis Prop. LI. lib. I. Ergo *Pulsibus per fluidum propagatis singulæ particulæ motu reciproco brevissimo euntes & redeuntes accelerantur semper & retardantur pro Lege oscillantis Penduli* Q.E D.

32. Sumatur tempus quodvis, simulque illud intervallum inter particulas pulsus, quod tale est ut eo tempore assumpto motus fibræ à primâ particulâ ejus intervalli ad ultimam perveniat. Dico, quod tempus illud erit ad totum vibrationis tempus ut illud intervallum ad totius pulsus longitudinem; Res est evidentissima ex præcedentibus; nam cùm motus propagetur in pulsu uniformiter qualiscumque sit celeritas, hoc est, cum ad totidem particulas dato tempore perveniat, manifestum est quod si ut est totum vibrationis tempus, sive totum tempus quo pulsus formatur ad omnes particulas quæ pulsum constituunt, ita pertio quævis ejus temporis ad numerum particularum quæ eâ temporis portione motum receperunt.

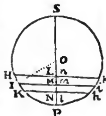
33. Ut

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. XLVII. THEOR. XXXVII.

33. Ut melius horum cum *Newtonianis* nexus pateat, hic adjungere lubet Propositionis XLIX. demonstrationem ex XLVII. desumptam, quamvis vix diversa sit ab iis quæ in ipso Textu leguntur, & 1°. quidem, sit PS spatium quod fibra unâ vibratione eundo percurrit, ex ejus medio O ut centro describatur circulus PKSk ejus circumferentia repræsentet totum vibrationis ex itu & reditu compositæ tempus, partes ejus circumferentiæ ut KH repræsentabunt tempora quibus fibra per spatium correspondens NL movebitur; HL, KN repræsentabunt velocitates fibræ in punctis N & L, & HL — KN velocitatum incrementa vel decrementa, actioni elaterii fibræ proportionalia, hæc omnia patent ex Propos. XXXVIII. & LI. Lib. I.

2°. Sit BC longitudo pulsus, & dicatur V radius circuli cujus circumferentiæ illa longitudo BC æqualis foret, dico quod vis naturalis elaterii medii erit ad vim acceleratricem fibræ ut V — KN ad HL — KN.

Sint enim duo puncta E & G in suo naturali situ in medio elastico, quæ post aliquod tempus in locis ε & γ occurrant, suscepto nempe motu fibræ secundum Leges à nobis expositas, singula seorsim eumdem motum ac fibra habebunt, ideoque si sumptum fuerit Eε = PL erit PH tempus elapsum à momento quo punctum E motum fibræ suscepit & erit HL ejus velocitas in ε, pariter sit Gγ = PN erit PK tempus elapsum à momento quo G motum fibræ suscepit, & erit KN ejus velocitas in γ, sint verò E & G puncta proxima; compressio spatii EG ubi in εγ pervenit oritur ex eo quod plus processit ε quam γ, itaque diminutio ejus spatii erit æqualis spatio LN, ideoque εγ erit æqualis EG — LN, utque vires quibus urgentur puncta medii, eorum densitati est proportionalis, vis tota quâ urgetur punctum γ est ad eam quâ urgebatur punctum G (quæ erat vis naturalis elaterii) inversè ut spatium εγ ad EG seu ut $\frac{1}{EG-LN}$ ad $\frac{1}{EG}$. Sed est LN ad KH ut IM ad radium PO, & cum KH designet intervallum temporis quo pulsus à puncto E ad punctum G pervenit, est (per n. 32.) KH ad EG ut tota circumferentia PKSk ad BC, sive ut PO ad V; Ergo ex æquo est LN ad EG ut IM ad V & convertendo EG — LN ad EG ut V — IM ad V ideoque $\frac{1}{EG-LN} : \frac{1}{EG} = \frac{1}{V-IM} : \frac{1}{V}$, ac per consequens vis tota quâ urgetur punctum γ est ad vim naturalem elaterii ut $\frac{1}{V-IM}$ ad $\frac{1}{V}$.



Vis illa tota quâ urgetur punctum γ est vis naturalis Elaterii medii cui superaddita est tota vis motrix fibræ quæ ad id punctum pervenit, ergo dividendo & reducendo ad communem denominatorem, Vis motrix fibræ in puncto N, est ad vim naturalem elaterii ut IM ad V — IM, sive invertendo, Vis naturalis elaterii, ad vim totam motricem fibræ in puncto N ut V — IM

ad

Corol. Hinc patet quod numerus pulsuum propagatorum idem sit cum numero vibrationum corporis tremuli, neque multiplicatur in eorum progressu. Nam lineola physica $\epsilon\gamma$, quamprimum ad locum suum primum redierit, (n) quiescet; neque deinceps movebitur, nisi vel ab impetu corporis tremuli, vel ab impetu pulsuum qui à corpore tremulo propagantur, motu novo cieatur. Quiescet igitur quamprimum pulsus à corpore tremulo propagari desinunt.

PRO-

ad I M, vel quia I M & K N pro se mutuo sumi possunt ubi puncta N & L sunt proxima est vis naturalis elaterii ad vim totam motricem fibræ ut V — K N ad K N; sed vis tota motrix fibræ est ad vim ejus acceleratricem durante tempusculo K H ut K N ad H L — K N, ergo ex æquo, est vis naturalis elaterii ad vim acceleratricem fibræ ut V — K N ad H L — K N: Q. E. D.

3°. In ipso motûs fibræ initio, vis elaterii fluidi in statu suo naturali est ad vim acceleratricem fibræ ut V ad H K; Nam ipso motus initio si P H sit infinitè parvum, ac per consequens etiam E ϵ infinitè parvum nullus adhuc motus ad particulam proximam G communicatur (*per n* 4.) ergo omninò evanescit K N ideoque V — K N = V, & H L — K N = H L sed arcus infinitè parvus & ejus sinus æquantur ergo H L = H K; Ergo vis elaterii fluidi in statu naturali est ad vim acceleratricem fibræ ipso ejus motus initio ut V ad H K.

Ex quibus fluit demonstratio Propositionis XLIX. Q. E. I.

(n) * *Quiescet, neque deinceps movebitur.* Quamprimùm lineola physica $\epsilon\gamma$ ad locum suum primum redierit, ipsius velocitas quam ordinata, m i, semper exponit (*prop.* 38. *lib.* 1.) extinguetur; & ejusdem lineolæ densitas visque elastica eadem erit cum densitate & vi elastica partis E G medii quiescentis; ideóque quiescet &c. * Id liquet ex n. 20. additionis nostræ de Motibus in fluido Elastico genitis.

316. Ex his intelligitur quomodò per vibrationes isochronas corporis resonantis producantur in aëre pulsus quibus ad aurem appulsis, fit in nobis perceptio soni, & cur soni, cessante motu tremulo corporis sonori, statim cessent. Liquet etiam tonos à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendere, cùm (per cor. prop. hujus) numerus pulsuum æqualis sit numero vibrationum ex itu & reditu compositarum quas chorda musica peragit, & ab illo numero tonorum diversitas oriatur (308). 316

317. Patet etiam quomodo aëris pulsus sonum & tremores in aliis corporibus unisonis aut consonantibus creare possint. Nam cùm aëris pulsus in nervum musicum incurrit qui vibrationem unam ex itu & reditu compositam absolvere aptus sit, eo tempore quo pulsus suam percurrit latitudinem, commovetur nervus & oscillatur per exiguum licet spatium, & recurrentibus novis atque conspirantibus aëris pulsibus celeriùs agitatur sonumque reddit. At si nervus vibrationes suas integras seu ex itu & reditu compositas perficere nequeat quo tempore pulsus aëris latitudinem suam describit, possit tamen in partes aliquot s hujusmodi vibrationibus peragendis aptas dividi; partes illæ, quiescentibus divisionum punctis, congruenter ad pulsuum recursum sensim agitabuntur, vibrationesque suas cum pulsibus unisonas singulæ perficient. Si verò nervi duo proximi in eas partes aliquotas dividi possint quæ sint inter se ad unisonum, aut quod idem est, quæ vibrationes isochronas peragant, & horum nervorum unus pulsetur sonumque edat, nervi duo sese in partes suas aliquotas veluti divident ut ad unisonum reducantur. Ut si ejus-

De Motu Corporum. Liber Secund. Sect. VIII. Prop. XLVIII. Theor. XXXVIII.

PROPOSITIO XLVIII. THEOREMA XXXVIII.

Pulsuum in fluido elastico propagatorum velocitates sunt in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione vis elasticæ directè & subduplicatâ ratione densitatis inversè; si modo fluidi vis elastica ejusdem condensationi proportionalis esse supponatur.

Cas. 1. Si media sint homogenea, & pulsuum distantiæ in his mediis æquentur inter se, sed motus in uno medio intensior sit: contractiones & dilatationes partium analogarum (o) erunt ut iidem motus. Accurata quidem non est hæc proportio. Verumtamen nisi contractiones & dilatationes sint valde intensæ, non errabit sensibiliter, ideoque pro physicè accuratâ haberi potest. (p) Sunt autem vires elasticæ motrices ut contractiones & dilatationes; & velocitates partium æqualium simul genitæ sunt ut vires. Ideoque æquales & correspondentes pulsuum correspondentium partes itus & reditus suos per spa-

ejusdem nervi capiantur partes duæ quarum sit ratio 2 ad 3 & æqualiter tendantur, alteraque pars pulsetur, dividetur minor nervus in partes duas, & major in partes tres æquales quæ singulæ seorsim oscillabuntur. Nam brevior nervus duarum nempe partium, ter oscillando dum nervus longior partium trium, duas oscillationes absolvit (306) frequentiores in aëre pulsus excitat quorum recursu nervus longior citiùs quàm par est agitatur; & cum utriusque nervi aërisque motus congruere non possint nisi singulæ nervorum partes aliquotæ & æquales seorsim oscillentur, motus ille conspirans tam in nervis quàm in aëre tandem producitur. Et hæc quidem in experimentis musicis ità contingere observarunt *Joan. Wallis* Operum in fol. tom. 2. pag. 466. Et deinde Acusticæ instaurator D. *Sauveur* in Monum. Acad. Paris. an. 1701. ubi alia experimenta refert quæ ex prædictis facile possunt explicari; * & inde ingeniosissimi systematis de tonorum productione & Harmoniâ fundamenta derivavit Ill. *De Mairan* omni laude superior, quod ad Praxim felicissimè revocavit vir inter eruditos Orpheos Illustrissimus D. *Rameau.*

(o) * *Erunt ut iidem motus.* Motus enim illi sunt vel causæ vel effectus contractionis & dilatationis partium in pulsibus correspondentium. Hæc tamen proportio accurata non est, si contractiones & dilatationes sint valde intensæ, quemadmodum si chorda musica nimiâ vi pulsetur, vis motrix particularum ejus non est amplius proportionalis spatiis per quæ debet moveri, & aëris densitas vi ipsius elasticæ proportionalis non manet, si nimiâ vi comprimatur vel dilatetur aer. * Singulæ diminutiones intervallorum sunt ut velocitates (n. 19.) non tamen ex eo sequitur contractiones esse ut velocitates, (hunc verò casum & reliquos demonstravimus n. 29. additionis de mot. fluid. el.)

(p) * *Sunt autem vires elasticæ motrices.* Nam vires elasticæ motrices sunt ut partium analogarum densitates, hoc est, datâ materiæ quantitate, ut contractiones; & contractiones sunt ut dilatationes quæ viribus elasticis medii contracti producuntur;

ſpatia contractionibus & dilatationibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia, ſimul peragent: & propterea pulſus, qui tempore itûs & reditûs unius latitudinem ſuam progrediendo conficiunt, & in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum, æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.

Caſ. 2. Sin pulſuum diſtantiæ ſeu longitudines ſint majores in uno medio quàm in altero; (q) ponamus quod partes correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia ſingulis vicibus eundo & redeundo deſcribant: & (r) æquales erunt earum contractiones & dilatationes. Ideoque ſi media ſint homogenea, æquales erunt etiam vires illæ elaſticæ motrices quibus reciproco motu agitantur. Materia autem his viribus movenda eſt ut pulſuum latitudo; & in eâdem ratione eſt ſpatium per quod ſingulis vicibus eundo & redeundo moveri debent. (ſ) Eſtque tempus itûs & reditûs unius in ratione compoſitâ ex ratione ſubduplicatâ materiæ & ratione ſubduplicatâ ſpatii, atque ideo ut ſpatium. Pulſus autem temporibus itûs & reditûs unius eundo latitudines ſuas conficiunt, hoc eſt, ſpatia temporibus proportionalia percurrunt; & propterea ſunt æquiveloces.

Caſ.

tur; *& velocitates partium æqualium ſimul genitæ ſunt ut vires* (13. lib. 1.), hoc eſt, ut contractiones & dilatationes, *ideòque* cum ſpatia ſimul deſcripta ſint ut velocitates ſimul genitæ, *æquales & correſpondentes pulſuum correſpondentium partes itus & reditus ſuos*, ſeu motus ſuos *per ſpatia contractionibus proportionalia, cum velocitatibus quæ ſunt ut ſpatia ſimul peragent; & propterea pulſus qui tempore itûs & reditûs latitudinem ſuam progrediendo conficiunt* (314.) *& in loca pulſuum proximè præcedentium ſemper ſuccedunt, ob æqualitatem diſtantiarum* æqualibus temporibus *deſcriptarum æquali cum velocitate in medio utroque progredientur.*

(q) *Ponamus quod partes correſpondentes.* Quoniam (*per caſ.* 1.) in eodem medio homogeneo & datâ pulſuum latitudine ſpatium quod partes medii oſcillando deſcribunt, manente tempore oſcillationis, minui poteſt in datâ ratione; nihil obſtat quominùs in hoc ſecundo caſu ſupponatur quod partes mediorum correſpondentes ſpatia latitudinibus pulſuum proportionalia, iiſdem manentibus oſcillationum in unoquoque medio temporibus, eundo & redeundo percurrant.

(r) * *Æquales erunt.* Si media ſint homogenea, uti in hoc 2°. caſu ſupponitur, vires elaſticæ motrices ſunt ut partium correſpondentium contractiones & dilatationes quas producunt, ſed quia quantitates materiæ in partibus correſpondentibus ſunt ut pulſuum latitudines, ſeu ut partium analogarum volumina, & partes illæ analogæ eundo & redeundo dilatantur & contrahuntur per ſpatia quantitatibus materiæ proportionalia (*per hyp.*) contractiones & dilatationes ideòque vires elaſticæ motrices æquales erunt.

(ſ) * *Eſtque tempus itûs & reditûs.* Nam tempus quo materia viribus æqualibus ad legem oſcillantis penduli agitatur, eſt in ra-

Cas. 3. In mediis igitur densitate & vi elasticâ paribus, pulsus omnes sunt æquiveloces. Quod si medii vel densitas vel vis elastica intendatur, quoniam vis motrix in ratione vis elasticæ, & materia movenda in ratione densitatis augetur; (1) tempus, quo motus iidem peragantur ac prius, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ. Et propterea velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè. *Q. E. D.*

Hæc propositio ulterius patebit ex constructione sequenti.

P R O-

ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ & subduplicatâ ratione spatii (*per cor.* 5. *prop.* 24. *lib.* 2.).

(1) *Tempus quo motus iidem peragantur &c.* Tempus quo motus per æqualia spatia peraguntur est in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione materiæ movendæ directè & subduplicatâ ratione vis motricis inversè (*per cor.* 5. *prop.* 24.) ideóque in hoc tertio casu, tempus, manente spatio descripto, augebitur in subduplicatâ ratione densitatis, ac diminuetur in subduplicatâ ratione vis elasticæ, & propterea velocitas quæ est ut spatium directè & tempus inversè, (ob datum spatium per hyp.) erit in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè, & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè; sed datis medii densitate & vi elasticâ, velocitas pulsuum, utcumque varietur spatium, data est, (*per cas.* 1. & 2.) ergò velocitas pulsuum erit semper in ratione compositâ ex ratione subduplicatâ densitatis medii inversè & ratione subduplicatâ vis elasticæ directè.

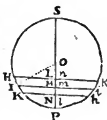
318. Ex hâc propositione patet cur soni omnis generis, gravis & acutus, intensus & remissus, pari velocitate in eodem aëre propagentur. Nam sonorum diversitates, quoad *grave* & *acutum*, à numero pulsuum qui in aëre tempore dato excitantur, pendet (316); at (per hanc prop.) pulsus aëris, seu plures seu pauciores dato tempore producantur, eâdem semper velocitate diffunduntur & dato tempore datum spatium conficiunt: Soni verò in eodem aëre producti eo intensiores sunt, manente tono, quo majus est spatium quod aëris particulæ eundo & redeundo describunt dato tempore; ut si chorda musica validius pulsetur, majores vibrationes dato tempore peragit, majoresque oscillationes particularum aëris excitat, & sonus intensior percipitur, licet tonus idem maneat & proinde pulsuum latitudo ac velocitas non mutentur. Cùm ergo tanta sit velocitas lucis ut per atmosphæram in instanti quoad sensum propagetur (*per schol. ad prop. XCVI. lib.* 1.); Si sonus & lux eodem puncto temporis excitentur, uti in machinis bellicis flamma & fragor producuntur simul, & spectator spatium quo à corpore resonante distat, tempusque quod inter luminis & soni perceptiones intercedit, dimediatur, soni velocitas innotescet. Atque eo modo in variis regionibus varia observata est velocitas soni, & in Angliâ eâ celeritate ferri, *Flamstedio* & *Halleyo* visum est, quâ pedes Londinenses plus minus 1142, Parisienses verò 1070, tempore minuti unius secundi percurreret. Quia verò densitas & vis elastica aëris in variis terrarum locis, diversisque anni tempestatibus in eodem loco mutantur, inde quoque mutari oportet soni velocitatem. Diu creditum est, observantibus *Mersenno*, *Gassendo*, & Academicis Florentinis, sonum neque conspirante vento accelerari, neque adverso retardari; Sed D. *Derham* experimentis accuratè institutis, falsum id esse asserit.

PROPOSITIO XLIX. PROBLEMA XI.

Datis medii densitate & vi elasticâ, invenire velocitatem pulsuum.

Fingamus medium ab incumbente pondere pro more aëris nostri comprimi; sitque A altitudo medii homogenei, cujus pondus adæquet pondus incumbens, & cujus densitas eadem sit cum densitate medii compressi, in quo pulsus propagantur. Constitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum suspensionis & centrum oscillationis sit A: & quo tempore pendulum illud oscillationem integram ex itu & reditu compositam peragit, eodem pulsus eundo conficiet spatium circumferentiæ circuli radio A descripti æquale.

Nam stantibus quæ in propositione XLVII. constructa sunt, si linea quævis physica *E F*, singulis vibrationibus describendo spatium *P S*, urgeatur in extremis itus & reditus cujusque locis *P* & *S*, à vi elasticâ (u) quæ ipsius ponderi æquetur; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini *P S* æqualis est, oscillari posset: id adeo quia vires æquales æqualia corpuscula per æqua-



(u) * *Quæ ipsius ponderi æquetur*, & quæ decrescat ut ipsius distantia à centro O; peraget hæc vibrationes singulas quo tempore eadem in cycloide, cujus perimeter tota longitudini P S æqualis est, oscillari posset; quia particulæ E F in hujusmodi cycloide oscillantis vis motrix est semper ut distantia ipsius à puncto cycloidis infimo seu medio, & in altissimis seu extremis punctis cycloidis ponderi ipsius æquatur, *per Cor. Prop. LI. lib.* 1. 318.

lia ſpatia ſimul impellent. Quare cùm oſcillationum tempora (x) ſint in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum, (y) & longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius; foret tempus vibrationis unius ad tempus oſcillationis penduli, cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione longitudinis $\frac{1}{2}$ *P S* ſeu *P O* ad longitudinem A. Sed vis elaſticâ, quâ lineola phyſica *E G*, in locis ſuis extremis *P*, *S* exiſtens, urgetur, erat (in demonſtratione propoſitionis XLVII.) ad (z) ejus vim totam elaſticam ut *HL* — *KN* ad V, hoc eſt (cum punctum *K* jam incidat in *P*) ut (a) *HK* ad V: & (b) vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola *E G* comprimitur, eſt ad pondus lineolæ ut ponderis incumbentis altitudo A ad (c) lineolæ longitudinem *EG*; ideoque ex æquo, vis quâ lineola *E G* in locis ſuis *P* & *S* urgetur, eſt ad lineolæ illius pondus ut *HK* × A ad V × *EG*, ſive ut *P O* × A ad V V, (d) nam *H K* erat ad *E G* ut *P O* ad V. Quare cùm tempora, quibus æqualia corpo-

(x) * *Sint in ſubduplicata ratione longitudinis pendulorum* (472. lib. 1.).

(y) * *Et longitudo penduli æquetur dimidio arcui cycloidis totius*; per cor. Prop. L. & Cor. 2. Prop. LII. lib. 1.

(z) * *Ad ejus vim totam elaſticam* in loco E G ubi medium quieſcit, ut &c.

(a) * *Ut H K ad V.* Cùm punctum K incidit in P, evaneſcit KN & fit H L — K N = H L = H K, per cor. 1. lem. VII. lib. 1.

(b) * *Et vis illa tota, hoc eſt, pondus incumbens, quo &c.* Vis elaſtica tota partis E G eſt in æquilibrio cum pondere comprimente, ubi medium quieſcit.

(c) * *Ad lineolæ longitudinem E G.* Cùm enim medium homogeneum, cujus altitudo eſt A, ſit (*per hyp.*) ejuſdem denſitatis cum medii parte E G, pondera ſunt ut volumina, hoc eſt, ut lineæ A & E G.

(d) * *Nam H K erat ad E G ut P O ad V*, in Dem. Prop. XLVII.

ra per æqualia ſpatia impelluntur, ſint (e) reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium, erit tempus vibrationis unius, urgente vi illâ elaſticâ, ad tempus vibrationis, urgente vi ponderis, in ſubduplicata ratione V V ad $PO \times A$, atque (f) ideo ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A in ſubduplicatâ ratione V V ad $PO \times A$, & ſubduplicatâ ratione PO ad A conjunctim; id eſt, in ratione integrâ V ad A. Sed tempore vibrationis unius ex itu & reditu compoſitæ, pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam BC. Ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium BC, (g) eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ, ut V ad A, id (h) eſt, ut BC ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A. Tempus autem, quo pulſus percurret ſpatium BC, eſt ad tempus quo percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem, in (k) eâdem ratione; ideòque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. *Q. E. D.*

Corol. 1. Velocitas pulſuum ea eſt, quam acquirunt gravia æqualiter accelerato motu cadendo, & caſu ſuo deſcribendo dimidium altitudinis A. Nam tempore caſus hujus, cum velocitate cadendo acquiſitâ, pulſus percurret ſpatium (l) quod erit æqua-

(e) * *Sint reciprocè in ſubduplicatâ ratione virium.* Patet per cor. 3. prop. XXIV. libri hujus.

(f) * *Atque ideo ad tempus &c.* Patet per compoſitionem rationum & ex æquo; quia (*ex demonſtratis*) tempus unius vibrationis particulæ E F, urgente vi ponderis ipſius, eſt ad tempus oſcillationis penduli cujus longitudo eſt A, in ſubduplicatâ ratione P O ad A.

(g) * *Eſt ad tempus oſcillationis unius & itu & reditu compoſitæ*, penduli cujus longitudo eſt A.

(h) * *Id eſt, ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.* Nam (in demonſtr. prop. XLVII.) erat V radius circuli circumferentiam habentis æqualem intervallo B C; unde eſt V ad A ut B C ad circumferentiam circuli cujus radius eſt A.

(k) * *In eâdem ratione.* Quoniam tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C; eſt ad tempus datum oſcillationis integræ penduli cujus longitudo A, datis medii denſitate & vi elaſticâ datâ, eſt ut ſpatium B C ad datam peripheriam circuli radio A deſcripti; liquet, quod tempus, quo pulſus percurrit ſpatium B C, aut eadem celeritate percurreret datam peripheriam circuli radio A deſcripti, fore eis ſpatiis proportionalem. Quare tempus quo pulſus percurrit ſpatium B C, eſt ad tempus oſcillationis unius ex itu & reditu compoſitæ penduli cujus longitudo eſt A, ut tempus quo pulſus percurrit idem ſpatium B C, ad tempus quo percurrit longitudinem æqualem circumferentiæ circuli cujus radius eſt A; Ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiæ æqualem. 318.

(l) * *Quod erit æquale toti altitudini A* (30. lib. 1.)

æquale toti altitudini A; ideoque tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurret spatium æquale circumferentiæ circuli radio A descripti: est (m) enim tempus casûs ad tempus oscillationis ut radius circuli ad ejusdem circumferentiam.

Corol. 2. Unde cum altitudo illa A sit ut fluidi vis elastica directè & densitas ejusdem inversè; (n) velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

PROPOSITIO L. PROBLEMA XII.

Invenire pulsuum distantias.

Corporis, cujus tremore pulsus excitantur, inveniatur numerus vibrationum dato tempore. Per numerum illum dividatur spatium quod pulsus eodem tempore percurrere possit, & pars inventa (o) erit pulsus unius latitudo. *Q. E. I.*

Scho-

(m) * *Est enim tempus casûs*, per dimidiam altitudinem A ad tempus oscillationis unius ex solo itu, vel solo reditu constantis, ut diameter circuli ad ejus circumferentiam (470. lib. 1.), ideóque ad tempus duplum oscillationis unius ex itu & reditu compositæ, ut radius circuli ad ejus circumferentiam. Quare cùm velocitates uniformes sint ut spatia eodem tempore descripta, pulsûs verò propriâ velocitate æquabili peripheriam circuli radio A descripti tempore oscillationis unius ex itu & reditu compositæ percurrat, & grave cum uniformi velocitate, quam acquirere potest cadendo per dimidiam altitudinem A, eodem tempore idem spatium describat; patet velocitates illas pulsûs & gravis esse æquales.

(n) * *Velocitas pulsuum erit &c.* Velocitas pulsuum, ut pote æqualis (*per cor.* 1.) velocitati quam gravia per dimidiam altitudinem A cadendo acquirunt, est in ratione subduplicatâ altitudinis illius A (28. lib. 1.); Sed altitudo A medii homogenei, cujus densitas eadem est cum densitate medii E G & pondus in æquilibrio cum ejusdem medii E G vi elasticâ, manente densitate est ut pondus seu ut vis elastica directè, & manente vi elasticâ seu pondere est ut densitas inversè, quia densitas est semper ut pondus directè & volumen seu altitudo A inversè; & propterea conjunctis his rationibus altitudo A est semper in ratione compositâ ex ratione vis elasticæ directè & ratione densitatis inversè. Quare velocitas pulsuum erit in ratione compositâ ex subduplicatâ ratione densitatis inversè & subduplicatâ ratione vis elasticæ directè.

(o) * *Erit pulsus unius latitudo.* Quoniam pulsus omnes uniformi cum velocitate propagantur (*ex dem. Prop.* XLVIII. & XLIX.) & tot pulsus æquales producuntur in aëre, quot sunt corporis tremuli vibrationes isochronæ ex itu & reditu compositæ (*per cor Prop.* XLVII.); Si spatium quod pulsus seu sonus dato tempore percurrere possit, per numerum vibrationum, quas corpus sonorum eodem tempore perficit, dividatur, quotus erit pulsûs unius latitudo. Sed dato sono, numerus vibrationum quas corpus sonorum dato tempore

Scholium.

Spectant propositiones novissimæ ad motum lucis & sonorum. (p) Lux enim cùm propagetur secundum lineas rectas, in actione solâ (*per prop.* XLI. & XLII.) consistere nequit. Soni verò propterea quod à corporibus tremulis oriantur, nihil aliud sunt quam aëris pulsus propagati *per prop.* XLIII. Confirmatur id ex tremoribus quos excitant in corporibus objectis, si modo vehementes sint & graves, quales sunt soni tympanorum. (q) Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur. Sed & sonos quosvis, in chordas corporibus sonoris unisonas impactos, excitare tremores notissimum est. Confirmatur etiam ex velocitate sonorum. Nam cùm pondera specifica aquæ pluvia-

re peragit, invenitur (per formulas 303, 304); Si nimirum chorda musica ad unisonum vel ad notam consonantiam cum sono dato reducatur. Cùm enim tonorum differentia à numero vibrationum quas corpus resonum dato tempore absolvit, pendeat (308 & 312); iidem toni eodem vibrationum isochronarum numero producuntur. Notum verò est spatium quod sonus dato tempore describit (318).

Exempli causâ, si sonus omnium acutissimus, quem possimus distinguere, vibrationibus integris 6400 tempore minuti unius secundi absolutis producatur, & omnium gravissimus vibrationibus $12\frac{1}{2}$ excitetur, uti D. *Sauveur* in Historia Acad. Scient. Paris. an. 1700. arbitratus est; divide spatium 1142. pedum Londinensium, quod sonus tempore minuti unius secundi conficit, per numeros 6400. & $12\frac{1}{2}$ successivè, & quoti, videlicet digiti 2, 14, & pedes 91, 36, erunt latitudines pulsuum, quibus soni acutissimus & gravissimus producuntur.

(p) * *Lux enim cùm propagetur secundùm lineas rectas*, & interpositis corporibus opacis intercipiatur, in actione solâ, seu pressione, motuve per medium quodlibet fluidum propagato, consistere nequit; quia pressio & motus per medium

omne fluidum propagata divergunt à recto tramite in spatia immota & pone obstacula circumquaque diffunduntur, per prop. citatas. Cùm igitur lumen sit corpus, ut pote motu progressivo præditum, ab obstaculis reflexum & refractum, motumque in corporibus quæ inflammat excitans, necesse esse videtur ut à corporibus luminosis tenuissima corpuscula incredibili fere velocitate quaquaversum emittantur. Spatia igitur cœlestia, quæ astrorum omnium Lux immensâ illâ celeritate permeat, materiâ quâdam ætherea densissimâ, quæ radiorum lucis motum interciperet, plena esse non possunt. 318.

(q) 319. * *Nam tremores celeriores & breviores difficilius excitantur.* Corpora enim majora & minus elastica majoribus soni gravioris, cum quo consonare possunt, vibrationibus facilius concutiuntur & congruenter ad pulsuum motum agitantur; nam debet esse proportio quædam inter pulsuum aëris latitudinem & corporum circumjectorum magnitudinem, densitatem & vim elasticam, ut sonus iis communicetur; & quo fibræ breviores sunt, tenuiores & magis tensæ, eo faciliùs acuto sono seu brevioribus aëris pulsibus agitantur & contremunt. Quæ omnia patent per notam 317.

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. VIII. PROP. L. PROBL. XII.

vialis & argenti vivi ſint ad invicem ut 1 ad $13\frac{2}{3}$ circiter, & ubi mercurius in *Barometro* altitudinem attingit digitorum *Anglicorum* 30, pondus ſpecificum aëris & aquæ pluvialis ſint ad invicem ut 1 ad 870 circiter: (r) erunt pondera ſpecifica aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Proinde cum altitudo argenti vivi ſit 30 digitorum, altitudo aëris uniformis, cujus pondus aërem noſtrum ſubjectum comprimere poſſet, erit 356700 digitorum, ſeu pedum *Anglicorum* 29725. Eſtque hæc altitudo illa ipſa quam in conſtructione ſuperioris problematis nominavimus A. Circuli radio 29725 pedum deſcripti (ſ) circumferentia eſt pedum 186768. Et cùm pendulum digitos $39\frac{1}{5}$ longum oſcillationem ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum, uti notum eſt, (t) abſolvat; pendulum pedes 29725 ſeu digitos 356700 longum (u) oſcillationem conſimilem tempore minutorum ſecundorum $190\frac{3}{4}$ abſolvere debebit. Eo igitur tempore ſonus progrediendo (x) conficiet pedes 186768, ideoque tempore minuti unius ſecundi pedes 979.

Cæterum in hoc computo nulla habetur ratio *craſſitudinis* ſolidarum particularum aëris, per quam ſonus utique (y) propagatur in inſtanti. Cùm pondus aëris ſit ad pondus aquæ ut 1 ad

(r) * *Erunt*, ex æquo & per compoſitionem rationum, pondera ſpecifica ſive denſitates aëris & argenti vivi ut 1 ad 11890. Sed fluidorum in ſe homogeneorum, eidem baſi incumbentium, & in æquilibrio conſiſtentium altitudines ſunt inverſè ut denſitates (173. *lib.* 2.): eſt igitur 1 ad 11890 ut 30 digit. ad altitudinem aëris uniformis qui cum 30 digitis argenti vivi æquiponderat; & ideo altitudo hæc eſt digitorum 356700, ſeu, dividendo per 12, pedum Anglicorum 29725.

(ſ) * *Circumferentia eſt pedum* 186768. Eſt enim radius ad circumferentiam ut 113 ad 710, ſive ut 29725 ad 186768 quàm proximè.

(t) * *Abſolvat.* Pendulum cujus longitudo eſt pedum Pariſienſium 3 & linearum $8\frac{1}{2}$, oſcillationem unam ex itu & reditu compoſitam tempore minutorum duorum ſecundorum abſolvit (471. lib. 1.); & pes Londinenſis eſt ad pedem Pariſienſem ut 15 ad 16 quam proximè, & ita ſunt pedes 3 cum lineis $8\frac{1}{2}$ ad digitos $39\frac{1}{6}$, vel $39\frac{1}{5}$ quam proximè.

(u) * *Oſcillationem conſimilem tempore &c.* Oſcillationum tempora ſunt in ſubduplicatâ ratione longitudinis pendulorum (472. lib. 1.), & propterea ut $39\frac{1}{5}$ ad 356700, ita 4 ad quadratum numeri minutorum ſecundorum, qui quæritur, & peracto calculo invenitur eſſe $190\frac{3}{4}$ quam proximè.

(x) * *Conficiet pedes &c.* Per Prop. XLIX.

(y) *. *Propagatur in inſtanti.* Nam corpus ſolidum quod condenſari non poteſt, dum movetur, totum ſimul movetur, & ideo motus ab uno corporis illius extremo

ad 870, & fales fint fere duplo denfiores quàm aqua; fi particulæ aëris ponantur effe ejufdem circiter denfitatis cum particulis vel aquæ vel falium, & raritas aëris oriatur ab intervallis particularum: [z] diameter particulæ aëris erit ad intervallum inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde ad pedes 979, quos fonus tempore minuti unius fecundi juxta calculum fuperiorem conficiet, addere licet pedes $\frac{979}{9}$, feu 109 circiter, ob craffitudinem particularum aëris: & fic fonus tempore minuti unius fecundi conficiet pedes 1088 circiter.

His adde quod vapores in aëre latentes, cùm fint alterius ela-

mo ad alterum extremum propagatur in inftanti.

(z) * *Diameter particulæ aëris erit &c.* Fingantur cubi duo æquales, quorum alter aëre plenus fit, alter medio continuo ejufdem circiter denfitatis cum aquâ vel falibus. Hoc medium continuum divifum fit in particulas æquales, tenuiffimas & fefe mutuo contingentes; aër verò ex hujufmodi particulis, quæ æqualibus intervallis diftinctæ fiat, conftet. Harum particularum diameter dicatur D, fpatium inter illas in aëre interceptum S, & ideo intervallum inter centra particularum aëris $S + D$, numerus particularum aëris in uno cubi latere N, & proinde earum numerus in cubo toto aëreo N^3, & latus cubi $NS + ND$. Sit M numerus particularum alterius medii continui in uno latere cubi, & propterea M^3 earum numerus in cubo toto, ac MD cubi latus. Quia duo cubi æquales fupponuntur, erit $NS + ND = MD$. Si denfitas aëris fit ad denfitatem alterius medii continui ut 1 ad A; quia paribus voluminibus, denfitates funt ut quantitates materiæ, quæ funt ut numeri particularum magnitudine & denfitate æqualium, erit $1 : A = N^3 : M^3$, & hinc $1 : A^{\frac{1}{3}} = N : M$, ideoque $M = NA^{\frac{1}{3}}$. Quare cùm fit $NS + ND = MD = NDA^{\frac{1}{3}}$, erit $S + D = DA^{\frac{1}{3}}$, & $S = D \times [A^{\frac{1}{3}} - 1]$, ideoque $D : S = 1 : A^{\frac{1}{3}} - 1$ ac $D : S + D = 1 : A^{\frac{1}{3}}$. Jam fi ponatur A fere æqualis numero 870, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 9$; fi verò ponatur $A = 1000$, vel $A = 1100$, vel $A = 1200$, erit fere $A^{\frac{1}{3}} = 10$; unde diameter D folidæ particulæ aëris erit ad intervallum $S + D$ inter centra particularum, ut 1 ad 9 vel 10 circiter, & ad intervallum S inter particulas ut 1 ad 8 vel 9. Proinde fpatium totum quod particulæ folidæ in lineâ rectâ datâ pofitæ occupant, erit ad fpatium reliquum quod intervalla particularum in eâdem lineâ tenent, ut 1 ad 8 vel 9 circiter, & ad totam lineam ut 1 ad 9 vel 10. Sed fi nulla habeatur ratio craffitudinis folidarum particularum aëris, fonus lineam rectam pedes 979 longam tempore minuti unius fecundi defcribit: quare cùm fonus per fpatium totum quod folidæ particulæ aëris occupant, in inftanti propagetur, & fit 9 ad 1 ut linea pedes 979 longa ad ipfius partem quam particulæ folidæ aëris occupant; partem illam, quæ eft $\frac{979}{9}$, feu 109 pedum circiter, addere licet fpatio 979 pedum.

elateris & alterius toni, (a) vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur. His autem quiescentibus, motus ille celerius propagabitur per solum aërem verum, idque in subduplicatâ ratione minoris materiæ. Ut si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, motus sonorum celerior erit in subduplicatâ ratione 11 ad 10, vel in integrâ circiter ratione 21 ad 20, quam si propagaretur per undecim partes aëris veri: ideoque motus sonorum supra inventus, augendus erit in hâc ratione. Quo pacto sonus, tempore minuti unius secundi, conficiet pedes 1142.

Hæc ita se habere debent tempore verno & autumnali, ubi aër per calorem temperatum rarescit, & ejus vis elastica nonnihil intenditur. At hyberno tempore, ubi aër per frigus condensatur, & ejus vis elastica remittitur, motus sonorum tardior esse debet in subduplicatâ ratione densitatis; & vicissim æstivo tempore debet esse velocior.

Constat autem per experimenta quod soni tempore minuti unius secundi eundo conficiunt pedes *Londinenses* plus minus 1142, *Parisienses* vero 1070.

Cognitâ sonorum velocitate innotescunt etiam intervalla pulsuum. (b) Invenit utique *D. Sauveur*, factis à se experimentis, quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum *Parisiensium* plus minus quinque, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ

(a) * *Vix aut ne vix quidem participant motum aëris veri quo soni propagantur.* Nam vibratorius particularum aëris motus, quo sonus producitur, corporibus ejusdem toni facile, at corporibus alterius elateris & alterius toni ægrè aut nullo modo communicari potest (317). Unde si atmosphæra constet ex decem partibus aëris veri & unâ parte vaporum, sitque proinde totum pondus atmosphæræ ad pondus vaporum ut 11 ad 1, & ad pondus aëris veri, subducto pondere vaporum, ut 11 ad 10, minuenda est quantitas materiæ movendæ in ratione 11 ad 10. Sed si densitas medii, sive quantitas materiæ sub dato volumine contentæ, cæteris paribus, minuatur, velocitas soni augetur in eâdem ratione subduplicatâ (*per prop.* XLVIII). Quare (*in hyp. Newt.*) velocitas soni augenda est in ratione subduplicatâ 10 ad 11, vel in integrâ circiter ratione 20 ad 21; & ideo spatium dato tempore minuti unius secundi descriptum, quod erat 1088 pedum, augendum in ratione 20 ad 21. Est autem fere 20 ad 21 ut 1088 ad 1142.

(b) * *Invenit utique* D. *Sauveur* in Historiâ Acad. Scient. Paris. an. 1700.

dæ quæ tempore minuti unius secundi (c) centies recurrit. Sunt igitur pulsus plus minus centum in spatio pedum *Parisiensium* 1070, quos sonus tempore minuti unius secundi percurrit; ideoque pulsus unus occupat spatium pedum *Parisiensium* quasi 10 $\frac{7}{10}$, id est, duplam circiter longitudinem fistulæ. (d) Unde verosimile est quod latitudines pulsuum, in omnium apertarum fistularum sonis, æquentur duplis longitudinibus fistularum.

Por-

(c) * *Centies recurrit*, hoc est centum oscillationes ex itu & reditu compositas tempore minuti unius secundi absolvit. Idem D. *Sauveur* in Monumentis Acad. Paris. an. 1713. oscillationes 101 vel 102 pro ejusdem fistulæ sono posuit.

(d) * *Unde verosimile est &c.* Idem confirmatur alio experimento ejusdem D. *Sauveur*, qui loco mox citato invenit quod fistula aperta, cujus longitudo est pedum Parisiensium plus minus 2, sonum edit ejusdem toni cum sono chordæ quæ 243 oscillationes integras tempore minuti unius secundi perficit. Unde si dividatur numerus 1070 per 243, prodit pulsus unius latitudo ped. Paris. 4 $\frac{2}{5}$ circiter, id est, dupla circiter longitudo fistulæ. Est autem in organis pneumaticis fistula aperta, quæ patet in superiori & latiori extremo, alteri quo aër fistulam ingreditur, opposito. Si occludatur fistula, octavâ gravius sonat.

Huc usque de sono directo plura diximus, de reflexo pauca adjungenda sunt.

320. *Prop.* Sonus percipitur tanquam ex eo loco procedens ex quo quasi centro pulsus aëris propagantur. Constat experientiâ.

321. *Cor.* 1. Hinc si sonus è centro quovis A directe propagatus in obstaculum planum satis magnum B C incurrat, & ex A ducatur ad B C perpendicularis A E, producaturque ad H ut sit E H æqualis A E; sonus reflexus eodem fere modo percipietur ac si ex loco H tanquam centro directè propagaretur (194).

322. *Cor.* 2. Similiter si sonus à centro quovis propagatus in obstaculum quodlibet impingat, à quo ita reflectatur ut 322.
post reflexionem radii soni in centrum aliud convergant; sonus reflexus tanquam ex hoc secundo centro propagatus audietur.

323. *Cor.* 3. Unde si radii sonori satis densi ad aurem appellentes & soni unius sensationem producentes, ab aure in diversa centra convergant; locus ex quo sonus propagatur, non bene distinguetur.

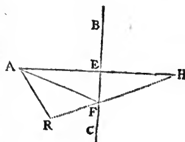
324. Si sonus producatur in A, & deinde ab obstaculo quovis B C (*vide fig. sup.*) reflectatur tanquam ex centro H propagatus; auditor in loco R sonum directum per A R propagatum percipiet primùm; deinde sonum reflexum quasi ex centro H procedentem, postquam motu directo spatium A F, & motu reflexo spatium F R descripsit, audiet. Idem igitur sonus audietur bis, modò tamen distantiarum A R & A F R differentia tanta sit ut sonus directus & sonus reflexus eodem sensibili momento organum auditûs non afficiant; nam si sonus reflexus ad aurem perve-

nire

Porro cur ſoni ceſſante motu corporis ſonori ſtatim ceſſant, neque diutius audiuntur ubi longiſſimè diſtamus à corporibus ſonoris, quàm cùm proximè abſumus, patet ex corollario propoſitionis XLVII. libri hujus. Sed & cur ſoni in tubis ſtentorophonicis valde augentur, ex allatis principiis manifeſtum eſt. Motus enim omnis reciprocus ſingulis recurſibus à causâ generante augeri ſolet. Motus autem in tubis dilatationem ſonorum impedientibus, tardius amittitur & fortius recurrit, & propterea à motu novo ſingulis recurſibus impreſſo magis augetur. Et hæc ſunt præcipua phænomena ſonorum.

SEC-

niret eo tempore, quo ſoni directi impreſſio adhuc in eâ perſeverat, non geminus, ſed intenſior tantùm ſonus audiretur. Porrò experientiâ conſtat ſonos vix poſſe diſtingui; ſi plures quàm 9 circiter ſyllabæ tempore minuti unius ſecundi ſucceſſivè producantur; & ideo ne ſonus reflexus cum directo confundatur, inter eorum ad aurem appulſus intercedere oportet partem nonam minuti unius ſecundi, quo tempore ſonus deſcribit ſpatium 127 pedum Londinenſium circiter. Hoc igitur ſpatio minor eſſe non debet diſtantiarum A R & A F R differentia, ut ſonus reflexus diſtinctè percipi poſſit in R. Quod ſi auditor in A locetur, ubi ſonus directus producitur, & ſpatium 2 A E quod ſonus deſcribit ut ad centrum A poſt reflexionem in E redeat, ſit 127 pedum Londinenſium, ideoque A E 63 vel 64 pedum circiter, diſtingui poterit ſonus reflexus à directo. Si plura ſint obſtacula juſtis intervallis diſſita, in quæ ſonus directe offendat, is quaſi ex variis locis pluries repetitus audietur, ut cum machinarum bellicarum fragorem vel tonitru boatum circumjecta ædificia vel craſſiores nubes pluries referunt. Sæpe etiam obſtacula ſonum directum mutant, dum vehementiori aëris tremore concuſſa variè contremunt & aerem repercutiendo detonant.



325. Ex iiſdem principiis explicari poteſt tubæ vocalis ſeu ſtentorophonicæ efficacia ad vocem articulatam in loca maxime diſſita propagandam. Sunt hujuſmodi tubæ variarum figurarum, ſed omnes ſatis anguſtæ, oblongæ & intus perpolitæ, quo ſonus in arctum coactus in latius ſpatium ſeſe diffundere & virium detrimentum pati prohibeatur, ac radii ſonori in determinatam plagam confertiores dirigantur. Fabrefiunt ex materiâ ad concipiendum motum tremulum, quo ſonus producitur, aptâ, ut ſonus hoc partium tubæ & aëris ab ipſis agitati tremulo motu multiplicatus impetum majorem acquirat & longius progrediendi vim habeat. Optima tubarum vocalium figura, Auctore Clar. *Joh. Matthia Haſio*, illa cenſetur, quæ fit ex converſione parabolæ circa ipſius axem, orificio exiguo tubæ, quod os loquentis ſuſcipit, in ipſo foco parabolæ conſtituto. Hâc enim tubâ radii ſonori, ſaltem magnam partem, reflectuntur ad axem tubæ paralleli (194. *lib.* 1. & *Theor.* 3. *de parabola.* lib. 1.). Idem *Haſius*,

SECTIO IX.

De motu circulari fluidorum.

HYPOTHESIS.

Resistentiam, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, proportionalem esse velocitati, quâ partes fluidi separantur (c) *ab invicem.*

fius, quo tubam longiorem, non nimium auctâ amplitudine, reddat, tubum ellipticum oblongum parabolico ita jungit, ut elliptici focus unus concidat cum foco parabolici, & os loquentis in altero elliptici foco constituatur; quâ ratione fit ut radii soni ab ore in tubo elliptico ad focum parabolici partim directi, partim reflexi dirigantur (*per theor.* 4. *de ellipsi*), & deinde in tubo parabolico, ut modò dictum est, progrediantur. Limbus tubæ, qua parte amplissima est, quâque sonus emittitur, ad formam labiorum recurvandus est, quo minus effectum tubæ turbare possit aëris externi in tubam irruentis motus. Hæc omnia fusè & accuratè exposita vides, In ipsa laudati Auctoris Dissertatione Physico - Mathematicâ de tubis stentoreis.

* Tubis stentoreis annumerandæ sunt omnes tubæ militares aut venatoriæ sive rectæ sive incurvæ, exiguus enim sibilus quem edit tubicen constricto aëre inter labium & tubæ oram, in prodigiosum erumpit sonum, & observabile videtur ea instrumenta ita à Parabolâ discrepare ut axis suæ respectu convexa potius sit tuba quàm concava. Incrementum itaque soni non tam pendere videtur ex eo quod sonus secundùm axis tubæ directionem parallelus exeat, quàm ex eo ipso quod indicat NEWTONUS, nempe ex motus reciprocatione, ita ut forma tubæ ea esse debeat ut sonus ab uno pariete ad alterum repellatur, extrinsecus sonum derivando, ita tamen ut nônnisi per innumeras reflexiones sive reciprocationes foras emittatur. 325.

(c) * *Ab invicem.* Resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, est semper eadem in spatiis æqualibus, quæcumque fuerit mobilis velocitas; cùm in omnibus spatiis æqualibus idem defectus lubricitatis superandus sit. Est igitur hæc resistentia, cæteris paribus, ut spatium quod mobile describit, hoc est, dato tempore, ut velocitas. Quia verò partes contiguæ quæ simul pari velocitate moventur, sese mutuo non atterunt; capienda hic est velocitas partium relativa, quâ partes separantur ab invicem. Sed de hâc hypothesi vide Scholium sequens.

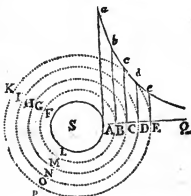
PROPOSITIO LI. THEOREMA XXXIX.

Si cylindrus solidus infinitè longus in fluido uniformi & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo; dico quod tempora periodica partium fluidi sunt ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri.

Sit *AFL* cylindrus uniformiter circa axem *S* in orbem actus, & circulis concentricis *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes cylindricos innumeros concentricos solidos ejusdem crassitudinis. Et quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ erunt (per hypothesin) ut (a) eorum translationes ab invicem, & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quam ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & motum orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones

(a) 326. * *Ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ &c.* Si superficies contiguæ nullâ velocitate relativâ inter se moverentur, aut si essent perfectè lubricæ, nulla foret earum frictio: at si superficies sint asperæ & alia super aliam incedat, nascetur ex partium attritu resistentia, quæ, dato tempore & cæteris paribus, velocitati superficierum relativæ proportionalis est (*per hyp.*). Unde si superficies contiguæ, homogeneæ & æqualis ubique asperitatis se se viribus æqualibus premant, & præterea superficies quæ super alias sibi contiguas incedunt, æquales sint; resistentiæ ex attritu dato tempore genitæ proportionales erunt translationibus superficierum contiguarum ab invicem, cùm hujusmodi translationes sint spatia velocitatibus relativis dato tempore descripta. Si verò translationes illæ seu velocitates relativæ superficierum contiguarum ponantur æquales; resistentiæ, cæteris paribus, erunt ut superficies contiguæ quæ sese mutuo atterunt. Quare si nec superficies contiguæ, nec earum velocitates relativæ seu translationes ab invicem æquantur; resistentiæ, cæteris paribus, erunt in ratione compositâ ex ratione superficierum contiguarum & ratione translationum ab invicem dato tempore factarum. Impressiones verò contiguorum orbium in se mutuo factæ, sunt ut resistentiæ quibus producuntur.

giones contrarias. (b) Unde cum impressiones sunt ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem, erunt translationes inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe. (c) Sunt autem differentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus, ut quadrata distantiarum inversè. Quarè si ad infinitæ rectæ *SABCDEQ* partes singulas erigantur perpendicula *A a*, *B b*, *C c*, *D d*, *E e*, &c. ipsarum *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE*, &c. quadratis reciprocè proportionalia, & per terminos perpendicularium duci intelligatur (d) linea curva hyperbolica; erunt summæ differentiarum,

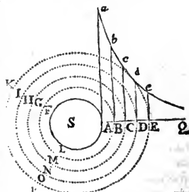


(b) * *Unde cùm* (per hyp.) orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, & proinde impressiones ex utraque parte cujusque orbis in plagas contrarias factæ æquales sint; impressiones illæ, dato tempore, datæ sunt, & ideo ratio composita ex rationibus translationum & superficierum contiguarum, quæ est ut impressio, data est. Translationes igitur dato tempore factæ, sunt inversè ut superficies, hoc est, inversè ut superficierum distantiæ ab axe: nam cylindrorum ejusdem longitudinis superficies sunt ut distantiæ ab axe cylindri, & hic omnes superficies cylindricæ; quæ circa axem infinitum revolvuntur, sunt ejusdem longitudinis infinitæ (*per hyp.*).

(c) * 327. *Sunt autem differentiæ motuum angularium &c.* Motus angulares dicuntur ii, quibus singula puncta A, B, C, D, E &c. radiis ad axem cylindri perpendiculariter ductis angulos describunt. Sunt igitur anguli illi quasi spatia uniformi motu descripta, & ideo motus angulares sunt ut anguli descripti directè & tempora quibus describuntur inversè, & dato tempore sunt ut anguli descripti. Hinc, dato tempore, motuum angularium differentiæ sunt ut differentiæ angulorum descriptorum, hoc est (254. *lib.* 1.) ut translationes punctorum seu superficierum ab invicem directè & distantiæ ab axe inversè: nam translationes illæ sunt arcus circulares quos singula puncta per suam velocitatem relativam describunt, & distantiæ ab axe sunt illorum arcuum radii. Sed translationes dato tempore factæ, sunt (*ex demonstr.*) ut distantiæ ab axe inversè. Quarè differentiæ motuum angularium, dato tempore, sunt ut quadrata distantiarum inversè. 327.

(d) * *Linea curva hyperbolica.* Quoniam ordinatæ A a, B b, &c. sunt inversè ut abscissarum S A, S B, &c. quadrata; crescente abscissâ ac sine fine productâ, correspondens ordinata decrescit & num-

tiarum, (e) hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, id est, si ad constituendum medium uniformiter fluidum, orbium numerus augeatur & latitudo minuatur in infinitum, ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. Et (f) tempora motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis *D* reciprocè ut area *DdQ*, hoc est (per notas curvarum quadraturas) (g) directè ut distantia *SD*. *Q.E.D.*



(h) *Corol.* 1. Hinc motus angulares particularum fluidi sunt reci-

numquam evanescit, & ideo recta S Q est curvæ asymptotus; & simili ratione patet rectam per S ductam normaliter ad S Q esse alteram curvæ asymptotum.

(e) * *Hoc est, motus toti angulares.* Quoniam solo cylindri A F L impulsu agitur fluidum in orbem (*per hyp.*), necesse est ut motus angularis partium fluidi, crescente earum distantia ab axe cylindri, continuo decrescat, ac tandem ad distantiam infinitam evanescat. Unde motus totus angularis puncti A seu orbis A F L est omnium maximus, & motus totus angularis puncti cujuslibet C æqualis est summæ omnium differentiarum motuum angularium punctorum D, E & sequentium in infinitum (106. *lib.* 1.); ideoque motus toti angulares sunt ut respondentes summæ linearum A a, B b, C c, D d, E e &c. in infinitum.

(f) * 328. *Tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia.* Motus angulares sunt ut anguli descripti directè & tempora quibus describuntur inversè (326); & propterea si anguli descripti capiantur æquales quatuor rectis, ut totus circulus describatur & tempora fiant temporibus periodicis æqualia, motus angulares erunt ut tempora periodica inversè.

(g) * *Directè ut distantia S D.* Areæ D d Q momentum est D d × D E; & ideo, ob ordinatam D d quadrato abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^2}$, & (*per cas.* 4. *Lemm.* 2. *libri hujus*) area D d Q est ut $\frac{1}{SD}$; quæ quantitas negativa prodit, quia area D d Q abscissæ D S non adjacet, sed ad partes contrarias vergit in infinitum. Est igitur tempus periodicum particulæ cujusvis D reciprocè ut $\frac{1}{SD}$, hoc est, directè ut S D.

(h) * *Cor.* 1. Ex demonstratis, motus angulares partium fluidi sunt reciprocè ut tempora periodica, hoc est, reciprocè ut illa-

reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri, & velocitates absolutæ sunt æquales.

Corol. 2. Si fluidum in vase cylindrico longitudinis infinitæ contineatur, & cylindrum alium interiorem contineat, revolvatur autem cylindrus uterque circa axem communem, sintque revolutionum tempora ut ipsorum semidiametri, & perseveret fluidi pars unaquæque in motu suo: (i) erunt partium singularum tempora periodica ut ipsarum distantiæ ab axe cylindrorum.

Corol. 3. Si cylindro & fluido ad hunc modum motis addatur vel auferatur communis quilibet motus angularis; quoniam hoc novo motu non mutatur attritus mutuus partium fluidi, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium ab invicem pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, qui, attritu utrinque in contrarias partes facto, non magis acceleratur quàm retardatur.

Corol. 4. Unde si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis cylindri exterioris, (k) habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.

Co-

illarum distantiæ ab axe cylindri. Velocitates verò absolutæ, ut pote uniformes, sunt ut circumferentiæ descriptæ, seu ut distantiæ ab axe cylindri directè & tempora periodica inversè, hoc est, ut distantiæ directè & distantiæ inversè, ideoque sunt in ratione æqualitatis. Hinc verò (*per cor.* 5. *prop.* 4. *lib.* 1.) vires centrifugæ particularum æqualium fluidi sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ ab axe cylindri; & propterea vis quâ tota superficies cylindrica nititur ab axe cylindri recedere, est ut eadem superficies directè & distantia ejus ab axe inversè, & ideo data est.

(i) * *Erunt partium singularum tempora periodica ut &c.* Patet, quia cylindrus exterior uniformi velocitate motus locum tenet superficiei cylindricæ, quæ in demonstratione adhibita est.

(k) * *Habebitur motus fluidi in cylindro quiescente.* Sit EKP cylindrus exterior, cujus tempus periodicum in hypothesi Corollarii 2. dicatur tE; & quoniam in eadem hypothesi velocitates particularum absolutæ sunt æquales (*per cor.* 1.), singulæ illæ particulæ spatia æqualia eodem tempore tE describent, hoc est, spatia æqualia peripheriæ EKP, quam punctum E tempore tE percurrit. Jam si toti cylindrorum & fluidi systemati auferatur motus omnis angularis Cylindri exterioris; Ex spatio EKP, quod singulæ particulæ tempore tE descripsêrunt, auferenda erit integra circuli peripheria, quam particula quælibet seorsim describit, ut habeatur spatium quod eadem particula eodem tempore tE percurrit in cylindro quiescente. Erit igitur EKP—DIO spatium quod particula quævis D tempore tE describit, postquam motus omnis angularis cylindri exterioris ablatus est. Quia verò particulæ singulæ revolvuntur æquabiliter (*per hyp.*), erit spatium EKP—DIO ad DIO, sive SE—SD ad SD, ut tempus tE ad tempus perio- 327.

Corol. 5. Igitur si fluido & cylindro exteriore quiescentibus; revolvatur cylindrus interior uniformiter; communicabitur motus circularis fluido, & paulatim per totum fluidum propagabitur; nec prius desinet augeri quam fluidi partes singulæ motum corollario quarto definitum (l) acquirant.

Corol. 6. Et quoniam fluidum conatur motum suum adhuc latius propagare, hujus impetu circumagetur etiam cylindrus exterior nisi violenter detentus; & accelerabitur ejus motus (m) quoad usque tempora periodica cylindri utriusque æquentur inter se. Quod si cylindrus exterior violenter detineatur, conabitur is motum fluidi retardare; & nisi cylindrus interior vi aliquâ extrinsecus impressâ motum illum conservet, efficiet ut idem paulatim cesset.

Quæ omnia in aquâ profundâ stagnante experiri licet.

riodicum particulæ D in cylindro quiescente; & ideo si hoc tempus dicatur T D, erit $TD = \frac{SD \times tE}{DE}$; & simili modo tempus periodicum particulæ A in eâdem hypothesi (quod dicatur T A) $= \frac{SA \times tE}{AE}$; unde habetur $tE = \frac{AE \times TA}{SA}$, & ideo $TD = \frac{SD \times AE \times TA}{SA \times DE}$. Dato igitur tempore periodico cylindri interioris, dabitur tempus periodicum particulæ cujusvis fluidi in cylindro quiescente. Quia verò A E, S A & T A datæ sunt, erit T D ut $\frac{SD}{DE}$, hoc est, particularum fluidi tempora periodica sunt ut distantiæ ipsarum ab axe cylindri interioris directè & distantiæ earumdem à superficie cilindri quiescentis inversè.

(l) * *Acquirant.* Patet per cor. 3.

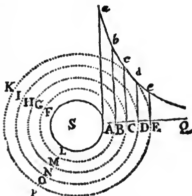
(m) * *Quoadusque tempora periodica cylindri utriusque æquentur.* Tamdiu enim cylindrus interior atterit & urget fluidi partes, motumque ipsis eâ actione communicat qui ad cylindrum exteriorem transit, quamdiu omnium partium contiguarum motus angulares inæquales sunt, seu quamdiu tempora periodica non æquantur inter se.

PRO-

PROPOSITIO LII. THEOREMA XL.

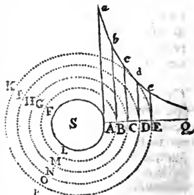
Si sphæra solida, in fluido uniformi & infinito, circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, & ab hujus impulsu solo agatur fluidum in orbem; perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo: dico quod tempora periodica partium fluidi erunt ut quadrata distantiarum à centro sphæræ.

Cas. 1. Sit *AFL* sphæra uniformiter circa axem *S* in orbem acta, & circulis concentricis *BGM*, *GHN*, *DIO*, *EKP*, &c. distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis. Finge autem orbes illos esse solidos; & quoniam homogeneum est fluidum, impressiones contiguorum orbium in se mutuo factæ, erunt (per hypothesin) ut eorum translationes ab invicem & superficies contiguæ in quibus impressiones fiunt. Si impressio in orbem aliquem major est vel minor ex parte concavâ quàm ex parte convexâ; prævalebit impressio fortior, & velocitatem orbis vel accelerabit vel retardabit, prout in eandem regionem cum ipsius motu vel in contrariam dirigitur. Proinde ut orbis unusquisque in motu suo perseveret uniformiter, debebunt impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari, & fieri in regiones contrarias. Unde cùm impressiones sint ut contiguæ superficies & harum translationes ab invicem; erunt translationes inversè ut superficies, hoc (n) est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro. Sunt autem differen-



(n) * *Hoc est, inversè ut quadrata distantiarum superficierum à centro.* Nam superficies sphæricæ, ut pote similes, sunt ut quadrata radiorum seu distantiarum à centro.

rentiæ motuum angularium circa axem ut hæ translationes applicatæ ad distantias, sive ut translationes directè & distantiæ inversè; hoc est, conjunctis rationibus ut cubi distantiarum inversè. Quare si ad rectæ infinitæ $SABCDEQ$ partes singulas erigantur perpendicula Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. ipsarum SA, SB, SC, SD, SE, &c. cubis reciprocè proportionalia, erunt summæ differentiarum, hoc est, motus toti angulares, ut respondentes summæ linearum Aa, Bb, Cc, Dd, Ee: id est (si ad constituendum medium uniformiter fluidum, numerus orbium augeatur & latitudo minuatur in infinitum) ut areæ hyperbolicæ his summis analogæ AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ, &c. Et tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia erunt etiam his areis reciprocè proportionalia. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut area DdQ, hoc est, per notas curvarum quadraturas, (o) directè ut quadratum distantiæ SD. (p) Id quod volui primò demonstrare.

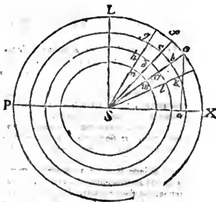


Cas.

(o) * *Directè ut quadratum distantiæ S D.* Areæ D d Q momentum est D d × D E, ideoque, ob ordinatam D d cubo abscissæ S D reciprocè proportionalem, momentum illud est ut $\frac{DE}{SD^3}$, & propterea (*per cas.* 4. *Lem.* 2. *libri hujus*) area fluens D d Q est ut $\frac{1}{SD^2}$, quæ negativa prodit, quia non adjicet abscissæ DS, sed in plagam contrariam DQ vergit. Est igitur tempus periodicum orbis cujusvis DIO reciprocè ut $\frac{1}{SD^2}$, hoc est, directè ut quadratum distantiæ S D.

(p) * *Id quod volui primò demonstrare.* Casûs primi demonstratio valet, si medium sphæræ circumfusum ex innumeris orbibus solidis, tenuissimis ac concentricis constare fingatur. In casibus secundo & tertio singuli illi orbes sphærici in innumeros annulos, & annuli singuli in tenuissimas particulas, ad constituendum medium fluidum, dividuntur.

(q) *Cas.* 2. A centro sphæræ ducantur infinitæ rectæ quàm plurimæ, quæ cum axe datos contineant angulos, æqualibus differentiis se mutuo superantes; & his rectis circa axem revolutis concipe orbes in annulos innumeros secari; & annulus unusquisque habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem, alterum exteriorem & duos laterales. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque, nisi in motu juxta legem casus primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Patet hoc ex demonstratione casus primi. Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà pergens, movebitur pro lege casus primi, nisi quâtenus impeditur ab attritu annulorum ad latera. At in motu hâc lege facto attritus annulorum ad latera nullus est; neque ideo motum, quo minus hâc lege fiat, impediet. Si annuli qui à cen-



(q) * *Casus* 2. A centro sphæræ S ducantur rectæ quam plurimæ, longitudine infinitæ Sk, Sb, Sc, Sg &c., quæ æquales angulos kSb, bSc, cSg &c. complectantur; & his rectis circa axem PX revolutis & superficies conicas describentibus, concipe orbes in annulos innumeros secari. Nam cùm superficies PSeX circa axem PX revolvitur, singuli arcus kb, bc, cg, ef, al, &c. portiones superficierum sphæricarum annulares describunt, & particula quælibet ut bcda, describit annulum solidum. Annulus unusquisque, ut ille qui revolutione superficiei abcd describitur, habebit annulos quatuor sibi contiguos, unum interiorem ex revolutione figuræ madn, alterum exteriorem ex revolutione figuræ befc, & duos laterales ex revolutione figurarum kbal & cghd. Attritu interioris & exterioris non potest annulus unusquisque nisi in motu juxta legem Casûs primi facto, æqualiter & in partes contrarias urgeri. Alioquin partes fluidi non perseverarent in motu suo uniformiter, sed intermedius iste annulus (contra hyp.) in motu suo acceleraretur vel retardaretur, ut de orbibus integris ostensum est in Casu primo. *Et propterea annulorum series quælibet à globo in infinitum rectà per*gens & inter duas proximas superficies conicas comprehensa, qualis est series annulorum quos figuræ madn, abcd, befc &c. circa axem PX rotatæ describunt, *movebitur pro lege Casûs primi, nisi &c.* 327.

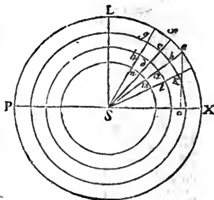
(r) centro æqualiter distant, vel citius revolverentur vel tardius (s) juxta polos quàm juxta eclipticam; tardiores accelerarentur, & velociores retardarentur ab attritu mutuo, & sic vergerent semper tempora periodica ad æqualitatem, pro lege casûs primi. Non impedit igitur hic attritus quo minus motus fiat secundum legem casus primi, & propterea lex illa obtinebit: hoc est, annulorum singulorum tempora periodica erunt ut quadrata distantiarum ipsorum à centro globi. Quod volui secundò demonstrare.

Cas. 3. Dividatur jam annulus unusquisque sectionibus transversis in particulas innumeras constituentes substantiam absolutè & uniformiter fluidam; & quoniam hæ sectiones non spectant ad legem motûs circularis, sed ad constitutionem fluidi solummodo conducunt, perseverabit motus circularis ut prius. His sectionibus annuli omnes quam minimi asperitatem & vim attritus mutui aut non mutabunt, (t) aut mutabunt æqualiter. Et manente causarum proportione manebit effectuum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum. *Q. E. D.* Cæterum cùm motus circularis, & inde orta vis cen-

(r) * *Qui à centro æqualiter distant*; seu qui sunt ex eodem orbe resecti, quales sunt annuli ex figurarum l k b a, a b c d, d e g h & revolutione descripti.

(s) * *Juxta polos* X & P, quam juxta æquatorem, quem recta S E ad axem P X perpendicularis rotata describit.

(t) * *Aut mutabunt æqualiter*. Quoniam enim hæ Sectiones non nisi ad fluiditatem singulis annulis conciliandam factæ sunt, & fluidum homogeneum supponitur; si inde mutetur annulorum asperitas & vis attritus mutui, mutabitur æqualiter seu in data ratione. Et idcirco manente resistentiarum & impressionum, quæ ex mutuo partium attritu oriuntur, proportione, manebit effectuum inde productorum proportio, hoc est, proportio motuum & periodicorum temporum; & propterea partium singularum tempora periodica erunt, ut in superioribus casibus, proportionalia quadratis distantiarum ipsarum à centro globi.



centrifuga, major (u) fit ad eclipticam quàm ad polos; debebit causa aliqua adesse quâ particulæ singulæ in circulis suis retineantur; ne materia, quæ ad eclipticam est, recedat semper à centro & per exteriora vorticis migret ad polos, indeque per axem ad eclipticam circulatione perpetuâ revertatur.

(x) *Corol.* 1. Hinc motus angulares partium fluidi circa axem globi, sunt reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi, & velocitates absolutæ reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe.

Corol. 2. Si globus in fluido quiescente similari & infinito circa axem positione datum uniformi cum motu revolvatur, communicabitur motus fluido in morem vorticis, & motus iste paulatim propagabitur in infinitum; neque prius cessabit in singulis fluidi partibus accelerari, quam tempora periodica singularum partium sint ut quadrata distantiarum à centro globi.

Corol. 3. Quoniam vorticis partes interiores ob (y) majorem suam velocitatem atterunt & urgent exteriores, motumque ipsis eâ actione perpetuo communicant, & exteriores illi eandem motus quantitatem in alios adhuc exteriores simul transferunt, eâque actione (z) servant quantitatem motûs sui planè

(u) * *Major fit ad eclipticam quàm ad polos.* Quoniam particularum E & e in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur, ipsarum vires centrifugæ sunt inter se ut radii circulorum quos describunt (*per cor. 3. prop. 4. lib. 1.*), hoc est, ut perpendiculares ad axem E S & e q. Vis igitur centrifuga eo major est, quo magis particula accedit ad æquatorem seu eclipticam S E, & in æquatore maxima est, in polo nulla.

(x) 328. * *Cor.* 1. Motus angulares sunt reciproce ut tempora periodica (327), ideoque (ex demonstratis) reciprocè ut quadrata distantiarum à centro globi. Velocitates absolutæ particularum sunt ut peripheriæ circulorum quas describunt, seu ut ipsarum distantiæ ab axe directè, & tempora periodica inversè; & propterea sunt ut distantiæ ab axe directè & quadrata distantiarum à centro globi inversè, ac proinde sunt reciprocè ut eadem quadrata applicata ad distantias ab axe. Unde velocitates absolutæ particularum in æquatore sunt reciprocè ut ipsarum distantiæ à centro globi, & earum vires centrifugæ reciproce ut cubi distantiarum à centro globi (*per cor. 1. prop. IV. lib. 1.*). 328.

(y) * *Ob majorem suam velocitatem &c.* Velocitates angulares orbium à centro globi minus distantium majores sunt (*per cor. 1.*) quàm velocitates angulares orbium exteriorum & à centro vorticis remotiorum; sed orbes interiores excessu velocitatis angularis, quo relative ad orbes exteriores moventur, hos atterunt & urgent, *motumque ipsis* &c.

(z) * *Servant quantitatem motûs sui planè invariatam.* Quia (*per hyp.*) ea est vorticis conditio, ut unaquæque fluidi pars perseveret in suo motu uniformiter, & in eâdem à centro distantia eodem

ne invariatam; patet quod motus perpetuo transfertur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem circumferentiæ absorbetur. Materia inter sphæricas duas quasvis superficies vortici concentricas nunquam accelerabitur, eo quòd motum omnem à materiâ interiore acceptum transfert semper in exteriorem.

Corol. 4. Proinde ad conservationem vorticis constanter in eodem movendi statu, requiritur principium aliquod activum, à quo globus eandem semper quantitatem motûs accipiat, quam imprimit in materiam vorticis. Sine tali principio necesse est ut globus & vorticis partes interiores, propagantes semper motum suum in exteriores, neque novum aliquem motum recipientes, tardescant paulatim & in orbem agi desinant.

Corol. 5. Si globus alter huic vortici ad certam ab ipsius centro distantiam innataret, & interea circa axem inclinatione datum vi aliquâ constanter revolveretur; hujus motu raperetur fluidum in vorticem: & primo revolveretur hic vortex novus & exiguus unà cum globo circa centrum alterius, & interea latius serperet ipsius motus, & paulatim propagaretur *in infinitum*, ad modum vorticis primi. Et eâdem ratione, quâ hujus globus raperetur motu vorticis alterius, raperetur etiam globus alterius motu hujus, sic ut globi duo circa intermedium aliquod punctum revolverentur, seque mutuo ob motum illum circularem fugerent, nisi per vim aliquam cohibiti. Postea si vires constanter impressæ, quibus globi in motibus suis perseverant, cessarent, & omnia legibus mechanicis permitterentur, languesceret paulatim motus globorum (ob rationem in corol. 3. & 4. assignatam) & vortices tandem conquiescerent.

Corol. 6. Si globi plures datis in locis circum axes positione

dem semper tenore moveatur; & tamen, propter orbium interiorum majorem velocitatem angularem attritumque continuum, orbes exteriores perpetuò urgentur & ad motum accelerandum incitantur; necesse est ut motus perpetuo transferatur à centro ad circumferentiam vorticis, & per infinitatem extimæ circumferentiæ absorbeatur. Quà ratione fit ut orbium singulorum, qui eamdem motûs quantitatem in alios exteriores simul & semper transferunt, idem sit perpetuò motus.

ne datos certis cum velocitatibus constanter revolverentur, fierent vortices totidem in infinitum pergentes. Nam globi singuli eâdem ratione quâ unus aliquis motum suum propagat in infinitum, propagabunt etiam motus suos in infinitum, adeo ut fluidi infiniti pars unaquæque eo agitetur motu qui ex omnium globorum actionibus resultat. Unde vortices non definientur certis limitibus, sed in se mutuo paulatim excurrent; globique per actiones vorticum in se mutuo, perpetuo movebuntur de locis suis, uti in corollario superiore expositum est; neque certam quamvis inter se positionem servabunt, nisi per vim aliquam retenti. Cessantibus autem viribus illis quæ in globos constanter impressæ conservant hosce motus, materia ob rationem in corollario tertio & quarto assignatam, paulatim requiescet & in vortices agi desinet.

Corol. 7. Si fluidum similare claudatur in vase sphærico, ac globi in centro consistentis uniformi rotatione agatur in vorticem, globus autem & vas in eamdem partem circa axem eundem revolvantur, sintque eorum tempora periodica ut quadrata semidiametrorum: partes fluidi non prius perseverabunt in motibus suis sine acceleratione & retardatione, quàm sint eorum tempora periodica ut quadrata distantiarum à centro vorticis. Alia (a) nulla vorticis constitutio potest esse permanens.

Corol. 8. Si vas, fluidum inclusum, & globus servent hunc motum, & motu præterea communi angulari circa axem quemvis datum revolvantur; quoniam hoc motu novo non mutatur attritus partium fluidi in se invicem, non mutabuntur motus partium inter se. Nam translationes partium inter se pendent ab attritu. Pars quælibet in eo perseverabit motu, quo fit ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleretur attritu ex altero.

Corol. 9. (b) Unde si vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi. Nam concipe planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis re-

vo-

(a) * *Alia nulla vorticis constitutio potest esse permanens.* Nam (ex demonstr.) ea debet esse vorticis constitutio, ut pars quælibet fluidi possit in suo motu uniformiter perseverare, & ut attritu ex uno latere non magis tardetur quàm acceleratur attritu ex altero latere.

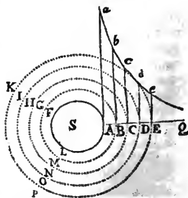
(b) * *Cor.* 9. Fluidum similare in vase sphærico E K P clausum ita agatur in vorticem, ut tandem partes fluidi in motibus

318;

volutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi: & tempora periodica partium fluidi, respectu plani hujus, erunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi.

SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

tibus suis sine acceleratione & retardatione perseverent, quemadmodum in corollario 7. expositum est. In hâc hypothesi velocitates particularum in æquatore existentium sunt ut distantiæ à centro S inversè (328), & ideo ut SD ad SE, sive, ut peripheria DIO ad peripheriam EKP ita est peripheria EKP (quam particula E tempore suo periodico tE describit) ad spatium quod alia quævis particula D eodem tempore conficit, quod proinde spatium erit $\frac{EKP^2}{DIO}$. Quiescat jam vas sphæricum, hoc est, toti systemati vorticis auferatur vasis motus angularis, & particula D tempore tE describet spatium $\frac{EKP^2}{DIO} - DIO$. Sed hoc spatium est ad circumferentiam DIO, aut quod idem est, $SE^2 - SD^2$ est ad SD^2, ut tempus tE ad tempus periodicum (TD) particulæ D in vase quiescente, quod proinde tempus erit $\frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2}$. Et simili modo tempus periodicum particulæ A, quod dicatur TA, erit in vase quiescente $\frac{SA \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Si itaque detur motus globi, seu tempus periodicum TA, dabitur tempus $tE = \frac{TA \times [SE^2 - SA^2]}{SA^2}$, & inde dabitur tempus periodicum $TD = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2 - SD^2} = \frac{SD^2 \times TA \times [SE^2 SA^2]}{SA^2 \times [SE^2 - SD^2]}$. Si igitur vas quiescat ac detur motus globi, dabitur motus fluidi ad quamlibet datam à centro distantiam. Concipe nunc planum transire per axem globi & motu contrario revolvi; & pone summam temporis revolutionis hujus & revolutionis globi esse ad tempus revolutionis globi, ut quadratum semidiametri vasis ad quadratum semidiametri globi; sive pone SA^2 ad SE^2 ut TA ad quartum, quod erit $\frac{SE^2 \times TA}{SA^2} = \frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$; & tempus pe-



riodicum plani erit $\frac{SE^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} - \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2} = tE$, quia $TA = \frac{SA^2 \times tE}{SE^2 - SA^2}$. Quare planum, quo hic utitur NEWTONUS, ita movetur ut revolutionem suam absolvat eodem tempore tE, quo vas suam revolutionem perficit in hyp. cor. 7. Sit X tempus periodicum particulæ D respectu plani in vase quiescente; & quia planum & vortex in regiones contrarias moventur, erit TD ad X ut circumferentia DIO, quam particula D tempore periodico TD describit, ad ejusdem circumferentiæ partem quam eadem particula tempore X percurrit; & ideo pars illa erit $\frac{X \times DIO}{TD} = \frac{X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$, & pars residua circumferentiæ DIO, quam planum eodem tempore X conficit, erit $DIO - \frac{DIO \times X}{TD} = \frac{SD^2 \times DIO \times tE - X \times DIO \times [SE^2 - SD^2]}{SD^2 \times tE}$. Quia verò planum tempore tE uniformi motu revolutionem suam DIO absolvit, est

Corol. 10. Proinde si vas vel circa axem eundem cum globo, vel circa diversum aliquem datâ cum velocitate quâcumque moveatur, dabitur motus fluidi. Nam si systemati toti auferatur vasis motus angularis, manebunt motus omnes iidem inter se qui prius, per corol. VIII. Et (c) motus isti per corol. IX. dabuntur.

Corol. 11. Si vas & fluidum quiescant & globus uniformi cum motu revolvatur, propagabitur motus paulatim per fluidum totum in vas, & circumagetur vas nisi violenter detentum, neque prius desinent fluidum & vas accelerari, quàm sint eorum tempora periodica æqualia temporibus periodicis globi. Quod

est tE ad X ut DIO ad spatium modo inventum, seu ut $SD^2 \times tE$ ad $SD^2 \times tE - X \times [SE^2 - SD^2]$; unde habetur $SD^2 \times X \times tE = SD^2 \times tE^2 - X \times tE \times [SE^2 - SD^2]$, & ideo $SE^2 \times X = SD^2 \times tE$, ac proinde tempus $X = \frac{SD^2 \times tE}{SE^2}$. Cùm ergo tE & SE sint quantitates datæ, tempus periodicum X particulæ fluidi D respectu plani prædicti est ut SD^2, sive ut quadratum distantiæ à centro globi. Et quia omnium particularum in eodem orbe constitutarum tempora periodica æquantur inter se; earum omnium tempora periodica respectu plani sunt ut quadrata distantiarum suarum à centro globi. Q. E. D.

(c) * *Et motus isti per cor. 9. dabuntur*, proindeque si cum iis motibus datis componatur vasis motus angularis datus, dabitur motus fluidi in vase data cum velocitate moto.

PROBLEMA.

329. Sphæra solida in fluido infinito & in eâdem à centro distantiâ similari, sed in diversis distantiis in datâ quâvis distantiarum ratione inæqualiter denso circà axem positione datum uniformi cum motu revolvatur & à sphæræ impulsu solo agatur fluidum in orbem, perseveret autem fluidi pars unaquæque uniformiter in motu suo, sitque resistentia quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, cæteris paribus, in ratione compositâ ex ratione quâlibet densitatis & ratione etiam quâcumque velocitatis relativæ, oportet invenire tempora periodica partium fluidi. 329.

Distinguatur fluidum in orbes innumeros concentricos ejusdem crassitudinis ut in demonstratione prop. 52. factum est; dicanturque $AD = x$, fluidi densitas in loco $D = z$, translatio orbium ab invicem tempore dato $= v$, densitas z sit proportionalis dignitati x^n, & resistentia, cæteris paribus, sit ut $z^m v^p$, seu ut $x^{mn} v^p$. Quia superficies sphærica DIO, est ut x^2, erit impressio orbis DIO, in orbem contiguum, ut $x^{2+mn} v^p$; sed ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones ex parte utrâque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias, ac proindè quantitas $x^{2+mn} v^p$, debet esse constans. Quarè erit v^p ut $\frac{1}{x^{2+mn}}$, & v ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$. Sunt autem differentiæ motuum angularium circà axem ut translationes orbium applicatæ ad distantias, hoc est, ut $\frac{v}{x}$, sive ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$. Sit jam $DE = dx$, & ordinata Dd, ad curvam abde, sit ut $\frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}}$ erit summa

Quod si vas vi aliquâ detineatur vel revolvatur motu quovis constanti & uniformi, deveniet medium paulatim ad statum motûs in corollariis VIII. IX. & X. definiti, nec in alio unquam statu quocunque perseverabit. Deinde verò si, viribus illis cessantibus quibus vas & globus certis motibus revolvebantur, permittatur systema totum legibus mechanicis; vas & globus in se invicem agent mediante fluido, neque motus suos in se mutuo per fluidum propagare prius cessabunt, quàm eorum tempora periodica æquentur inter se, & systema totum ad instar corporis unius solidi simul revolvatur.

Scho-

ma differentiarum, hoc est, motus totus angularis ut area D d Q, quæ est ut S. $\frac{dx}{x^{\frac{2+mn}{p}+1}} = -\frac{p}{2+mn} \times \frac{1}{x^{\frac{2+mn}{p}}}$; & tempora periodica motibus angularibus reciprocè proportionalia, sunt ut $x^{\frac{2+mn}{p}}$, neglectâ quantitate constante $\frac{p}{2+mn}$. Q. E. I.

330. *Cor.* 1. Si resistentia, cæteris paribus, sit ut velocitas, & tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, erit $p = 1$, & $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, ideóque $n = -\frac{1}{2m}$. Sed cùm resistentia proportionalis supponatur densitatis dignitati cujus index est m, & crescente densitate crescat, necesse est ut m sit numerus positivus, ac proindè n numerus negativus. Quarè densitas, ut pote proportionalis dignitati x^n, crescente distantiâ in hypothesi corollarii hujus decrescet. Hoc autem repugnat. Nam materia vorticis eò densior esse debet quò longius distat à centro. Conatur enim materia per motum suum circularem recedere ab axe vorticis & propterеà premit materiam omnem ulteriorem, eamque condensat, si condensari possit. Prætereà velocitas absoluta partium fluidi in æquatore vorticis est ut earum distantia à centro globi directè & tempus periodicum inversè, hoc est, in hypothesi cor. hujus ut $\frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, ideóque vis centrifuga partium (*per cor.* 1. *prop.* 4. *lib.* 1.) cæteris paribus est ut $\frac{1}{xx}$, & proindè decrescit in ratione duplicatâ distantiæ auctæ. Ut igitur vortex ad statum permanentem reducatur, oportet ut partes densiores à centro recedant & *rariores* ad illud accedant, quo *vis* centrifuga partium centro propiorum, quæ ob majorem velocitatem & minorem distantiam nimia est, per minorem densitatem minuatur.

331. *Cor.* 2. Si tempora periodica sint in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, hoc est, si $\frac{2+mn}{p} = \frac{3}{2}$, erit $p = \frac{4+2mn}{3}$, & ideò resistentia, cæteris paribus, ut velocitatis dignitas cujus exponens est $\frac{4+2mn}{3}$. Sed (*ex dem. cor.* 1.) m & n sunt numeri positivi. Quarè tempora periodica non possunt esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro, quin index $\frac{4+2mn}{3}$ sit unitate major, & quin proindè resistentia, cæteris paribus, in majori ratione crescat quàm in ratione velocitatis auctæ.

332. *Cor.* 3. Si spatium quo vortex continetur sit ubique plenum & propterеà medii densitas uniformis supponatur, littera

Scholium.

In his omnibus ſuppono fluidum ex materiâ quoad denſitatem & fluiditatem uniformi conſtare. Tale eſt in quo globus idem eodem cum motu, in eodem temporis intervallo, motus ſimiles & æquales, ad æquales ſemper à ſe diſtantias, ubivis in fluido conſtitutus, propagare poſſit. Conatur quidem materia per motum ſuum circularem recedere ab axe vorticis, & propterea premit materiam omnem ulteriorem. Et hâc preſſione fit attritus partium fortior & ſeparatio ab invicem difficilior; & per conſequens diminuitur materiæ fluiditas. Rurſus ſi partes fluidi ſunt alicubi craſſiores ſeu majores, fluiditas ibi minor erit, ob pauciores ſuperficies in quibus partes ſeparentur ab invicem. In hujuſmodi caſibus deficientem fluiditatem vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione reſtitui ſuppono. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt magis cohærebit & ſegnior erit, ideoque motum tardius recipiet & longius (d) propagabit quàm pro ratione ſuperius aſſignatâ. Si

tera z quæ denſitatem exponebat; ſignificet jam fluiditatis defectum, ſitque reſiſtentia, cæteris paribus, ut dignitas z^n. His poſitis oſtendetur ut in cor. 1. & 2. factum eſt, quod ſi tempora periodica ſtatuantur in ratione ſeſquiplicatâ diſtantiarum à centro, materia vorticis eò fluidior erit quò longius diſtat à centro, vel reſiſtentia augebitur in majori ratione quàm ea eſt in quâ velocitas relativa augetur.

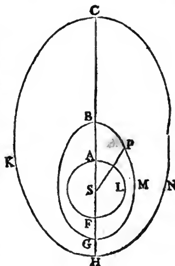
333. *Cor.* 4. Si reſiſtentia, cæteris paribus, augeatur in ratione minore quàm in ratione velocitatis, hoc eſt, ſi index p, ſit unitate minor, erit $\frac{1+mn}{p}$ binario major, & proindè tempora periodica partium vorticis erunt in majori ratione quàm duplicatâ ratione diſtantiarum à centro. Nam vel eſt $mn = 0$, quod contingit dùm eadem eſt ubique fluidi denſitas ac fluiditas, vel mn, eſt numerus poſitivus, quia defectus fluiditatis vel denſitas, auctis diſtantiis à centro augetur (*per cor.* 1.) 333.

(d) * *Et longius propagabit quàm pro ratione ſuperiùs aſſignatâ.* In ſuperioribus demonſtrationibus NEWTONUS ſuppoſuit fluidum homogeneum eſſe & preſſionem ubique æqualem; ſi verò in diverſis à vorticis centro diſtantiis aliqua ſit partium fluidi aut preſſionis inæqualitas, minorem vel majorem fluiditatem inde ortam, vel lubricitate partium vel lentore aliâve aliquâ conditione ad æqualitatem reſtitui ſupponit, ut vortex in eodem ſtatu juxtà leges præſcriptas, permaneat. Hoc niſi fiat, materia ubi minus fluida eſt, magis cohærebit & ſegnior erit, ideóque motum à globo centrali communicatum difficiliùs ac tardiùs, cæteris paribus, recipiet; ſed illum longius propagabit. Nam ſi vorticis partes ità inter ſe & cum globo cohærerent, ut nullâ vi poſſent ſeparari, non poſſet globus centralis circumvolvi, quin materia tota vorticis, tan-

Si figura (e) vasis non sit sphærica, movebuntur particulæ in lineis non circularibus sed conformibus eidem vasis figuræ, & tempora periodica erunt ut quadrata mediocrium distantiarum à centro quam proximè. In partibus inter centrum & circumferentiam, ubi latiora sunt spatia, tardiores erunt motus, ubi angustiora velociores, (f) neque tamen particulæ velociores petent circumferentiam. Arcus enim describent minus curvos, & conatus recedendi à centro non minus diminuetur per decrementum hujus curvaturæ, quàm augebitur per incrementum velo-

quam vectis rigidus, simul circumvolveretur. Undè quò magis partes illæ cohærent, eò longiùs motum à globo centrali acceptum propagant. Et ideò etiamsi materia vorticis homogenea non sit, & pressio inæqualis supponatur, vim suam obtinent difficultates, quas contrà vorticum in naturâ possibilitatem NEWTONUS proposuit in cor. 2. 4. 5. & 6. prop. 52.

(e) * *Si figura vasis non sit sphærica.* Sit C N H K, figura vasis in quo fluidum solo sphæræ A L F impulsu agatur in orbem, & particulæ fluidi quæ vasis superficiem C N H K, contingunt, movebuntur in lineis non circularibus, sed conformibus eidem vasis figuræ, particulæ verò quæ sphæræ A L F proximæ sunt, circulos describent. Undè quò magis particulæ fluidi à sphærâ centrali distant, eò magis orbitarum quas describunt, figura à circulari differt & ad vasis figuram accedit. Quia verò particularum circulos describentium tempora periodica erant (*prop.* 52.) ut quadrata distantiarum à centro S; erunt in hoc vase ut quadrata mediocrium distantiarum quam proximè. Sic particulæ P orbitam B P G B describentis tempus periodicum erit quam proximè ut quadratum distantiæ P S, quæ est media arithmetica inter distantiam maximam B S, & minimam S G, sivè erit ut tempus periodicum particulæ P, circulum describentis, cujus radius P S. Nam tempus periodicum, cæteris paribus, crescit ut velocitas absoluta decrescit; sed cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, & eadem proindè materiæ quantitas per latiora spatia ut C A, & per angustiora ut F H, simul transeat; oportet ut materiæ velocitas in spatiis latioribus minuatur, & in angustioribus augeatur. Quo fit ut particula P, eodem ferè tempore describat orbitam B P G B, quo velocitate mediocri describeret circulum cujus esset radius P S.



(f) * *Neque tamen particulæ velociores.* Nam vortex non potest esse in statu permanenti quin particula P, in spatiis angustioribus L N, F H, ad centrum S acce-

velocitatis. Pergendo à spatiis angustioribus in latiora recedent paulo longius à centro, sed isto recessu tardescent; & accedendo postea de latioribus ad angustiora accelerabuntur, & sic per vices tardescent & accelerabuntur particulæ singulæ in perpetuum. (g) Hæc ita se habebunt in vase rigido. Nam in fluido infinito constitutio vorticum innotescit per propositionis hujus corollarium sextum.

Proprietates autem vorticum hâc propositione investigare conatus sum, ut pertentarem si quâ ratione phænomena cœlestia per vortices explicari possint. Nam phænomenon est, quod planetarum circa jovem revolventium tempora periodica sunt in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro jovis; & eadem regula obtinet in planetis qui circa solem revolvuntur. Obtinent autem hæ regulæ in planetis utrisque quam accuratissimè, quâtenus observationes astronomicæ hactenus prodidêre. Ideoque si planetæ illi à vorticibus circa jovem & solem revolventibus deferantur, debebunt etiam hi vortices eâdem lege revolvi. Verùm tempora periodica partium vorticis prodierunt in ratione duplicatâ distantiarum à centro motus: neque potest ratio illa diminui & ad rationem sesquiplicatam reduci, (h) nisi vel materia vorticis eo fluidior sit quo longius distat à centro, vel resi-

accedat; & ideò necesse est ut in iisdem spatiis conatus recedendi à centro minùs augeatur per incrementum velocitatis, quàm diminuitur per decrementum curvaturæ. Est enim vis quâ particula P, in loco G, nititur à circumferentiâ M G recedere, ut quadratum velocitatis particulæ directè & radius circuli curvam osculantis in G, inversè (*cor.* 1. *prop.* 4. & *not.* 121. *lib.* 1.)

(g) * *Hæc ità se habebunt*, in vase rigido aut in spatio aliis vorticibus circumdato, quo tanquam vase, juxtà *Cartesii* opinionem materia vorticis continetur. Ex his autem NEWTONI observationibus sequitur. 1°. Planetarum qui circà *Cartesiani* vorticis centrum eâdem lege cum vorticis partibus moventur, orbitas eò magis ad circuli figuram accedere debere quo centro vorticis propiores sunt; & propterea excentricitatem orbitæ Mercurii longè minorem esse excentricitate orbitæ Saturni & omnium superiorum planetarum, contrà observationes astronomicas. Sequitur 2°. in *Cartesianâ* hypothesi explicari non posse cur planetæ ellipses accuratas, non verò circulos aut irregulares figuras describant. Sequitur 3°. omnium orbitarum aphelia & perihelia à sole spectata in iisdem inter fixas locis esse posita atquè immota manere; cùm tamen ex observationibus astronomicis certum sit, planetarum aphelia à se invicem longe distare & lento motu agi. 333.

(h) * *Nisi vel materia vorticis eò fluidior sit.* (Per not. 332.)

resistentia, quæ oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi; ex auctâ velocitate quâ partes fluidi separantur ab invicem, augeatur in majore ratione quàm ea est in quâ velocitas augetur. Quorum tamen neutrum rationi consentaneum videtur. Partes crassiores & minus fluidæ, nisi graves sint in centrum, (i) circumferentiam petent; & verisimile est quod, etiamsi demonstrationum gratiâ hypothesin talem initio sectionis hujus proposuerim, ut resistentia velocitati proportionalis esset, tamen (k) resistentia in minori sit ratione quàm ea velocitatis est. Quo (l) concesso, tempora periodica partium vorticis erunt in majori quàm duplicatâ ratione distantiarum ab ipsius centro. Quod si vortices (uti aliquorum est opinio) celerius moveantur prope centrum, dein tardius usque ad certum limitem, tum denuo celerius juxta circumferentiam; certe nec ratio sesquiplicata neque alia quævis certa ac determinata obtinere potest. (m) Viderint itaque philosophi quo pacto phænomenon illud rationis sesquiplicatæ per vortices explicari possit.

(i) * *Circumferentiam petent.* Id experientià constat; nam si aqua in vase contenta in vorticem agatur, paleæ & alia corpuscula minùs fluida petunt circumferentiam.

(k) * *Tamen resistentia in minori sit ratione.* (Vid. ultimam not. in hoc schol.).

(l) * *Quo concesso.* (per not. 333.)

(m) * *Viderint itaque, Philosophi.* Difficultas crescit, si tria simul conjungantur, quæ primus omnium *Keplerus* mirâ sagacitate ex observationibus Astronomicis deduxit. Primum est, planetas in ellipsibus, quarum umbilicum sol occupat, revolutiones suas peragere. Secundum est planetas singulos radiis ad solem ductis, & satellites radiis ad suum primarium ductis, areas describere temporibus proportionales. Tertium est, tempora periodica planetarum circà solem & satellitum circà primarium suum, esse in ratione sesquiplicatâ distantiarum à centro sui motûs. Ex hâc proportione colligitur planetarum velocitates in mediocribus distantiis ab umbilico communi esse reciprocè in ratione subduplicatâ distantiarum illarum. Sint enim D, & d, mediocres planetarum distantiæ T & t, eorum tempora periodica, & quoniam in singulis planetarum orbitis parva est distantiæ maximæ & minimæ differentia, si conferatur cum differentiâ quæ inter distantias duorum planetarum intercedit, spatia temporibus T & t, descripta erunt quam proximè ut distantiæ D & d; unde velocitates erunt ut $\frac{D}{T}$ & $\frac{d}{t}$, hoc est, ut $\frac{D}{D^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{d}{d^{\frac{3}{2}}}$, sivè ut $\frac{1}{D^{\frac{1}{2}}}$ & $\frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$, seu in subduplicatâ ratione mediocrium distantiarum inversè, in quâ etiam ratione sunt velocitates partium verticis circularis in distantiis D & d, à sole (*per prop.* 53.). Verùm per alteram analogiam, arearum scilicet & temporum, velocitates partium vorticis circularis sunt in ratione simplici distantiarum à sole reciprocè. Nam si planeta P, orbitam ellipticam P Q q p describat & radiis ad umbilicum S ductis areas æquales S P p, S Q q, tempusculo dato verrat,

rat; centro S & radiis SP, SQ describantur arcus circulares quam minimi Pr, QR, qui radiis SP, Sq, occurrant in r, & R, erit area $SPp = SP \times Pr = SQq = SQ \times QR$, & hinc $Pr : QR = SQ : SP$. Sed Pr & QR sunt ut spatia circularia eodem tempore descripta ideóque ut velocitates circulares partium vorticis in P, & Q; Quarè velocitates illæ sunt in ratione inversâ distantiarum. Porrò quàm difficile sit ab his aliisque contradictionibus hypothesim vorticum liberare, ex variis hàc de re eruditorum Dissertationibus satis manifestum est. Vid. *Leibnitii* tentamen de motuum cælestium causis, *Villemotii* opus de vorticibus; Illustrissimi Marchionis *Poleni* dialogum de eàdem materiâ; Dissertationes Celeber. Virorum *Saurini* in Comm. Acad. Reg. Scient. an. 1709., *Bulffingeri* de causâ gravitatis, *Joan. Bernoulli* Cogitationes novas de Systemate Cartesii, ejusdem Physicam Cœlestem inter Academiæ Præmia, Domini *De Molieres* Lectiones Physicas.

Illustrium Authorum qui vorticum hypothesim strenuè vindicarunt, varias hàc de re Dissertationes hic percurrere nimis longum foret, nec tantas componere lites nostrum est. Eam enim NEWTONUS sibi vel maximè impugnandam assumit vorticum hypothesim quam *Cartesius* ipse constituerat, natasque post primi autoris mortem hujus systematis emendationes quam plurimas saltem directè non petit. At silentio prætermittere non licet Dissertationem Doctissimi Viri *Joan. Bernoullii* ab Academiâ Regiâ Paris. præmio condecoratam, cui titulus est: *Cogitationes novæ de Systemate Cartesii.* Existimat Clariss. Autor superiorum propositionum demonstrationes mero sophismate laborare, eò quod NEWTONUS orbium contiguorum & sese mutuo atterentium impressionem solùm definierit ex superficierum magnitudine & velocitate relativâ quâ ab invicem separantur; earum verò superficierum pressionem minimè consideraverit, vimque vectis neglexerit quæ, cæteris paribus, major est in majoribus rotis & minor in minoribus. Verùm licet in suis demonstrationibus pressionem ubique æqualem supposuerit NEWTONUS, hujus tamen pressionis inæqualitatem in scholio consideravit, & quid ex illâ sequatur, generatim ostendit. Vim quidem vectis prorsùs neglexit, & meritò quidem, quantum intelligere possumus. Quamvis enim in vecte rigido cujus partes simul eodem motu angulari circà hypomoclion revolvuntur, eò major sit efficacia quo cæteris paribus longior est vectis; quod videlicet vectis partes eò celeriùs moveantur, quò major est earum ab hypomoclio distantia, id tamen ad partes medii fluidi quæ circà centrum aliquod revolvuntur, non videtur transferendum. Et licèt NEWTONUS orbes solidos, demonstrationis gratiâ, primùm fingat, eos tamen divisos supponit ac deindè in particulas innumeras subdividit ut demonstratio ad naturam medii fluidi accommodetur. Quod si ob qualemcumque partium fluidi cohæsionum, aliqua habenda sit ratio vis vectis, certè ea non videtur assumenda distantiæ à vorticis centro proportionalis, quemadmodùm fit in vecte perfectè rigido, seu cujus partes vi quasi infinitâ connexæ supponuntur & eodem motu angulari revolvuntur. 333.

Cæterùm Celeber. *Joan. Bernoulli* aliam usurpat hypothesim quæ Mechanicis perspecta nondùm est certòque explorata. Supponit enim cum D. *Amontons* in Monum. Paris. an. 1699. resistentiam quæ oritur ex frictione superficierum contiguarum utcumque inæqualium, manente earumdem

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LII. THEOR. XL.

... in sese mutuò pressione, constantem esse; verùm hypothesis illa minùs placuit Clariss. *Wolfio* qui de eâ his verbis loquitur in Elementis Mechanices num. *965*.: Equidem *Amontons* regulam universalem dedit computandi vim ad frictionem in dato quolibet casu superandam, sed cùm omnem frictionem à solâ appressione ex pondere superincedentis derivet, ex antecedentibus satis apparet quod proposito satisfacere nequeat: veram frictionis legem accuratissimis experimentis tentarunt Celeber. Philosophi *Desaguilliers* & *Muschenbroek*; At eam haud satis constantem observarunt, ut patet ex iis quas *Muschenbroek* tom. 1. Physices descripsit experimentorum tabulis. Nil ergò certi hâc de re pronuntiari potest. NEWTONUS tamen conjecturam fecit resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est, eo fortasse ductus argumento quod in Historiâ Acad. Reg. an. 1709. hoc ferè modo exponitur: si concipiantur superficies innumeris eminentiis asperæ, dum alia super aliam incedit, superficiei superioris eminentiæ intrà cavitates inferioris, dato tempore, pressionis vi penetrant, fitque resistentia major, si intrà superficiei inferioris cavitates altiùs ingrediantur superficiei superioris eminentiæ, at verò si major sit velocitas, superior superficies intrà inferiorem eodem dato tempore minùs penetrat. Hinc si Clariss. *Parentii* ratio valeat, satis patet resistentiam in minori esse ratione quàm ea velocitatis est. Attamen Clariss. *Muschenbroek*, factis experimentis, resistentiam velocitati proportionalem in motibus tardioribus invenit, in celerioribus verò eam in majori quàm velocitatis ratione observavit.

Assumit D. *Bernoullius* impressiones orbium contiguorum in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione summæ virium centrifugarum orbium omnium inferiorum ad centrum usquè vorticis, ex ratione velocitatis quâ orbes contigui ab invicem separantur, & ex ratione distantiæ orbium illorum à centro; undè per analysim deducit tempora periodica partium vorticis sphærici homogenei esse in ratione radicum cubicarum dignitatis quintæ distantiarum à centro; earum verò celeritatem sub æquatore esse reciprocè in ratione radicis cubicæ quadrati distantiarum à centro. Si in hypothesi *Bernoullii* negligatur vis vectis, eodem calculo quo usus est, tempora periodica inveniuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis quartæ distantiarum à centro; Si verò supponamus impressiones orbium in se mutuò factas, esse in ratione compositâ ex ratione pressionum, ratione velocitatum relativarum & ratione superficierum, tempora periodica *Bernoulliano* calculo inveniuntur quadratis distantiarum proportionalia, uti NEWTONUS per suam hypothesim invenerat; & si cum his tribus rationibus componatur ratio distantiæ à centro ut vis vectis exprimatur, tempora periodica reperiuntur proportionalia radicibus cubicis dignitatis septimæ distantiarum à centro. Hæ verò analogiæ omnes à regulâ illâ *Keplerianâ*, quâ tempora periodica statuuntur esse in ratione sesquiplicata distantiarum, dissentiunt. Ut ergò vorticis sphærici leges cum *Kepleri* sanctiis conciliet *Bernoullius*, supponit densitatem vorticis esse in ratione subduplicatâ distantiæ centro reciprocè, planetas verò non esse ejusdem prorsus densitatis cum medio fluido in quo primùm collocati sunt, ideòque ob majorem vel minorem suam densitatem in eo medio successivè descendere & ascendere, intereadùm circulari motu vorticis abripiuntur; ex quibus motibus simul compositis nascuntur ellipticæ planetarum trajectoriæ & apheliorum lentissimi motus. Sed medium illud in quo planeta, cùm densior est, descendit, & ubi rarior est, ascendit, vel grave est in centrum vorticis vel non. Si grave non sit, planeta in medio rariori positus, eodemque cum medio illo gyrationis motu actus, majori vi à centro recedere & spiralem trajectoriam describendo in infinitum abire debet; & contrà, planeta in medio densiori primùm collocatus, ad centrum per spiralem lineam perpetuò accederet, quod medii densioris major esse debeat vis centrifuga quàm planetæ rarioris. Si medium grave sit in centrum vorticis, ipsiusque densitas, decrescentibus distantiis à centro, crescat, cœlestis materiæ densitas, ob parvam orbitarum quas planetæ describunt, excentricitatem, æqualis assumi potest den-

sitati

PROPOSITIO LIII. THEOREMA XLI.

Corpora, quæ in vortice delata in orbem redeunt, ejusdem sunt densitatis cum vortice, & eâdem lege cum ipsius partibus quoad velocitatem & cursus determinationem moventur.

Nam si vorticis pars aliqua exigua, cujus particulæ seu puncta physica datum servant situm inter se, congelari supponatur: hæc, quoniam neque quoad densitatem suam, neque quoad vim insitam aut figuram suam mutatur, movebitur eâdem lege ac prius: & contra, si vorticis pars congelata & solida ejusdem sit densitatis cum reliquo vortice, & resolvatur in fluidum, movebitur hæc eâdem lege ac prius, nisi quâtenus ipsius particulæ jam fluidæ factæ moveantur inter se. Negligatur igitur motus particularum inter se, tanquam ad totius motum progressivum nil spectans, & motus totius idem erit ac prius. Motus autem idem erit cum motu aliarum vorticis partium à centro æqualiter distantium, propterea quod solidum in fluidum resolutum fit pars vorticis cæteris partibus consimilis. Ergo solidum, si sit ejusdem densitatis cum materiâ vorticis, eodem motu cum ipsius partibus movebitur, in materiâ proximè ambiente relativè quiescens. Sin densius sit, (n) jam magis conabitur recedere à centro vorticis quàm prius; ideoque vorticis vim illam, quâ prius in orbitâ suâ tanquam in æquilibrio constitutum retinebatur, jam superans, recedet à centro & revol-

sitati cujusque planetæ huic materiæ innatantis; atque adeò densitas cælestis materiæ ad distantiam saturni æqualis erit densitati saturni, ad distantiam Jovis, Martis &c. æqualis erit densitati horum planetarum, & omnes illæ densitates erunt inter se in ratione subduplicatâ distantiarum a sole reciprocè. Si itaque telluris densitas mediocris supponatur æqualis densitati aquæ, materia cælestis inter solem & tellurem constituta aquâ densior erit & corporum motui maximè resistet. Sed et ex Cometarum motibus, aliisque observationibus constat, materia cælestis inter solem & tellurem motui corporum 333. minimè resistit. Nam Cometarum motus sunt summè regulares, & easdem leges cum planetarum motibus observant, & in omnes cæli plagas liberrime feruntur, atque ad solem usque ferè penetrant sine resistentiâ.

(n) * *Jam magis conabitur.* Nam vis centrifuga motrix, cæteris paribus, augetur vel minuitur in ratione quantitatis materiæ (*per def.* 8. *lib.* 1.) & materiæ quantitas, dato corporis volumine, augetur vel minuitur in ratione densitatis (2. *lib.* 1.).

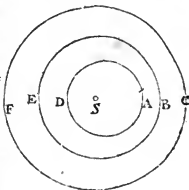
volvendo describet spiralem, non amplius in eundem orbem rediens. Et eodem argumento si rarius sit, accedet ad centrum. Igitur non redibit in eundem orbem nisi sit ejusdem densitatis cum fluido. Eo autem in casu ostensum est, quod revolveretur eâdem lege cum partibus fluidi à centro vorticis æqualiter distantibus. *Q. E. D.*

Corol. 1. Ergo solidum quod in vortice revolvitur & in eundem orbem semper redit, relativè quiescit in fluido cui innatat.

Corol. 2. Et si vortex sit quoad densitatem uniformis, corpus idem ad quamlibet à centro vorticis distantiam revolvi potest.

Scholium.

Hinc liquet planetas à vorticibus corporeis non deferri. Nam planetæ secundum hypothesin *Copernicæam* circa solem delati revolvuntur in ellipsibus umbilicum habentibus in sole, & radiis ad solem ductis areas describunt temporibus proportionales. At partes vorticis tali motu revolvi nequeunt. Designent *AD*, *BE*, *CF*, orbes tres circa solem *S* descriptos, quorum extimus *CF* circulus sit soli concentricus, & interiorum duorum aphelia sint *A*, *B* & perihelia *D*, *E*. Ergo corpus quod revolvitur in orbe *CF*, radio ad solem ducto areas temporibus proportionales describendo, (°) movebitur uniformi cum motu. Corpus autem quod revolvitur in Orbe *BE*, tardius



(°) * *Movebitur uniformi cum motu.* Æqualibus enim temporibus æquales areas, & proinde æquales arcus, hoc est, æqualia spatia describuntur.

dius movebitur in Aphelio *B* & velocius in Perihelio *E*, (p) secundum leges Astronomicas; cùm tamen (q) secundum leges Mechanicas materia Vorticis in spatio angustiore inter *A* & *C* velocius moveri debeat quàm in spatio latiore inter *D* & *F*; id est, in Aphelio velociùs quàm in Perihelio. Quæ duo repugnant inter se. Sic in principio Signi Virginis, ubi Aphelium Martis jam versatur, distantia inter orbes Martis & Veneris est ad distantiam eorundem orbium in principio Signi Piscium ut tria ad duo circiter, & propterea materia Vorticis inter Orbes illos in principio Piscium debet esse velocior quàm in principio Virginis in (r) ratione trium ad duo. Nam quò angustius est spatium per quod eadem Materiæ quantitas eodem revolutionis unius tempore transit, eo majori cum velocitate transire debet. Igitur si Terra in hâc Materiâ cœlesti relativè quiescens ab eâ deferretur, & unà circa Solem revolveretur, (ſ) foret hujus velocitas in principio Piscium ad ejusdem velocitatem in principio Virginis in ratione sesquialterâ. (t) Unde Solis motus diurnus apparens in principio Virginis major esset quàm minutorum primorum septuaginta, & in principio

(p) * *Secundùm leges Astronomicas.* Quoniam axis ellipseos per aphelium B & perihelium E transit, estque ellipsi normalis, area quam radius vector S B tempore quam minimo describit, erit æqualis rectangulo ex distantiâ S B in arcum quam minimum à corpore in B descriptum; & similiter area æqualis quam radius vector S E eodem tempore quam minimo describit, æquatur rectangulo ex distantiâ S E ductâ in arcum à corpore in E descriptum, & ideò prior arcus est ad posteriorem, hoc est, velocitas in B, est ad velocitatem in E, ut distantia S E, ad distantiam majorem S B.

(q) * *Secundùm leges mechanicas.* Nam cùm vortex supponatur esse in statu permanenti, æquales materiæ quantitates per spatium angustius A C, & per spatium latius D F, ut fit in fluviis, eodem tempore transeunt, & propterea materia vorticis in spatio angustiore inter A & C, velociùs movetur quàm in spatio latiore inter D & F. Quantitas autem materiæ, quæ dato tempore transit per spatium A C, vel D F, est ut spatium hoc directè & materiæ velocitas mediocris inversè, & ideò mediocris velocitas materiæ inter A & C, est ad mediocrem velocitatem materiæ inter D & F, ut F D ad A C. 333.

(r) * *In ratione trium ad duo.* (per not. præced.).

(ſ) * *Foret hujus velocitas.* Ex observationibus Astronomicis constat terram inter Veneris & Martis orbes positam esse.

(t) * *Undè solis motus diurnus apparens.* Hic motus est angulus quem sol, radiis ad terram ductis, proprio motu ab occidente in orientem unoquoque die describere nobis videtur, quem quidem angulum terra, radiis ad solem ductis, in hypothesi *Copernicæâ*, conficit. Porrò notissimum est, circulum illum quem sol inter fixas motu annuo describere videtur, ab

DE MOTU CORPORUM. LIBER SECUND. SECT. IX. PROP. LIII. THEOR. XLI.

cipio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo: & cùm tamen (experientiâ teſte) apparens iſte Solis motus major ſit in principio Piſcium quàm in principio Virginis, & propterea Terra velocior in Principio Virginis quàm in Principio Piſcium. (u) Itaque Hypotheſis Vorticum cum Phænomenis Aſtronomicis omnino pugnat, & non tam ad explicandos quàm ad perturbandos motus cœleſtes conducit. Quomodo verò motus iſti in ſpatiis liberis abſque Vorticibus peraguntur, intelligi poteſt ex Libro primo, & in Mundi Syſtemate plenius docebitur.

ab Aſtronomis dividi in partes duodecim æquales, ſeu ſigna quorum hæc duo virgo & piſces ſunt directè oppoſita, ità ut dum terra in hypotheſi *Copernici*, eſt in principio Piſcium, ſol appareat in principio Virginis & contrà. Cùm igitur angularis velocitas terræ in principio Piſcium ſit ad ejus velocitatem angularem in principio Virginis ut 3 ad 2, ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis eſt ad ejus motum apparentem in principio Piſcium in eâdem ratione 3 ad 2. Solis motus diurnus apparens medius eſt minutorum primorum 59 & ſecundorum 8, ſeu ſecundorum 3548, qui numerus dicatur M; Quarè ſi ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis, ponatur $= M + X$, & in principio Piſcium $= M - X$, erit $M + X : M - X = 3 : 2$, unde invenitur $X = \frac{1}{5} M = 707''$ quam proximè, ac proindè erit $M + X = 4255'' = 70' + 55''$, & $M - X = 2841'' = 47' + 21''$. Ergò ſolis motus diurnus apparens in principio Virginis major eſſet quàm minutorum primorum ſeptuaginta, & in principio Piſcium minor quàm minutorum quadraginta octo; cùm tamen ex obſervationibus Aſtronomicis ſol in principio Virginis è tellure viſus motu diurno conſicere videatur minuta prima 58 tantùm in principio piſcium minuta prima 60 ſeu gradum unum.

(u) * *Itaque hypotheſis vorticum.* Quoniam verticis materia circulos deſcribit æquatori vorticis parallelos, neceſſe eſt (*per hanc prop. 53.*) ut planetæ *omnes ferantur* in orbitis æquatori parallelis, ſed obſervatum eſt nullum planetam in orbitâ æquatori parallela revolutiones ſuas abſolvere, & cometas variis directionibus in omnes cœli plagas ferri. Eadem eſt difficultas ſi per vim centrifugam partium vorticis explicetur vis centripeta ſeu gravitas corporum quæ ad axem vorticis perpendiculariter tendere deberent, non verò ad vorticis centrum dirigi. Sed de his vid. Acta Erudit. Lipſ. an. 1686. & 1695; Diaria Erudit. 1703. 1707. Monumenta Acad. Pariſ. 1709. Diſſertationes Clar. *Hugenii* & *Bulffingeri* de causâ gravitatis.

FINIS TOMI II.

CTELOS SNC - FIRENZE 1987

1.5.130 (v. II)
restauro carte, imbrachettatura (tylose MH 300p; carta e velina giapponese). Guardie F(Ingres 2:2:1 e pelle uovo). Cucitura su 4 nervi (nervi canapa; fili lino). Capitelli naturali (lino), passanti sotto catenella a centro fascicoli; capitelli cuciti(cotone cotone ritorto fiorentino). Quadranti sagomati incartonati (cartone fibrato e L.C. Fabriano). Incassatura in pelle naturale scarnita (pelle capra, tylose MH 300p, Vinavil 59). Coperta in tutta pelle (pelle capra; tylose MH 300p).